

العمليات الحسابية :

لقد ظهرت العمليات الحسابية ( الجمع والطرح والضرب والقسمة ) طبيعيا غير مقصود ، وفي أماكن متعددة ، إن العملية ( operation ) كما تعرف حديثا عبارة عن تطبيق ( دالة ) من مجموعة مركبة من حاصل ضرب مجموعتين متساويتين إلى المجموعة نفسها فمثلا ، إذا كانت مجموعة الأعداد الطبيعية  $N$  فإن العملية ( + ) هي تطبيق ، أي أن  $N \times N \rightarrow N$  ، وهكذا في بقية العمليات الحسابية .

**العمليات الحسابية عند البابليين:**

إن ما جاءنا من النصوص والمؤلفات الرياضية البابلية يمكن تصنيفها إلى صنفين :

**الصنف الأول :** الجداول ، كجداول الضرب وجداول معكوس الأعداد وجداول رفع الأعداد إلى القوى المختلفة وجداول جذور الأعداد .

**الصنف الثاني :** يشمل قضايا ومسائل وضعت لتحل بموجب القاعدة الرياضية .

إن استعمال البابليون جداول المقلوبات للقسمة يكونون بذلك قد حولوا عملية القسمة إلى الضرب فلايجاد قيمة الكسر  $\frac{a}{b}$  كحاصل ضرب  $a \times \frac{1}{b} = a \times b^{-1}$  ، حيث أن

a	1	2	3	4	5	6	8	9	10	...
a <sup>-1</sup>	1	30	20	15	12	10	7.30	6.40	6	...

$b^{-1}$  معكوس العدد  $b$  . ويمكن استخراج قيمة  $b^{-1}$  من الجداول ككسر ستيني ،  
واليك جزء من هذه الجداول :

فمثلا :العدد 2 مقلوبه ( معكوسه ) هو  $60 \times \frac{1}{2} = 30$  .

العدد 5 مقلوبها ( معكوسها ) هو  $60 \times \frac{1}{5} = 12$  .

العدد 8 مقلوبها ( معكوسها ) هو  $60 \times \frac{1}{8} = \frac{15}{2} = \frac{14}{2} + \frac{1}{2} = 7\frac{1}{2} = 7.30$  .

العدد 50 مقلوبها ( معكوسها ) هو  $60 \times \frac{1}{50} = \frac{50}{50} + \frac{10}{50} = 1 + \frac{1}{5} = 1\frac{1}{5} = 1.12$  .

مثال 1: احسب قيمة  $\frac{4}{5}$  كما حسبه البابليون القدماء .

الحل:  $\frac{4}{5} = 4 \times \frac{1}{5} = 4 \times 12 = 48$  ، حيث أن 48 تمثل من 60 .

مثال 2: اكتب  $1\frac{4}{5}$  كما كتبه البابليون القدماء .

الحل:  $\frac{4}{5} = 4 \times \frac{1}{5} = 4 \times 12 = 48$  ، حيث أن 48 تمثل من 60 .

$$\therefore 1\frac{4}{5} = 1,48 =$$

كما وجدت جداول تعطي قيمة  $x^3 - x^2$  مما يساعد على حل المعادلة  
 $x^3 - x^2 = m$  ، حيث أن  $m$  معلومة .

n	$n^3 - n^2$
2	4
3	18

4	48
5	100
⋮	⋮

فمثلا حل المعادلة  $x^3 - x^2 = 100$  هو  $x = 5$  من الجدول .

n	$(2)^n$
1	2
2	4
3	8
4	16
⋮	⋮

r	$(16)^r$
1/4	2
1/2	4
3/4	8
1	16
⋮	⋮

وأخيرا ، فقد وجد في إحدى لوحات لوفر (Louvre) حوالي (300 ق.م.) مسألتين ،  
أحدهما تشير إلى مجموعة المتوالية الهندسية كالآتي :

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^9 = 2^9 + 2^9 - 1 ,$$

والمسألة الأخرى تشير إلى مجموع مربعات الأعداد الطبيعية إلى العشرة كما يأتي :

$$1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + \dots + 10 \times 10 = 55 \left( 1 \times \frac{1}{3} + 10 \times \frac{2}{3} \right) = 385 .$$

وبلاحظ أن

$$1 \times 1 + 2 \times 2 + 3 \times 3 + \dots + n \times n = (1 + 2 + \dots + n) \left( 1 \times \frac{1}{3} + n \times \frac{2}{3} \right)$$

$$= \left( \frac{2n+1}{3} \right) \left( \frac{n(n+1)}{2} \right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} .$$

من المسألة الثانية نلاحظ أن البابليين اكتشفوا قانون مجموع المربعات لحد العشرة في الأقل ، ثم جاء بعد ذلك بشكل عام ( أي إلى n ) .

