

الحساب و تاريخه

تطور طائق العد

يمكن تلخيص تطور طائق العد بأربعة مراحل وكالاتي:

1. في البداية كانت مرحلة وصف المجموعة ككل ، هل كثيرة ، كثيرة جدا أو قليلة ، قليلة جدا ، إذ كانت الفكرة تخمينية .
2. مرحلة الوصف الأدق أي بمعرفة الأغنام مثلا فردا فردا .
3. مرحلة المطابقة بين الشيء ونظيره وهي أكثر دقة مثلا هناك بعض القبائل يحملون أكياسا من الحصى يطابق ما عنده من الخيل .
4. مرحلة التجريد في الحساب وإدراك فكرة العد مجردة ، إذ أن وحدانية الرب ووحدانية الشمس ووحدانية النفس ووحدانية القمر أعطت كلها الرقم واحد ، أي أنها منفردة ، كما أعطيت فكرة الازدواج من العينين والمنحرفين والأذنين واليدين والقدمين ، وهكذا بقية الأعداد الثلاثة والأربعة والخمسة و.....

ملاحظة: للمزيد من المعلومات راجع كتاب موجز تاريخ الرياضيات

المجموعات العددية الأساسية :

المجموعة الأساسية للأساس العد a مثلا هي تلك المجموعات التي عناصرها تتكون من $0, 1, 2, \dots, a-1$. فمثلا المجموعة الأساسية للأساس العد إن كان 2 تتكون من $0, 1$ ، والمجموعة الأساسية للأساس العد إن كان 5 تتكون من $0, 1, 2, 3, 4$. إن العدد 60 هو أكبر عدد أساسي معروف ، فقد وجد في النظام الستيني البابلي ، ولا نزال نستعمل هذا النظام عند قياسنا للوقت والزوايا بالدقائق والثوانی .

التعبير عن الأعداد بدلالة الأساس :

إن كان أساس العد b فأي عدد m يمكن بالشكل التالي :

$$m = a_n \times b^n + a_{n-1} \times b^{n-1} + \dots + a_1 \times b + a_0 ,$$

حيث أن :

$$a_r \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\} , r=0, 1, 2, \dots, n .$$

العدد

مثال 1: (أ) اكتب

4056 للأساس 7 .

رتبة الباقي	الباقي	العدد	الأساس
On 7	4056		
On 7	579	3	0
On 7	82	5	1
On 7	11	5	2
On 7	1	4	3
0	1		4

الحل:

$$a_0 = 3 , a_1 = 5 , a_2 = 5 , a_3 = 4 , a_4 = 1$$

$$4056 = 1 \times 7^4 + 4 \times 7^3 + 5 \times 7^2 + 5 \times 7^1 + 3 \times 7^0 .$$

$$\therefore (4056)_{10} = (14553)_7 .$$

ملاحظة:

$$(4056)_{10} = 4 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 5 \times 10^1 + 6 \times 10^0$$

$$= 4000 + 0 + 50 + 6 = 4056 .$$

(ب) اكتب العدد

رتبة الأساس	العدد	الباقي	رتبة الباقي	العدد	الباقي	رتبة الأساس
On 60	4056					. 60
On 60	67	36		0		
On 60	1	7		1		
On 60	0	1		2		

الحل:

$$a_0 = 36, a_1 = 7, a_2 = 1$$

$$4056 = 1 \times (60)^2 + 7 \times (60)^1 + 36 .$$

$$\therefore (4056)_{10} = (1, 7, 36)_{60} .$$

قد تم وضع فارزة عند كتابة العدد 4056 لأساس 60 وذلك لأن الباقي يزيد عن العشرة .

مثال 2: (أ). اكتب العدد 453

رتبة الأساس	العدد	الباقي	رتبة الباقي	العدد	الباقي	رتبة الأساس
-------------	-------	--------	-------------	-------	--------	-------------

لأساس 5 . (تمرين)

$$\text{On 2 } 453$$

$$\text{On 2 } 226 \quad 1 \quad 0$$

$$\text{On 2 } 113 \quad 0 \quad 1$$

(ب). اكتب العدد 453

لأساس 2 (حيث أن 2 أصغر

مجموعة أساسية عند الصينيين) .

