Trancendental Functions الدوال المتسامية

كل دالة ليست جبرية تسمى دالة متسامية وامثلة على ذلك الدوال اللوغاريتمية ، الاسية،المثلثية والدوال المثلثية العكسية .

The Natural Logarithim **دالة اللوغاريتيم الطبيعي**

is the function define as :

$$Ln(x)=\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \qquad ,x>0$$

its domain is the set of all positive number.

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي

if f(x)=Ln(x) then :

$$\boxed{\frac{d}{dx}Ln(x)=\frac{1}{x}}$$

and in general form $\boxed{\frac{d}{dx}Ln(u)=\frac{1}{u}\frac{du}{dx}}$

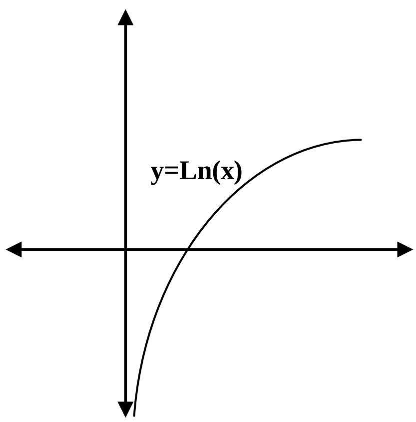
THEOREM : if **a&b** are positive number and **n** is any rational number then :

1| $Ln1=0$ 2| $Lne=1 \quad , \quad e=2.718...$

3| $Lna.b=Lna+Lnb$ 4| $Lna.b.c...z=Lna+Lnb+...Lnz$

5| $Ln\frac{a}{b}=Lna-Lnb$ 6| $Ln\frac{1}{a}=-Lna$ 7| $Lnx^n=n.Lnx$

8| $graph\ of\ \ y=Lnx \quad is:$



EXAM : Find $\frac{dy}{dx}$ **to**

1) $y=Ln(2x+7)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2}{2x+7}$

2) $y=Ln(x^2+8)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2+8}$

3) $y=Ln(Lnx)\Rightarrow\frac{dy}{dx}=\frac{1}{Lnx}.\frac{1}{x}=\frac{1}{xLnx}$

تكاملات دوال اللوغارتيم الطبيعي

$$\boxed{\int \frac{1}{x}\,dx = Ln|x| + C}$$

and in general form

$$\boxed{\int \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = Ln|u| + C}$$

EXAM : Find

$$\int \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2}\int \frac{2dx}{2x+1} = \frac{1}{2}Ln(2x+1) + C$$

$$\int \frac{x^3+4x+1}{x}\,dx$$

عندما تكون درجة البسط اعلى من درجة المقام نقسم اولاً ثم نكامل .

$$= \int \frac{x^3}{x}\,dx + \int \frac{4x}{x}\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \int x^2\,dx + \int 4\,dx + \int \frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3} + 4x + Ln\left(x\right) + C$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^3}dx = \int x\,(x^2+1)^{-3}dx = \frac{1}{2}\int 2x\,(x^2+1)^{-3}dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{-2}}{-2} + C$$

Logarithim Diff. **الاشتقاق اللوغاريتمي**

يستخدم الاشتقاق اللوغاريتمي في حالة عدم استطاعتنا اشتقاق الدالة المعطاة بالطرق السابقة وعادة ما تستخدم هذه الطريقة في الدوال الكسرية والدوال المضروبة ببعضها وتحوي على حدود كثيرة وتتلخص الطريقة كالاتي :

1) اخذ لوغاريتم Ln الطرفين .
2) نبسط الدالة باستخدام خواص اللوغاريتمات .
3) نشتق الطرفين ضمنياً بالنسبة لـــ x .
4) ضرب الطرفين بــــ y .
5) تعويض قيمة y بما يعادلها بالمتغير x .