### تقريب الجذور التربيعية عند البابليين :

استعمل البابليون طريقة تقريبية في إيجاد الجذر لعدد معين ليس مربعا كاملا وطريقتهم استعملت من قبل الإغريق وهي كما يأتي :

إذا كان  $n < \sqrt{m}$  ، والمطلوب إيجاد جذر  $m$  ، فإن  $\sqrt{m} < \frac{m}{n}$  ومتوسطها أقرب إلى الحقيقة ، وهكذا يمكن تكرار العملية عدة مرات .

**مثال 1:**  $1 < \sqrt{2} < 2$  .

الحل:

$$m = 2 , n = 1 \Rightarrow 1 < \sqrt{2} < 2 ,$$

بأخذ الوسط الحسابي  $\frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$  نحصل على

$$\frac{m}{n} = \frac{2}{3/2} = \frac{4}{3} \Rightarrow \frac{4}{3} < \sqrt{2} < \frac{3}{2} ,$$

وبأخذ الوسط الحسابي مرة أخرى  $\frac{3/2 + 4/3}{2} = \frac{17}{12}$  نحصل على

$$\frac{m}{n} = \frac{2}{17/12} = \frac{24}{17} \Rightarrow \frac{24}{17} < \sqrt{2} < \frac{17}{12} ,$$

وهكذا ... .

**مثال 2:** أوجد الجذر التربيعي للعدد 17 بطريقة البابليين .

**الحل:**

$$4 < \sqrt{17} ,$$

تم اختيار 4 باعتبارها كتقريب أولي للجذر التربيعي 17 .

$$m = 17 , n = 4 \Rightarrow 4 < \sqrt{17} < \frac{17}{4} ,$$

وبأخذ الجذر التربيعي نحصل على

$$\frac{m}{n} = \frac{17}{33/8} = \frac{136}{33} \Rightarrow \frac{136}{33} < \sqrt{17} < \frac{33}{8} ,$$

كذلك توجد هناك قاعدة في حالة كتابة العدد  $m$  مثلا بالشكل الآتي :  $m = a^2 + b$  ، فإن ناتج الجذر سوف يكون

$$\sqrt{m} = \sqrt{a^2 + b} \cong a + \frac{b}{2a} .$$

فمثلا ، في المثال أعلاه نلاحظ ما يأتي :

$$\sqrt{17} = \sqrt{4^2 + 1} \cong 4 + \frac{1}{8} = 4.125 .$$

### عملية الضرب عند المصريين القدماء:

لم يكن لدى المصريين القدماء جداول مطلقا ، فقد كانوا يبدعون بالتضعيف

المتتالي للضرب بأي عدد ، فهم يحصلون على ضعف العدد ثم على أربعة أمثاله ثم

على ثمانية أمثاله وهكذا...، وبعد ذلك يضيفون الناتج كما يضيفون المضروب :

مثال : جد حاصل ضرب 217 في 13 ، كما كان يستخدمه المصريين القدماء:

الحل:

√	1	217
	2	434
√	4	868
	8	1736
	16	3472
√	32	6944
	37	8029
المجموع		

للعدد

النتيجة هو 2821 ، وقد حذف الرقم المقابل

$$2 \text{ لأن } 13 = 8+4+1 .$$

مثال : جد حاصل ضرب 217 في 37 ، بطريقة التضعيف المتتالي :

الحل:

√	1	217
	2	4056
√	4	579
√	8	82
المجموع	13	2821

يمكن

نلاحظ أن أي عدد صحيح موجب  $n$

كتابته بالشكل الآتي :

$$n = a_0 \times 2^0 + a_1 \times 2^1 + \dots + a_r \times 2^r ,$$

حيث أن  $a$  إما صفر أو واحد .

المصريين

	7	1
√	14	2
√	28	4
√	56	8
√	112	16
<b>المجموع</b>	<b>210</b>	<b>30</b>

قدماء المصريين

بطريقة تجريبية

عملية القسمة عند

القدماء:

كانت عملية القسمة عند

أكثر سذاجة وبدائية ، وذلك

ومعاكسة للضرب ألتضعيفي المتتالي السابق .

مثال : جد ناتج قسمة 77 على 7 ، كما وجدت عند المصريين القدماء :

الحل:

الناتج هو 11 ، وقد حذف الرقم المقابل للعدد 28 لأن  $56+14+7 = 77$  .

