جامعة الموصل قسم الرياضيات
كلية علوم الحاسوب والرياضيات المرحلة الثانية

الحساب عند الإغريق :

إن الصورة الأولى للرياضيات عند الإغريق تدعو إلى الدهشة من حقيقتين متكاملتين (أو متناقضتين بكلمة أخرى) هما : إهمال الحساب البسيط والعمل النادر في التفكير الرياضي . إذ أنهم لم يعتنوا بالعمليات الحسابية العادية في حين كانت آراؤهم الهندسية التي تعتمد إلى حد كبير على خصائص الأعداد وهذا ما جعل العمليات الحسابية عندهم معقدة.

اتجه الإغريق بالحساب اتجاها تجريديا فقد عرفوا الوحدة وعرفوا العدد كمجموع وحدات (الفيلسوف اليوناني طاليس) . واعتبر الفيثاغوريون أن العدد يبدأ بالواحد (الوحدة) وبتجميع الوحدات بعضها إلى بعض وحدة وحدة تزيد الأعداد ، كما أن التناقص ينتهي بالوحدة مرة ثانية. ثم عرفوا الأعداد التامة (perfect numbers) وهي الأعداد التي تساوي مجموع قواسيمها مثلا ($1+ 2+ 3 = 6$) و ($1+ 2+ 4+ 7+ 14 = 28$) . أما الأعداد الزائدة (over perfect numbers) وهي الأعداد التي مجموع قواسيمها تزيد عنها مثلا ($1+ 2+ 3+ 4+ 6 > 12$). وأما الأعداد الناقصة (defective numbers) هي الأعداد التي مجموع قواسيمها تنقص عنها مثلا ($1+ 2+ 4 < 8$) .

تعريف الأعداد المتحابة : يقال للعدديين a و b أنهما متحابان إذا كان a يساوي مجموع قواسم b و b يساوي مجموع قواسم a مثلا العددان 220 و 284 .

وأخيرا فقد أعطى الإغريق القاعدة الآتية للأعداد التامة موضحة في الجدول أدناه :

مثال1 : ما هي قواسم الأعداد الآتية 100 ، 496 ، 64 ، وما نوع كل منها ؟

الحل:

مجموع قواسم العدد 100 هي $1+2+4+5+10+20+25+50=117$.

إذا العدد 100 عدد فوق التام .

مجموع قواسم العدد 496 هي $1+2+4+8+16+31+62+124+248=496$.

إذا العدد 496 عدد تام .

مجموع قواسم العدد 64 هي $1+2+4+8+16+32=63$.

إذا العدد 64 هو عدد دون التام .

مثال2 : برهن أن صيغة العدد التام هي $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ ، حيث أن $n>1$.

الحل :

إن عوامل العدد $2^{n-1} \times (2^n - 1)$ تتكون من مجموعتين ، أي أن قواسم m تشكل مجموعتين :

المجموعة الأولى :

$$set_1 = \{1, 2, 2^2, \ \ldots\ , 2^{n-1}\}$$

وهي متتالية هندسية حدها الأول 1 وأساسها 2 .

المجموعة الثانية :

n	2^{n-1}	$2^n - 1$	العدد التام
2	2	3	6
3	4	7	28
5	16	31	496
7	64	127	8128

$$\text{set}_2 = \{(2^n-1),\ 2(2^n-1), 2^2(2^n-1),\ \ \ldots\ ,\ 2^{n-2}(2^n-1)\}$$
$$= (2^n-1)\{1,\ 2, 2^2,\ \ \ldots\ ,\ 2^{n-1}\}$$

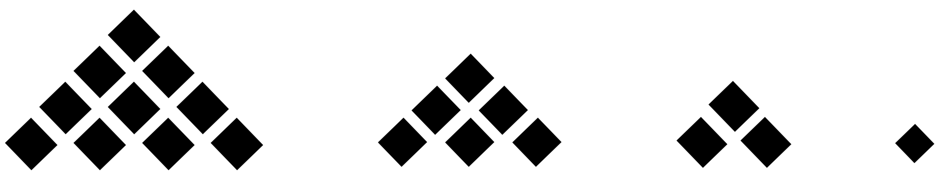
$$\text{Sum}(\text{set}_1) = \frac{1-2^n}{1-2} = 2^n - 1$$
$$\text{Sum}(\text{set}_2) = \frac{(2^n-1)(1-2^{n-1})}{1-2} = (2^n-1)(2^{n-1}-1)$$

إذا مجموع قواسم العدد m هي

$$(2^n-1)+(2^n-1)(2^{n-1}-1) = (2^n-1)+(1+2^{n-1}-1) = 2^{n-1}(2^n-1)$$

الأعداد المصورة عند الفيثاغوريين :

قام الفيثاغوريين بتمثيل الأعداد كصور مثلا النقطة تمثل واحد ، والنقطتان تمثلان اثنان وكذلك المستقيم الواصل بينهما ، ثلاثة نقاط تمثل ثلاثة وكذلك تمثل المستوي المحاط بثلاث مستقيمات ، أما أربع نقاط أحدهم خارج مستوي النقاط الثلاثة الأخرى فتمثل الرقم أربعة وكذلك أول مجسم محاط بخطوط . إن فيثاغورس اكتشف أن مجموع أي عدد من الحدود المتتالية من متسلسلة الأعداد الطبيعية 1 ،2 ،3، ..... ابتداءا بالواحد يشكل عددا مثلثيا كما موضح أدناه:



10 6 3 1

لهذا فأن $1+2+3+\ \ldots\ +n = \frac{1}{2}n(n+1)$ هو عدد مثلثي بضلع n .