On 2	56	1	2	الحل:
On 2	28	0	3	
On 2	14	0	4	
On 2	7	0	5	
On 2	3	1	6	
On 2	1	1	7	
On 2	0	1	8	

$$a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 0, a_6 = 1, a_7 = 1, a_8 = 1$$

$$453 = 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1.$$

$$\therefore (453)_{10} = (111000101)_2.$$

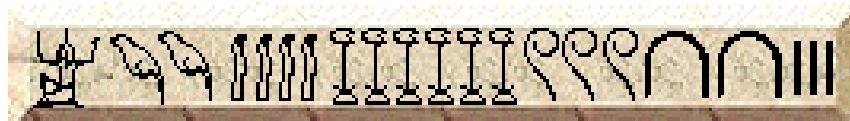
العد عند قدماء المصريين :

يرجع تاريخ استخدام الأعداد المصرية القديمة التي كتبت بالخط الهيروغليفى إلى سنة (3400 ق.م.) وكانت لهم رموز لـ الأعداد 1 ، 10 ، 100 ، 1000 ، 10000 ، 100000 ، 1000000 ، أي أن الأساس العددي عندهم كان عشرة . إن النظام الذي استخدموه في كتابة الأعداد هو نظام التجميع البسيط ويقوم على طريقة تكرار الرمز عددا من المرات لا يزيد على تسعه ، ولم يكن لديهم رمز للصفر ، كما أن نظامهم العددي لم يكن يعتمد على فكرة القيمة المكانية (آحاد - عشرات . . . الخ) وفيما يلي الرموز التي كانت تستعمل عندهم .

العدد	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	رموز

الجدول (1): الأعداد الهيروغليفية (المصرية القديمة).

لذا فإن العدد العشري 1,246,323 يكتب في النظام الهيروغليفي على النحو الآتي:



مثال 1: اكتب الرقم 13546 كما كتبه المصريون القدماء باستخدام نظام

1	10	11	100	1000	10000
---	----	----	-----	------	-------	------

ت < < ت ت ٠ < ت ٠ < < ت ٠

التجميع البسيط (system of simple grouping).

العد عند قدماء العراقين (السومريين والبابليين):

لقد جاء نظام العد السومري خليطاً من النظامين العشري والستيني ، إذ أن السومريين بدعوا بالنظام العشري ثم أدركوا بعد فترة قليلة أن الأساس الستيني أصلح لأداء العمليات الحسابية . كان يكتب عندهم النظام العشري الرموز الآتية :

الجدول(2): الأعداد في النظام العشري عند السومريين والبابليين

إذ لم يكن هناك سوى علامتين وهما ($\overline{1}$) للواحد والعلامة ($\overline{0}$) للعشرة ، إضافة إلى العلامة ($\overline{0}$) التي استخدمت في حالة واحدة وهي التعبير عن الرقم (100) أو قوى العشرة التي تليها . كما أنهم أدركوا نظام الترقيم الموقعي (local) value system وهو النظام الذي نتبعه الآن ونقصد به نفس الرمز وهو 4 مثلاً الآحاد دل على

الأساس	العدد	الباقي	رتبة	قيمة تختلف عما
On	319940	باقي	العشرات أو	534 ، 543

عليه إذا وضع في المئات فالأعداد 453 تختلف فيما رغم أننا استخدام وهي 3 ، 4 ، 5 ، غير أن تغيير الموضع هو الذي غير قيمة العدد . كما استخدمو رمزاً للطرح وهو ($\overline{0}$) فمثلاً :

$$19 = 20 - 1 =$$

ملاحظة: يكتب الرقم الذي يقل عن (60) حسب نظام التجميع البسيط وبالأساس العشري ، ويكتب الرقم الذي يزيد على (60) حسب النظام الموقعي للترقيم وبالأساس . (60)

مثال 2: اكتب العددين 35 و 319940 كما كتبه العراقيين القدماء .