EXAM : Find $\frac{dy}{dx}$ **to**

1) $y = x^x$

$$Lny = Lnx^x = xLnx$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = x\,\frac{1}{x} + Lnx\,(1) = 1 + Lnx$$

$$\frac{dy}{dx} = y\,(1+Lnx) = x^x\,(1+Lnx)$$

$$2)\ \ y=\frac{(x^2+3)^{1/2}(2x+1)^5}{(x^4+1)^2x^3}$$

$$Lny=Ln\frac{(x^2+3)^{1/2}(2x+1)^5}{(x^4+1)^2x^3}=Ln(x^2+3)^{1/2}(2x+1)^5-Ln(x^4+1)^2x^3$$

$$=Ln(x^2+3)^{1/2}+Ln(2x+1)^5-Ln(x^4+1)^2-Lnx^3$$

$$=\frac{1}{2}Ln(x^2+3)+5Ln(2x+1)-2Ln(x^4+1)-3Lnx$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+3}+5\frac{2}{2x+1}-2\frac{4x^3}{x^4+1}-\frac{3}{x}$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{x}{x^2+3}+\frac{10}{2x+1}-\frac{8x^3}{x^4+1}-\frac{3}{x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\left(\frac{(x^2+3)^{1/2}(2x+1)^5}{(x^4+1)^2x^3}\right)\left(\frac{x}{x^2+3}+\frac{10}{2x+1}-\frac{8x^3}{x^4+1}-\frac{3}{x}\right)$$

$$3)\ \ y=(5x^2+x+1)(x^3-2)^3\sqrt{x^2+1}$$

$$Lny=Ln(5x^2+x+1)(x^3-2)^3\sqrt{x^2+1}$$

$$Lny=Ln(5x^2+x+1)+Ln(x^3-2)^3+Ln\sqrt{x^2+1}$$

$$Lny=Ln(5x^2+x+1)+3Ln(x^3-2)+\frac{1}{2}Ln(x^2+1)$$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=\frac{10x+1}{5x^2+x+1}+3\frac{3x^2}{x^3-2}+\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}$$

$$\frac{dy}{dx}=y\left(\frac{10x+1}{5x^2+x+1}+\frac{9x^2}{x^3-2}+\frac{x}{x^2+1}\right)$$

$$\frac{dy}{dx}=\left((5x^2+x+1)(x^3-2)^3\sqrt{x^2+1}\right)\left(\frac{10x+1}{5x^2+x+1}+\frac{9x^2}{x^3-2}+\frac{x}{x^2+1}\right)$$

Logarithim with base a **اللوغاريتم الاعتيادي ذو الاساس a**

اللوغاريتم الطبيعي هو اللوغاريتم الذي اساسه هو **e** ويمكن ان يكتب بصيغة اخرى هي $Lnx=Log_e x$

اما اللوغاريتم الاعتيادي فهو اللوغاريتم الذي اساسه ليس **e** مثل اللوغاريتم العشري واللوغاريتم الذي اساسه **a**

وهناك علاقة مهمة تربط اللوغاريتم الاعتيادي باللوغاريتم الطبيعي وهي : $Log_a x=\dfrac{Lnx}{Lna}\ ,\ a\neq 1$

مشتقة دالة اللوغاريتم الاعتيادي :

$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{d}{dx}\frac{\ln x}{\ln a} = \frac{1}{x\ln a}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x\ln a}}$$

and in general form :

$$\boxed{\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{du}{u\ln a}}$$

EXAM : Find $\frac{dy}{dx}$ **to** $y=\log_2(3x+1)$

1) $y = \frac{\ln(3x+1)}{\ln 2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3}{(3x+1)\ln 2}$

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{(3x+1)\ln 2}$

EXAM : Find $\frac{dy}{dx}$ **to** $y=\ln\ln x+\log_3(x^2+5)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\ln x} + \frac{2x}{(x^2+5)\ln 3}$$

HOME WORK

1) Find $\frac{dy}{dx}$ to $y =$

$\ln(2x^3)$, $\ln(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2}})$, $\ln(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$, $x^2\ln\sqrt{3x+5}$, $\frac{\ln(x+1)}{\ln(x-1)}$

$\frac{2x^2+1}{\ln(2x^2+1)}$, $x(\log_2(x^2-2x))^3$, $\frac{\log_2 x}{1+\log_3 x}$

2) Find $\frac{dy}{dx}$ to $y = \sin x.\ln x.(x^3+1)^5.\sqrt{x^2+1}.\frac{1}{x}$

3) if $\ln 2 = a$, $\ln 3 = b$, find $\ln 4, \ln 9, \ln 6, \ln 1.5, \ln 8$

4) Find $\int \frac{x^2+2x+4}{x^3+3x^2+12x+10}dx$, $\int \frac{8x+18}{(2x-1)(x+5)}dx$

MOHAMED SABAH AL TAEE
M.SC / MATHEMATICS
E-MAIL : msmt_80@yahoo.com
2013 -2014