اسم التدريسي : م.د.احمد انتصار غثيث
أ.م.د.احمد محمد على

جامعة الموصل
كلية علوم الحاسوب والرياضيات
قسم الرياضيات
المرحلة الثانية

دراسة الكيانات:

إن المقصود بالكيانات هي تلك المجموعات التي تمتلك بنية. والبنية هي مجموعة العلاقات بمواصفات معينة معرفة على مجموعة معينة تسمى مجموعة الطور، فإذا كانت S مجموعة الطور و H مجموعة العلاقات المعرفة على المجموعة S ، و K هي مجموعة مسلمات تحدد مواصفات هذه العلاقات فأن الزوج (H,K) هو البنية على S وأن الزوج ((S,(H,K) المجموعة وبنيتها يسمى بالكيان . وفي أغلب الاحيان يرمز إلى البنية بحرف واحد فقط يوضع بدل(H,K) وليكن هذا الحرف M عندها يكون رمز الكيان (S,M).

يقال إن دراسة الرياضيات المعاصرة هي دراسة الكيانات، وهناك ثلاث بنى رياضية رئيسية: هي البنى الجبرية والبنى التبولوجية والبنى الترتيبية، تعرف ثلاث كيانات رئيسية هي الكيانات التبولوجية (الفضاءات التبولوجية بأنواعها) والكيانات الجبرية (النظام الرياضي، شبه الزمرة، الزمرة، الحلقة الحقل، ...) والكيانات الترتيبية (السلسلة، الشبكة، المجموعة المرتبة بأنواعها، ...) فضلا عن تأليف كيانات من قبل أكثر من كيان مثلا كيان الأعداد الحقيقية كيان جبري تبولوجي ترتيبي لأنه حقل مرتب كامل.

إن الدالة التي تربط بين كيانين مجالها مجموعة الطور لأحد كيانين ومجالها المقابل مجموعة الطور للكيان الاخر، وبشكل لا يؤثر على البنيتين تسمى تلك الدالة **بالتحويل البنيوي**. وللتحويل البنيوي مسميات مختلفة تتغير تبعا لطبيعة الكيانات أو لكون الدالة شاملة أو متباينة .

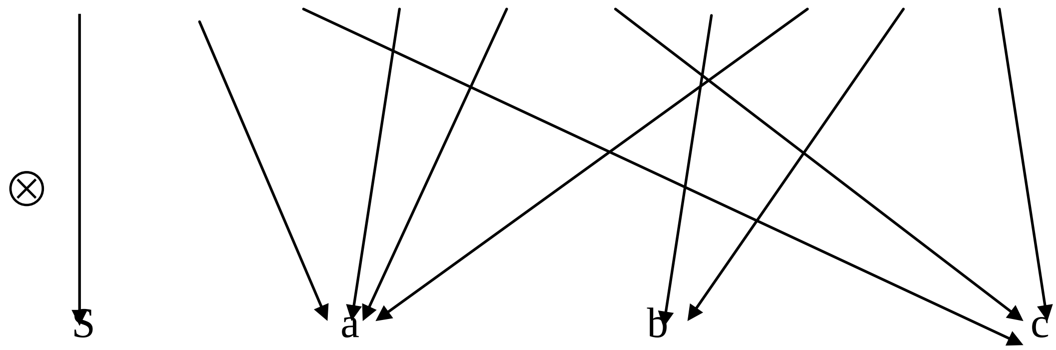
الكيان الجبري:

يعد تعريف العملية على المجموعة الخطوة الأولى على طريق تعريف الكيان الجبري، وتعرف العملية النونية على المجموعة S بأنها دالة من S^n إلى S إلا أن أكثر العمليات استعمالا العملية الثنائية التي هي الدالة من $S\times S$ إلى S .

وقد يستعاض عن العملية بكتابة جدول يسمى جدول العملية في حالة كون مجموعة الطور مجموعة منتهية.

فمثلا إذا كانت $S=\{a , b , c\}$ والعملية $\otimes$ عملية معرفة بالشكل التالي:

$S\times S=\{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (a,c), (c,a), (b,c), (c,b)\}$



أو بالشكل الأتي الذي يؤدي نفس الهدف:

$\otimes$	**a**	**b**	**c**
a	a	a	b
b	c	c	b
c	a	c	a

يمكننا كتابة الجدول من الدالة المعرفة وكذلك يمكننا كتابة الدالة من الجدول. فمثلا أن $a \otimes b = a$ في الجدول، وفي الدالة $\otimes(a,b) = a$ ، وهكذا... .