الحل:

$$35 =$$

60			
On	5332	20	0
60			
On	88	52	1
60			
On	1	28	2
60			
On	0	1	3
60			

$$a_0 = 20, a_1 = 52, a_2 = 28, a_3 = 1$$

$$319940 = 1 \times (60)^3 + 28 \times (60)^2 + 52 \times (60)^1 + 20 .$$

وأخيرا ، إن الرياضيين البابليين كانوا يستعملون الصفر (300 ق.م.) ، حيث وردت في أثارهم علامة B أو الرمز Σ ، وبهذا يكون البابليين لهم السبق في اختراع هذا الرمز المهم والظاهر أنه انتقل بعد ذلك إلى الهندوين الذين وضعوا له رمزا خاصا وهو O (دائرة) أو . (نقطة) وسموه sunya أي الفراغ أو الخالي ثم انتقلت الكلمة إلى أوروبا إلى كلمة سايفر (cipher) وكلمة زورو (zero) ، إذ أن الصفر ضروري في نظام الترقيم الموقعي .

العد عند الإغريق (اليوناني):

لقد استفاد الإغريق كثيرا من الحضارات التي سبقتهم كالسومرية والبابلية والمصرية القديمة والهندية، كما استفادوا كثيرا من الفينيقين الذين استعملوا في الألف

الأولى قبل الميلاد الحروف العددية، فتعلم الإغريق من الفينيقيين الكتابة - ولم يكونوا يعرفونها - وأخذوا عنهم حروفهم واستعملوها مدة طويلة في كتابتهم.

وقد اعتمد الإغريق والرومان النظام العشري في العد ، وهم يكتبون أرقامهم من اليسار إلى اليمين، وثمة تقارب بين الأرقام الإغريقية والرومانية، انظر الشكل في أدناه:

العدد	1	5	10	50	100	500	1000	5000	10000
رمزه	I	Γ	Δ	Η	Η	Η	X	Ϛ	M

الجدول(3): نظام الأعداد الإغريقي.

ويلاحظ أن الفئة الخمسية وهي (50 ، 500 ، 5000 ، 50000) جمع فيها على التوالي - بين الخمسة والعشرة، والخمسة والمئة، والخمسة والألف، والخمسة والعشرة آلاف.

لقد استعمل الأيونيون - وهم قبيلة من الإغريق - حروفهم للتعبير عن الأرقام، وميزوا بين الحرف والرقم بوضع إشارة أعلى الرقم. واستعمل الإغريق (وكذلك العبريون والعرب قديما) حروفهم الهجائية في تمثيل الأعداد. وتوضيحا للنظام الإغريقي نستخدم الحروف α (إلفا)، β (بيتا)، γ (أيota)، κ (كبا) حيث تدل على الأعداد: واحد، اثنين..... عشرة، عشرين على الترتيب. وبينما تدل $\beta\alpha$ على عشرة واثنان أي 12 فإنه لم يكن ممكنا تباديلهما كما هو الشأن في الرموز (عشرة واثنان) إذ نستطيع الآن تبديل رقمي 12 إلى 21 لدلالة على واحد وعشرين. أما الحالية: إذ نستطيع الآن تبديل رقمي 12 إلى 21 لدلالة على واحد وعشرين. أما عند الإغريق فإن 21 يدل عليهما الرمز $\kappa\alpha$. وقد ترتب على عدم وصول الإغريق إلى فكرة القيمة المكانية إن استخدمو جميع الحروف الهجائية الأربع والعشرين فضلا عن ثلاثة رموز أخرى في كتابة الأعداد الأساسية الأخرى هي: Γ (كاماما) للدلالة على خمسة، H (ایتا) للدلالة على 100، X (خى) للدلالة على 1000. ولكتابه أي عدد كانت تتكرر هذه الأرقام باستخدام طريقة التجميع كما فعل

المصريون القدماء. وبمرور الوقت توصل اليونانيون إلى طريقة تسمح لهم باختصار الرموز تسمى (بالطريقة الضريبية) في كتابة الأرقام: مثلا H تعني خمسةائة . ويلاحظ أن هذه الطريقة لا تستعمل إلا للتعبير عن عدد يساوي حاصل ضرب رقم خمسة.

