$$\boxed{\int \sin^n x\, dx = \frac{-1}{n}\sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2} x\, dx}$$

EXAM :

$$\int \sin^3 x\, dx = \frac{-1}{3}\sin^2 x \cos x + \frac{2}{3}\int \sin x\, dx$$

$$= \frac{-1}{3}\sin^2 x \cos x - \frac{2}{3}\cos x + C$$

$$\int \sin^4 x\, dx = \frac{-1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\int \sin^2 x\, dx$$

$$= \frac{-1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\left(\frac{-1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}\int dx\right)$$

$$= \frac{-1}{4}\sin^3 x \cos x + \frac{3}{4}\left(\frac{-1}{2}\sin x \cos x + \frac{1}{2}x\right) + C$$

$$\boxed{\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} x\, dx}$$

EXAM :

$$\int \cos^3 x\, dx = \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\int \cos x\, dx$$

$$= \frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x + C$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\int \sin^3 x\, dx = \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x \\ &\int \cos^3 x\, dx = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x \end{aligned}} \Leftarrow \textit{special rules}$$

If m & n are positive number (inteager) then : -

$$\int \sin^m x \cos^n x\, dx$$

$$n \quad odd \quad \Rightarrow\Rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$n \quad even \quad \Rightarrow\Rightarrow \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$m, n \quad odd \quad \Rightarrow\Rightarrow \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \quad or \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$m, n \quad even \quad \Rightarrow\Rightarrow \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x) \quad and \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

ملاحظات مهمة :

1- اذا اعطى في السؤال اس الـ Sin فردي و اس الـ Cos زوجي فيجب تحويل كل $Sin^2x=1-Cos^2x$

2- اذا اعطى في السؤال اس الـ Cos فردي و اس الـ Sin زوجي فيجب تحويل كل $Cos^2x=1-Sin^2x$

3- اذا اعطى الاسان فرديان فيجب تحويل احدهما اما $Sin^2x=1-Cos^2x$ او $Cos^2x=1-Sin^2x$ وللسهولة يجب ان نختار الدالة ذات الاس الاقل .

4 – اما اذا كان الاسان زوجيان فيجب تحويل الدالتين حسب الصيغ التالية

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \quad and \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

EXAM :

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx$$

$$= \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x \ dx = \int \sin^2 x (1-\sin^2 x)\cos x \ dx$$

$$= \int (\sin^2 x \cos x - \sin^4 x \cos x)\, dx = \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

$$\int \cos^2 x \sin^3 x \ dx$$

$$= \int \cos^2 x \sin^2 x \sin x \ dx = \int \cos^2 x (1-\cos^2 x)\sin x \ dx$$

$$= \int (\cos^2 x \sin x - \cos^4 x \sin x)\, dx = \frac{-1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

$$\int \sin^5 x \cos^5 x \ dx$$

$$= \int (\sin^2 x)^2 \sin x \cos^5 x \ dx = \int (1-\cos^2 x)^2 \sin x \cos^5 x \ dx$$

$$= \int (1-2\cos^2 x + \cos^4 x)\sin x \cos^5 x \ dx$$

$$= \int (\sin x \cos^5 x - 2\sin x \cos^7 x + \sin x \cos^9 x)\, dx$$

$$= \frac{-1}{6}\cos^6 x + \frac{1}{4}\cos^8 x - \frac{1}{10}\cos^{10} x + C$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x \ dx$$

$$= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x).\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)\, dx = \frac{1}{4}\int \sin^2 2x \ dx$$

$$= \frac{1}{4}\frac{1}{2}\int (1-\cos 4x)\, dx = \frac{1}{8}\left[x - \frac{1}{4}\sin 4x \right] + C$$

$$\boxed{\int \tan^n x \; dx = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x \; dx}$$

EXAM :

$$\int \tan^3 x \; dx = \frac{1}{2}\tan^2 x - \int \tan x \; dx$$

$$= \frac{1}{2}\tan^2 x + Ln\left|\cos x\right| + C$$

$$\int \tan^4 x \; dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \int \tan^2 x \; dx$$

$$= \frac{1}{3}\tan^3 x - \int (\sec^2 x - 1)\, dx = \frac{1}{3}\tan^3 x - \tan x + x + C$$

$$\boxed{\int \sec^n x \; dx = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} x \; \tan x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} x \; dx}$$

EXAM :

$$\int \sec^3 x \; dx = \frac{1}{2}\sec x \; \tan x + \frac{1}{2}\int \sec x \; dx$$

$$= \frac{1}{2}\sec x \; \tan x + \frac{1}{2} Ln\left|\sec x + \tan x\right| + C$$

$$\int \sec^4 x \; dx = \frac{1}{3}\sec^2 x \; \tan x + \frac{2}{3}\int \sec^2 x \; dx$$

$$= \frac{1}{3}\sec^2 x \; \tan x + \frac{2}{3}\tan x + C$$

ملاحظات مهمة :

1- اذا اعطى في السؤال اس الـ Sec زوجي فيجب تحويل $Sec^2=1+tan^2$ ومن ثم حلها باستخدام قاعدة $tan^n x$

أو :

اذا اعطى في السؤال اس الـ Sec زوجي فيجب تحويل $Sec^2=1+tan^2$ مع ترك Sec^2 واحدة لغرض المشتقة والتكامل مباشر .

