المحاضرة الثانية عشر: الحساب عند الإغريق والعرب   التاريخ : 25/ 4/ 2019
اسم التدريسي : م.د.احمد انتصار غثيث
أ.م.د.احمد محمد علي

جامعة الموصل   قسم الرياضيات
كلية علوم الحاسوب والرياضيات   المرحلة الثانية

الأعداد غير القياسية (اللانسبية):

وهي الأعداد التي لا يمكن كتابتها بصيغة نسبية $\{\frac{a}{b}\ ,\ a\ ,\ b\in Z\ ,\ b\neq 0\}$. مثل $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، ... .

مثال 1 : برهن أن $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي .

الحل: نفرض أن $\sqrt{2}$ هو عدد نسبي ، أي أن $\sqrt{2}=\frac{a}{b}\ ,\ a\ ,\ b\in Z\ ,\ b\neq 0$ ، حيث أنه لا يوجد قاسم مشترك بين a و b (أي أن القاسم المشترك الأعظم بينهما هو الواحد).

إذا $a^2=2b^2$ ، وبذلك يكون a^2 عدد زوجي وهذا يودي إلى أن a عدد زوجي أيضا وبالتام فأن b عدد فردي .

بما أن a عدد زوجي ، نفرض أن $a=2m$ حيث أن $m\in Z$ نعوض هذا في $a^2=2b^2$ نحصل على $4m^2=2b^2$ وهذا يودي إلى أن $2m^2=b^2$.

إذا b^2 هو عدد زوجي وهذا يودي إلى أن b هو عدد زوجي وهذا تناقض (لأن لا يمكن أن يكون هناك عدد زوجي وفردي في آن واحد) .

إذا لا يوجد عددان صحيحان مثل a و b بحيث $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$. إذا $\sqrt{2}$ هو عدد غير نسبي .

الحساب عند العرب :

1. طور العرب الترقيم ونقلوا الأرقام الهندية – العربية إلى العالم كما أضافوا الصفر وكانوا أول من استعمل الصفر مع الترقيم العشري ألموقعي.

2. اخترعوا الكسور العشرية فقد حسب العالم غياث الدين الكاشي النسبة الثابتة ط(π) (بين محيط الدائرة وقطرها) صحيحة لستة عشر رقما عشريا $2\pi=6{,}283185071795865$ ، اذ لم يسبق احد الى ايجاد هذه النسبة بهذه

الدقة ومن هذا تبين أن $\pi = 3{,}141592359879325$ ، وكذلك أوجد الكاشي في كتابه (مفتاح الحساب) إضافة إلى الكسور العشرية قانون لإيجاد مجموع الأعداد الطبيعية المرفوعة للقوى الرابعة .

$$\sum i^4 = \left[\frac{1}{5}\left(\sum i - 1\right)\right) + \sum i \left]\sum i^2 .$$

ملاحظة:

- $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.

3. طوروا العمليات الحسابية ففي الجمع أوجدوا سطرا خاصا للمحفوظات ، وفي الضرب بالعدد 25 كانوا يأخذون ربع العدد بعد ضربه بمائة وكذلك استعملوا طرق عديدة ومختلفة في الضرب.

جمع الأعداد	
3772 54876 3405	
1211	المحفوظات

المحاضرة الثانية عشر: الحساب عند الإغريق والعرب   التاريخ : 25/ 4/ 2019

اسم التدريسي : م.د.احمد انتصار غثيث

أ.م.د.احمد محمد علي

مثال 1:

62053	المجموع

3

5

2

0

235 × 47 = 11045 42	3	5
4	1	5
8	2	0

4. لقد عرف أبو بكر الكرخي الجذر ألتربيعي بأنه ذلك العدد الذي نسبة الواحد إليه كنسبة إلى المطلوب جذره. أي أنه إذا كان $\sqrt{m}=a$ فأن $\frac{1}{a}=\frac{a}{\sqrt{m}}$. ويشير إلى أنه منطق (نسبي) مثل جذر 4 أو غير منطق (غير نسبي) مثل جذر 130 ، وبذكر شرطين لا بد من توفرهما في كل مربع :

أولا : رقم الآحاد يجب أن يكون أحد الأرقام الآتية : 0 ، 1 ، 4 ، 5 ، 6 ، 9 . فالعدد الذي آحاده 3 أو 7 لا يمكن أن يكون مربعا كاملا .