الأعداد الفيثاغورية :

وضع فيثاغورس صيغة للأعداد سميت فيما بعد باسمه (الأعداد الفيثاغورية) وهي الأعداد التي تشكل أضلاع مثلث قائم الزاوية أطوال أضلاعه أعداد صحيحة والصيغة التي وضعها فيثاغورس هي : فإذا كان m أي عدد فردي فأن

$\frac{m^2+1}{2}$	$\frac{m^2-1}{2}$	m
5	4	3
3	12	5
25	24	7
41	40	9
61	60	11

$$\left(\frac{m^2+1}{2}\right)^2=\left(\frac{m^2-1}{2}\right)^2+m^2$$

وهناك صيغة أخرى إلى أفلاطون وهي $(m^2+1)^2=(m^2-1)^2+(2m)^2$، إذ يمكن بسهولة ملاحظة أن صيغة أفلاطون هي نفس صيغة فيثاغورس بعد ضرب الطرفين في 2^2 ، وكلا من الصيغتين تعطي متطابقة .

نلاحظ أن الوتر دائما اكبر من الضلع الأكبر بواحد (دائما صحيحة) .

مثال1 : بين أنه مجموع أي عددين مثلثين متتاليين يظهر لدينا مربع .

الحل :

$$\Delta_n=\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\Delta_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\Delta_n + \Delta_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(2n+2)}{2} = (n+1)^2 \; .$$

مثال2 : بين أنه مجموع الأعداد الفردية المتتالية يظهر لدينا مربع .

الحل :

$$1+3+5+ \dots +(2h-1).$$

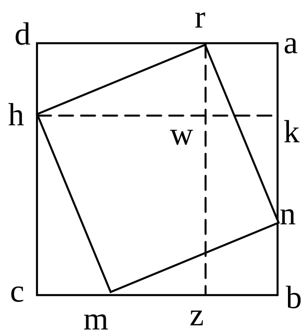
متتالية حسابية حدها الأول 1 وأساسها 2 وحدها الأخير 2h-1 .

$$\sum_{i=1}^{h}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{h} i - \sum_{i=1}^{h} 1 = 2\,\frac{h(h+1)}{2} - h = h^2 + h - h \; .$$

مثال 3: بين من صيغة فيثاغورس أن الوتر يزيد على الضلع القائم بواحد.(واجب)

نظرية فيثاغورس : مربع الوتر يساوي مجموع مربع الضلعين القائمين.

البرهان: أخذ العالم فيثاغورس مربعين مختلفين ووضع الصغير منهما داخل الكبير ورؤوس الصغير على أضلاع الكبير كالمربعين(a b c d) ، (r n m h) فتكون



مساحة المربع (a b c d) = مساحة المربع(r n m h) + مساحة أربع المثلثات (a n r) ، (n b m) ، (m c h) ، (c d r)

مساحة المربعين (a k w r) ، (w z c h) +مساحة المستطيلين (r w h d)،(k b z w) = مساحة المربع (r n m h) + مساحة أربع المثلثات (a n r) ، (n b m) ، (m c h) ، (h d r)

بما أن مساحة المستطيلين (r w h d)،(k b z w) = مساحة أربع المثلثات (a n r) ، (n b m) ، (m c h) ، (h d r)

وبما أن مساحة المربع(r n m h)= مساحة المربع (a k w r) + مساحة المربع (w z c h).

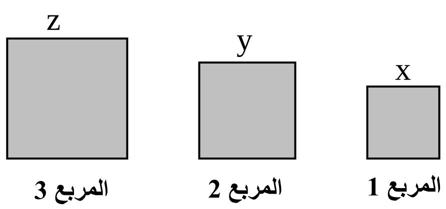
أذا مربع الضلع (r h) = مربع الضلع (r w) + مربع الضلع (w h).

و هو المطلوب.

التحقق من نظرية فيثاغورس

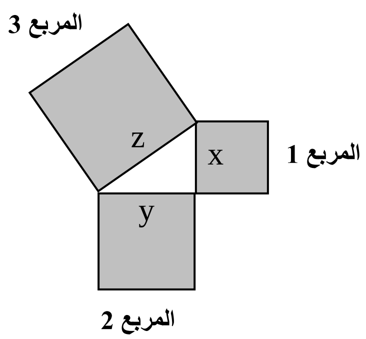
أبسط طريقة للتحقق من ***نظرية فيثاغورس*** (مربع الوتر لمثلث قائم الزاوية يساوي مجموع مربع الضلعين الآخرين) هي:

نأخذ ثلاث مربعات بحيث أطول الأضلاع في كل مربع هي x و y و z على التوالي ، كما موضح في الشكل 1:



الشكل 1

بعد ذلك نقوم بترتيب المربعات الثلاثة بحيث يشكل بينهم مثلث قائم الزاوية كما موضح في الشكل 2:



الشكل 2

فإذا قمنا بحساب مساحة كل مربع من المربعات الثلاثة لوجدنا أن قيمة مربع الوتر (**مساحة المربع 3)** يساوي مجموع قيمتي مربع الضلعين الآخرين (**مساحة المربع 1 + مساحة المربع 2)**. أي أن

$$x^2 + y^2 = z^2 .$$

وبذلك نكون قد تحققنا من نظرية فيثاغورس بالاعتماد على مساحة المربع.