2- اذا اعطى في السؤال اس الـ Sec فردي و أس الـ tan زوجي فيجب تحويل $tan^2=Sec^2-1$ ومن ثم حلها باستخدام قاعده $Sec^n x$

3- اذا اعطى اس ال Sec , tan فرديان فيجب تحويل $tan^2=Sec^2-1$ ونقوم بسحب tan واحدة و Sec واحدة لغرض المشتقة ومن ثم تكاملها مباشرة .

$$\int \tan^m x \sec^n x \; dx$$

$$n \;\; even \qquad \Rightarrow\Rightarrow \quad \sec^2 x = 1 + \tan^2 x$$

$$m \;\; odd \qquad \Rightarrow\Rightarrow \quad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

$$m \;\; even, n \;\; odd \quad \Rightarrow\Rightarrow \quad \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

EXAM :

$$\int \tan^3 x \sec^4 x \, dx = \int \tan^3 x \sec^2 x \sec^2 x \, dx$$

$$= \int \tan^3 x (1+\tan^2 x) \sec^2 x \, dx = \int (\tan^3 x \sec^2 x + \tan^5 x \sec^2 x) \, dx$$

$$= \frac{1}{4}\tan^4 x + \frac{1}{6}\tan^6 x + C$$

$$\int \tan^4 x \sec^3 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1)^2 \sec^3 x \, dx$$

$$= \int (\sec^4 x - 2\sec^2 x + 1) \sec^3 x \, dx = \int (\sec^7 x - 2\sec^5 x + \sec^3 x) dx$$

$$\because \int \sec^7 x \, dx = \frac{1}{6}\sec^5 x \tan x + \frac{5}{6}\int \sec^5 x \, dx$$

$$\int \tan^4 x \sec^3 x \, dx = \frac{1}{6}\sec^5 x \tan x + \frac{5}{6}\int \sec^5 x \, dx - 2\int \sec^5 x \, dx + \int \sec^3 x dx$$

$$= \frac{1}{6}\sec^5 x \tan x - \frac{7}{6}\int \sec^5 x \, dx + \int \sec^3 x dx$$

$$= \frac{1}{6}\sec^5 x \tan x - \frac{7}{6}\left(\frac{1}{4}\sec^3 x \tan x + \frac{3}{4}\int \sec^3 x dx\right) + \int \sec^3 x dx$$

$$= \frac{1}{6}\sec^5 x \tan x - \frac{7}{24}\sec^3 x \tan x + \frac{1}{8}\int \sec^3 x dx$$

$$= \frac{1}{6}\sec^5 x \tan x - \frac{7}{24}\sec^3 x \tan x + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\sec x \tan x + \frac{1}{2} Ln\left|\sec x + \tan x\right|\right) + C$$

$$\int \sec^3 x \tan^3 x \, dx = \int \sec^2 x \, (\sec^2 x - 1).\sec x \tan x \, dx$$

$$= \int (\sec^4 x .\sec x \tan x - \sec^2 x .\sec x \tan x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{5}\sec^5 x - \frac{1}{3}\sec^3 x + C$$

$$\int \sec^4 x \tan^4 x \, dx = \int \sec^2 x \, (1+\tan^2 x) \tan^4 x \, dx$$

$$= \int (\sec^2 x \tan^4 x + \sec^2 x \tan^6 x) \, dx =$$

$$= \frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{1}{7}\tan^7 x + C$$

$$\sin A\cos B=\frac{1}{2}\left[\sin(A-B)+\sin(A+B)\right]$$
$$\sin A\sin B=\frac{1}{2}\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]$$
$$\cos A\cos B=\frac{1}{2}\left[\cos(A-B)+\cos(A+B)\right]$$

EXAM :

$$\int\sin 5x\,\cos 3x\,dx=\frac{1}{2}\int(\sin 2x+\sin 8x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{8}\cos 8x\right]+C$$

$$\int\sin 4x\,\sin x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 3x-\cos 5x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\sin 3x-\frac{1}{5}\sin 5x\right)+C$$

$$\int\cos 7x\,\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 5x+\cos 9x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{5}\sin 5x+\frac{1}{9}\sin 9x\right)+C$$

MOHAMED SABAH AL TAEE
M.SC / MATHEMATICS
E-MAIL : msmt_80@yahoo.com
2013 -2014

HOME WORK

evaluate

$$\int\cos^4 x\;dx\;,\;\int\sin^6 x\;dx\;,\;\int\sin^4 x\cos^5 x\;dx\;,\int\sin^4 x\cos^4 x\;dx$$
$$\int\tan^2 x\sec x dx\;,\;\int\sin 7x\cos 3x\;dx\;\;,\int\sin 7x\sin 3x\;dx$$
$$\int\cos 7x\cos 3x\;dx\;\;,\;\int\tan^5 x dx\;\;,\;\int\sec^5 x dx\;\;,\;\int\tan^2 x\sec^4 x dx$$