مثال 3: اكتب الرقم 1837 كما كتبه الإغريق .

العد عند الرومان:

استخدم الرومان الأرقام الرومانية التي لا تزال تستخدم في الوقت الحاضر في بعض المجالات، كما استخدمو الترميز كمبدأ الطرح وهو أن نطرح الوحدة الصغرى إذا سبقت وحدة أعلى منها انظر الشكل أدناه :

العدد	رموزه
9	IX
8	VIII
7	VII
6	VI
5	V
4	IV
3	III
2	II
1	I

العدد	رموزه
90	XC
80	LXXX
70	LXX
60	LX
50	L
40	XL
30	XXX
20	XX
10	X

العدد	رموزه
2000	MM
1000	M
900	CM
500	D
400	CD
300	CCC
200	CC
100	C

الجدول(4): نظام الأعداد الرومانية.

فالعدد 666 يكتب DCLXVI والعدد 1952 يكتب MCMLII والعدد 487 يكتب CDLXXXVII . ويلاحظ أن كتابة هذه الأعداد طويلة وتقود إلى الخطأ، كما أن كتابة عدد كبير باستخدامها سيتكون من عدد ضخم من الرسوم.

مثال : اكتب الرقمين 1824 و 3683 كما كتبه الرومان

$$1824 = M\ DCCC\ XX\ IV$$

$$3683 = MMM\ DC\ LXXX\ III$$

مثال : اكتب الرقمين 4281 و 3863 كما كتبه الإغريق و الرومان . (تمرين)

الكسور عند البابليين :

لقد قام البابليون بكتابة الكسور بهيئة أعداد هي أجزاء من الستين فمثلاً يمثل عندهم $\frac{1}{3}$ ، $\frac{1}{2}$ ، $\frac{20}{60} = \frac{1}{3}$. إضافة إلى استعمالهم إلى 30 وإلى 30×60 وكذلك $(60 \times 30)^2$ فهو بصورة عامة يعني $30 \times (60)^z$ حيث أن z هو أي عدد صحيح (موجب ، صفر ، سالب).

مثال 1: الرمز هذا $(1\frac{20}{60} = 1\frac{1}{3})$ يمثل

مثال 2: اكتب $1\frac{9}{16}$ كما كتبه البابليون .

الحل :

$$\begin{aligned}
 \frac{9}{16} &= \frac{8}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{30}{60} + \frac{\frac{15}{4}}{\frac{15}{4} \times 16} = \frac{30}{60} + \frac{\frac{12}{4} + \frac{3}{4}}{60} \\
 &= \frac{30}{60} + \frac{3}{60} + \frac{3}{60} = \frac{33}{60} + \frac{60 \times \frac{3}{4}}{(60)^2} = \frac{33}{60} + \frac{45}{(60)^2} .
 \end{aligned}$$

$$\therefore 1\frac{9}{16} = 1 \frac{33}{60} + \frac{45}{(60)^2} = 1, 33, 45 =$$

ملاحظة : الجدول أدناه يبين الترقيم بالنسبة لكل من الترقيم الهندي والترقيم الغباري والترقيم العربي وأخيراً الترقيم البرهمي :

الجدول (5)