ويعرف الكيان الجبري البولي على أنه السداسي (S, #, *, O, 1, 0) حيث تمثل # و * عمليتين ثنائيتين و O عملية أحادية والرمزان 0 و 1 يمثلان العنصرين المحايدين تحت تأثير العمليتين # و * على التوالي .

إن التحويل البنيوي الجبري يسمى بالهومومورفزم (homomorphism) ويعبر عنه بـ $f:(X,*) \to (Y,\#)$ هومومورفزم لعملية إذا وإذا فقط

$$f(x*y) = f(x)\# f(y) \quad , \ \forall \quad x,y \in X .$$

وأن $f:(X,*,\otimes) \to (Y,\#,\oplus)$ هومومورفزم لعمليتين إذا وإذا فقط

$$f(x*y) = f(x)\# f(y) \quad , \ \forall \quad x,y \in X$$

$$f(x \otimes y) = f(x) \oplus f(y) \quad , \ \forall \quad x,y \in X .$$

أي أن الهومومورفزم لـ n من العمليات هو هومومورفزم لجميع العمليات المتناظرة الأولى مع الأولى، والثانية مع الثانية، وهكذا... .

للهومومورفزم تسميات كثيرة ومعتمده على حدود إضافية منها:

- يسمى الهومومورفزم بالاندومورفزم (endomorphism) في حالة كون x=y.
- يسمى الهومومورفزم بالابيموفزم (epimorphism) في حالة كونه شاملا.
- يسمى الهومومورفزم بالمونومورفزم (monomorphism) في حالة كونه متباينا.
- يسمى الهومومورفزم ايسومورفزم (isomorphism) في حالة كونه شاملا ومتباينا.
- يسمى الاندومورفزم الشامل والمتباين اوتومورفزم (automorphism) .

وأخيرا من الأمثلة المتداولة كثيرا f(x)=ln(x) من الكيان $(R^+,\cdot)$ ((مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة)) تحت تأثير الضرب الاعتيادي إلى الكيان (R,+) ((مجموعة الأعداد الحقيقية)) تحت تأثير الجمع الاعتيادي هو ايسومورفزم وليس اوتومورفزم، وكذلك الحال بالنسبة للدالة f(x)=exp(x) من (R,+) إلى $(R^+,\cdot)$.

الكيان التبولوجي (الفضاء التبولوجي):

إن علاقة المجاورة (من جار من) على مجموعة S غير خالية تعرف بوساطة مجموعة H من المجموعات الجزئية لـ T تتصف بصفات تحددها مجموعة مسلمات K عندها تعرف البنية التبولوجية بالرمز (H,K) أو بشكل مختصر كما هو مستعمل في كتب التبولوجي ويسمى الكيان التبولوجي بالفضاء التبولوجي ويرمز له بالزوج (S, T) أو ((S,(H,K))، فلو تأملنا تعريف التبولوجي لوجدنا أن الشروط الأربعة هي مسلمات البنية وهذه الشروط تختلف باختلاف تسمية العنصر في التبولوجي.

مثلا اذا وفرنا دالة المسافة على مجموعة غير خالية X أي أن هناك دالة $d : X \times X \to R$ بحيث أن:

- $d(x, x) \geq 0 \quad , \quad \forall x \in X$,
- $d(x, y) = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = y, \quad \forall x, y \in X$,
- $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in X$,
- $d(x, y) = d(y, z) \geq d(x, z), \quad \forall x, y, z \in X$.

عندها تعرف المحلة المفتوحة التي تسمى كرة مفتوحة مركزها عنصر x في X ونصف قطرها r عدد حقيقي في R بالاتي: $B(x, r) = \{y \mid d(x, y) < r\}$.

فإذا كان y عنصرا في B(x,r) فأن ذلك يعني أن x و y في نفس المحلة وأن y يبعد عن x بمسافة أقل من r.