مثال : جد ناتج قسمة 210 على 7 ، كما وجدت عند المصريين القدماء :

**H.W.:** الحل:

√	7	1
√	14	2
	28	4
√	56	8
<b>المجموع</b>	<b>77</b>	<b>11</b>

ملاحظة : نتوقف في حالة الضعف أكبر من الرقم المطلوب إيجاد قسمته :

### الكسور عند المصريين القدماء:

استعمل المصريون القدماء كسرين تكمليين هما  $\frac{2}{3}$  و  $\frac{3}{4}$  ، وكان استعمالهم

للكسر الثاني نادرا ، أما الكسر الأول ( جزآن ) بمعنى تلتين ، فكان استعماله

شائعا ، وقد وردت قاعدة الضرب في الآثار المصرية في الكسر  $\frac{2}{3}$  .

أ . إذا كان المقام عددا زوجيا يضاف إليه نصف المقام ، أي أن :

$$\frac{1}{3n} = \frac{1}{2n} \times \frac{2}{3} , n \in \mathbb{Z} - \{0\}.$$

ب . إذا كان المقام عددا فرديا يضاف إلى مقامه مرة وبضرب في 6 مرة أخرى،

أي أن :

$$\frac{1}{2(2n+1)} + \frac{1}{6(2n+1)} = \frac{1}{2n+1} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) = \frac{1}{2n+1} \times \frac{2}{3} , n \in \mathbb{Z}.$$

ملاحظة : كانت الكسور عند المصريين القدماء ببسوط هي الوحدة الواحدة .

مثال : اكتب الكسور كما كان يكتبه المصريون القدماء نسبة إلى الكسر

التكميلي:

$$1. \frac{1}{4}$$

$$2. \frac{1}{5}$$



	1	$\frac{2}{3} + \frac{1}{30}$
√	2	$1\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$
	4	$2\frac{2}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$
√	8	$5\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15}$
<b>المجموع</b>	<b>10</b>	<b>7</b>

$$.3 \frac{10}{150}$$

مسائل حسابية في بردية رايند

المصرية:

لقد وردت العديد من المسال اللطيفة في بردية رايند من نوع التقسيم المناسب

وغيرها ، ومن هذه المسائل :

المسألة الرابعة: قسم سبعة أرغفة على عشرة رجال بحيث يأخذ كل رجل

$$\cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{30}$$

الحل:

$$\therefore \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{30}\right) \times 10 = 7$$

إن طريقة الضرب ألتضعيفي تمكننا من معرفة حصة أي عدد من العشرة رجال من الأربعة ونلاحظ أن هذه المسألة لا تدل على طلب الحل والنتائج بل على تحقيقه.

**المسألة الأربعةون :** تقسيم مئة رغيف على خمسة رجال على خمسة رجال

$23 \times 1\frac{2}{3}$	$38\frac{1}{3}$
--------------------------	-----------------

بحيث تكون

الأنصبة الموزعة متوالية حسابية وبحيث

يكون سبع مجموع الأنصبة الثلاثة الكبرى مساويا لمجموع النصيبين الأصغرين ، ما هو الفرق بين الأنصبة.

**الحل:** أولا نجعل الفرق بين الأنصبة  $5\frac{1}{2}$  فتكون الكميات التي يأخذها الخمسة هي :

$$1 + 6\frac{1}{2} + 12 + 17\frac{1}{2} + 23 = 60$$

$$\cdot (1 + 6\frac{1}{2}) = \frac{1}{7}(12 + 17\frac{1}{2} + 23) = \frac{15}{2} \text{ نلاحظ أن}$$

لتضعيف العدد 60 ليصبح 100 نضاعف هذه الأرقام للوصول إلى المجموعات الحقيقية

1	60
$\frac{2}{3}$	40

المجموع  $1\frac{2}{3}$  مرة 60 تصبح 100 .

∴ سوف نضرب كل نصيب من الأنصبة الخمسة بـ  $1\frac{2}{3}$  .

$17\frac{1}{2} \times 1\frac{2}{3}$	$29\frac{1}{6}$
$12 \times 1\frac{2}{3}$	20
$6\frac{1}{2} \times 1\frac{2}{3}$	$10\frac{2}{3} + \frac{1}{6}$
$1 \times 1\frac{2}{3}$	$1\frac{2}{3}$
100	المجموع 60

مسألة: كمية وخمسها يضافان معا فيصبحان 34 ، فما هي الكمية ؟

الحل: نفرض الكمية هي 5 ، اذا خمسها يساوي 1 ، اذا المجموع  $5 + 1 = 6$  .

ولما كان العدد 6 فيجب أن يضعف بنسبة  $5\frac{2}{3}$  ليصبح 34، اذا لا بد من

$$\text{تضعيف } 5 \text{ بنسبة } 5\frac{2}{3} \cdot \text{ أي أن } 5 \times 5\frac{2}{3} = 28\frac{1}{3} .$$