ثانيا : بعد طرح التسعة أو مضاعفاتها من مجموع أرقام العدد يجب أن يكون الناتج أحد الأرقام 0 ، 1 ، 4 ، 71 .

الجذر التربيعي بقانون الكرخي :

أعطى الكرخي القاعدة العامة لإيجاد الجذور للجذور غير النسبية (الجذور الصماء) مثل $\sqrt{40}$ وهي $\sqrt{m^2+a}=m+\dfrac{a}{2m+1}$.

مثال : جد $\sqrt{130}$ باستخدام قاعدة الكرخي :

الحل:

$$\sqrt{130}=\sqrt{121+9}=\sqrt{11^2+9}=11+\frac{9}{22+1}=11\frac{9}{23}.$$

مثال : جد كلا من $\sqrt{40}$ و $\sqrt{70}$ باستخدام قاعدة الكرخي : واجب

أما إيجاد الجذور التربيعية للأعداد النسبية (لا يوجد باقي) بطريقة الكرخي نلاحظ الأمثلة الآتية :

مثال: جد كلا من $\sqrt{144}$ و $\sqrt{256}$ باستخدام قاعدة الكرخي:

الحل:

12	
$1^2=1$ $2\times1=2$	144 1
$2\times22=44$	044 44
00	

16	
$1^2=1$ $2\times1=2$	256 1
$6\times26=156$	156 156
000	

$\therefore\ \sqrt{144}=12$

$\therefore\ \sqrt{256}=16$

مثال: جد كلا من $\sqrt{169}$ و $\sqrt{225}$ و $\sqrt{289}$ باستخدام قاعدة الكرخي:واجب

مثال: جد كلا من $\sqrt{17424}$ و $\sqrt{65536}$ باستخدام قاعدة الكرخي:

الحل:

132	
17424 1	$1^2 = 1$ $2 \times 1 = 2$
07424 69	$3 \times 23 = 69$
524 524	$2 \times 13 = 26$ $2 \times 262 = 524$
000	

256	
65536 4	$2^2 = 4$ $2 \times 2 = 4$
255 225	$5 \times 45 = 225$
3036 3036	$2 \times 25 = 50$ $6 \times 506 = 3036$
0000	

$\therefore \sqrt{17424} = 132$.

$\therefore \sqrt{65536} = 256$.

الجذر التربيعي بقانون القلصادي :

أعطى القلصادي (أبو الحسن علي بن محمد البسطي) قيمة تقريبية للجذر التربيعي بالقانون الأتي : $\sqrt{m^2 + a} \approx m + \dfrac{2ma}{4m^2 + a}$.

ويرى بعض الرياضيين أن هذا التقريب إبان طريقة لبيان الجذور الصماء بكسور مسلسلة حيث أن الناتج يكون $m + \cfrac{a}{2m + \cfrac{a}{2m}}$.

مثال :جد كلا من $\sqrt{17}$ و $\sqrt{38}$ بطريقة القلصادي

الحل:

$$\sqrt{17}=\sqrt{16+1}=\sqrt{4^2+1}\approx 4+\frac{2\times4\times1}{4\times4^2+1}=4\frac{8}{65}=4{,}123\ .$$

$$\sqrt{38}=\sqrt{36+2}=\sqrt{6^2+2}\approx 6+\frac{2\times6\times2}{4\times6^2+2}=6\frac{12}{73}=6{,}164\ .$$

<u>ملاحظة</u> : بصورة عامة

$$\sqrt[n]{m^n+a}\approx m+\frac{a}{(m+1)^n-m^n}\ .$$

مثال :جد كلا من $\sqrt[4]{18}$ بطريقة القلصادي

الحل:

$$\sqrt[4]{18}=\sqrt[4]{16+2}=\sqrt[4]{2^4+2}\approx 2+\frac{2}{(1+2)^4-2^4}=2\frac{2}{65}=2{,}030.$$

مثال : كمية وسبعها يضافان معا فيصبحان 19 ، فما هي الكمية . (واجب)

مثال : اثبت صحت كلا مما يأتي: (واجب)

- $\sum_{i=1}^{n} i=\frac{n(n+1)}{2}$.
- $\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
- $\sum_{i=1}^{n} i^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
- $\sum_{i=1}^{n} i^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$.