وإذا كان تعريف التبولوجي تعريف علاقة الجيران على S فأن عدم الاختلاف في علاقات الجيران لا بد أن يمثل التكافؤ التبولوجي. وأن أداة التكـــــــــافؤ التبولوجي هي (homeomorphism) تلـك الدالـة المسـتمرة الشـاملة المتباينـة التـي معكوسـها دالـة مسـتمرة. إن كونهـا شـاملة ومتباينـة يضـمن التكـافؤ العـددي لعناصر مجموعتي الطور، أما كونها مستمرة فتعني أن صور العناصر المتجاورة في البنية الأولى تكون متجاورة في البنية الثانية، أما كونها معكوس الدالة دالة مستمرة فأن ذلك يعني أن معكوس صورة العناصر المتجاورة في البنية الثانية يُكَون متجاورة في البنية الأولى.

الكيان الترتيبي:

إن اسم الكيـان يعبـر عـن البنيـة الترتيبيـة بأشـكال المختلفـة ويقـدم جماليـة و تنظيماً وتناسقاً له فوائد كثيرة. فمن أجل تعريف علاقات ترتيبية على مجموعة طور X لا بد أن نستعرض البديهيات التالية:

1. علاقة R انعكاسية.
2. علاقة R غير انعكاسية.
3. علاقة R لا متناظرة.
4. علاقة R متعدية.
5. علاقة R متصلة.
6. كل مجموعة جزئية من X مقيدة من الأعلى لها أصغر قيد أعلى، وكل مجموعة جزئية من X مقيدة من الأسفل لها أكبر قيد أدنى.
7. كل مجموعة جزئية ثنائية من X مقيدة لها أصغر حد أعلى وأكبر حد أدنى.

8. كل مجموعة A جزئية من X هناك عنصر $a \in A$ بحيث $(a,x) \in R$ لكل $x \in A$.

ألان يمكن أن نقدم بعض الكيانات الترتيبية:

الكيان الأول: **مجموعة جزئية الترتيب: (Partially ordered set)**

يسمى أحيانا هذا الكيان بـ البوست (Poset). وهو الثلاثي (X , (R,{4,3,1})). مثال $(Z,\leq)$.

الكيان الثاني: **المجموعة المرتبة: (Ordered set)**

وتسمى أحيانا بمجموعة بسيطة الترتيب أو مجموعة خطية الترتيب أو مجموعة مسلسلة الترتيب أو مجموعة كلية الترتيب. وهو الثلاثي (X , (R,{5,4,3,1})) . مثال $(R,\leq)$.

الكيان الثالث: **المجموعة صارمة الترتيب: (Strictly ordered set)**

وهو الثلاثي ((X , (R,{ 4,3,2}). مثال $(Z,<)$.

الكيان الرابع: **المجموعة الكاملة: (Complete set)**

وهو الثلاثي ((X , (R,{ 6,4,3,2}). مثال $(R,<)$.

الكيان الخامس: **المشبك: (Lattice)**

وهو الثلاثي ((X , (R,{ 7,4,3,1}). مثال $(Z,<)$. مثال مجموعة القوة (مجموعة كل المجموعات الجزئية لمجموعة ما).

الكيان السادس: **المجموعة حسنة الترتيب: (Well ordered set)**

ويسمى أيضا بـ بالمجموعة اعتيادية الترتيب وهو الثلاثي
$(X, R, \{8,5,4,3,1\})$. مثال $(N, \leq)$.

إن العلاقة بين الكيان الترتيبي والكيان الجبري علاقة وثيقة فأن الجبر البولي الذي قدم على أنه كيان جبري يمثل إحدى حلقات الوصل بين الكيان الجبري والكيان الترتيبي والكيان التبولوجي. أما أداة المقارنة بين الكيانات الترتيبية فهي التحويلات البنيوية وهي تلك الدوال التي تحافظ على البنية الترتيبية ومن أمثلتها الدوال المتزايدة والدوال المتناقصة. وأخيرا، إن اهتمامات الرياضيات تتمثل في هذه الكيانات الثلاثة وتأليفاتها.

أسئلة:

1. ما المقصود بالكيانات والبنى والتحويلات البنيوية.
2. عرف كلا من الكيانات الجبرية والتبولوجية والترتيبية.
3. ما هو الكيان الجبري البولي.
4. اذكر خمسة أنواع من الكيانات الترتيبية مع تعريفها وذكر مثال لكل نوع.
5. اذكر النبى الرياضية الثلاثة.
6. ما هي أداة التكافؤ التبولوجي .