إن اسم الأرقام الغبارية أو الرملية مشتق من العادة الهندية في إجراء الحساب

هنديّة

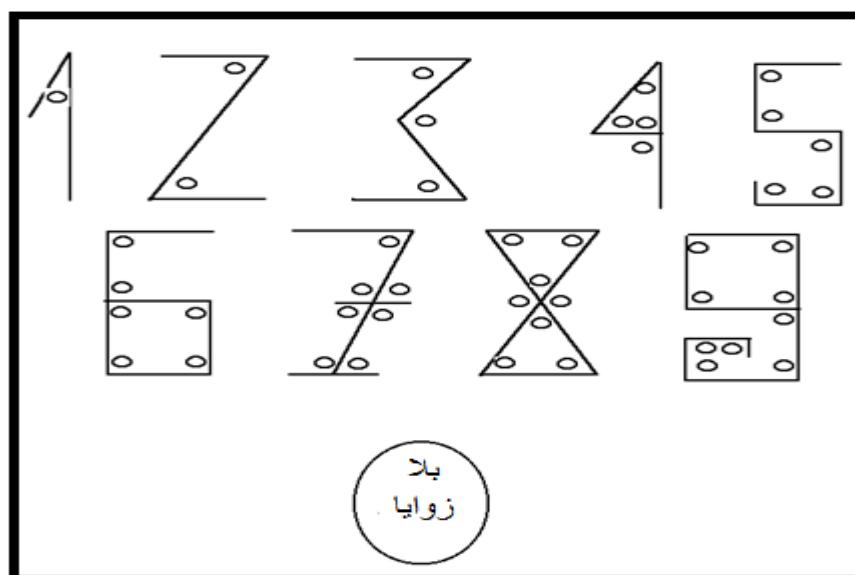
على الأرض أو على لوح مغطى بالرمل .

الأنظمة العددية :

إن العرب كانوا كثيри الترحال والتنقل فكانوا في تلك المرحلة ناقلي البضائع من جهة والحضارة من جهة أخرى. فقد نقلوا الحضارة الهندية إلى المشرق العربي، ثم انتقلت إلى بلاد المغرب العربي والأندلس، ومن هناك انتقلت الحضارة إلى بلاد الغرب.

لقد ظهر الصفر أولاً في الهند، إلا أن الهند لم يفيدوا منه كثيراً ولم يطوروا استخدامه حتى أخذ العرب المسلمون منهم ذلك وطوروه واختصروا الرموز المختلفة للترقيم التي تدل على الأعداد من 1 إلى 9 ولخصوها بسلسلتين: السلسة الأولى سميت الأرقام الهندية-العربية والمستخدمة حالياً في بلاد المشرق العربي، والسلسة الثانية أطلقوا عليها تسمية الأرقام الغبارية، إذ كانت أكثر تداولاً بين التجار.

لقد ظهرت الأرقام الغبارية في بلاد المغرب العربي وانتقلت من هناك إلى الأندلس ومن ثم إلى أوروبا، وقد أطلق الأوروبيون على الأرقام الغبارية تسمية الأرقام العربية. وكما هو معروف فإن الأرقام الغبارية تقوم في أساسها على الزوايا ، كما مبين في الشكل الآتي.



الشكل: الأرقام الغبارية.

إن الأرقام الغبارية، كانت تسمى في المخطوطات القديمة "الأحرف الغبارية"، وللقلصادي كتاب يسمى "كشف الستار عن حروف علم الغبار". والغبارية ليست نسبة إلى الغبار كما هو شائع، وغبر بمعنى بقي (كما جاء في شرحه لمنظومة محمد بن غازي العثماني المكناسي (858-919هـ / 1456-1513م) في **منية الحساب**). ومن هذه المنظومة يمكن أن نستنتج تفسيراً لسبب تسمية هذه الأرقام بالغبارية من اثنا عشر اسماء للأعداد (واحد - اثنان - ثلاثة - أربعة - خمسة - ستة - سبعة - ثمانية - تسعه - عشرة - مائة - ألف) يتراكب ما غبر أي ما بقي من الأسماء: فاسم العدد 203 يتراكب من الاسم مائة والاسم ثلاثة، وهذه ميزة تتميز بها الأرقام الغبارية عن حساب الجمل الذي ليست للأعداد فيه أسماء محددة.