اذا كانت الدالة نسبية أي بشكل $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ وكانت درجة البسط اقل من درجة المقام ، والمقام يتحلل الى العوامل الاولية ولم نستطع تكاملها بالطرق الاعتيادية البسيطة نلجأ الى طريقة تجزئة الكسور .

ملاحظة : اذا كانت درجة البسط اكبر من درجة المقام او مساوية لها فنقسم اولاً ثم نكامل .

CASE 1 : الحالة الاولى :

اذا كانت عوامل g(x) خطية اولية (من الدرجة الاولى) وغير متكررة أي ان :

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{(x-a_1)}+\frac{B}{(x-a_2)}+\dots\dots+\frac{Z}{(x-a_n)}$$

ومن هذه الخطوة نوحد المقامات ونساوي معاملات x^n في البسط للطرفين ونوجد قيم الثوابت A,B,…,Z ثم نكامل.

EXAM :

$\boxed{1}$ $\displaystyle\int\frac{2x}{2x^2+x-6}dx$

$$\frac{2x}{2x^2+x-6}=\frac{A}{2x-3}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(2x-3)}{(2x-3)(x+2)}$$

$$2x=A(x+2)+B(2x-3)$$

$$2=A+2B$$

$$0=2A-3B\Rightarrow A=\frac{3}{2}B$$

$$2=\frac{3}{2}B+2B\Rightarrow B=\frac{4}{7}\Rightarrow A=\frac{6}{7}$$

$$\therefore\int\frac{2x}{2x^2+x-6}dx=\int\left(\frac{6/7}{2x-3}+\frac{4/7}{x+2}\right)dx$$

$$=\frac{6}{7}\frac{1}{2}Ln|2x-3|+\frac{4}{7}Ln|x+2|+C$$

$\boxed{2}$ $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+x-2}$

$$\frac{1}{x^2+x-2}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}$$

$$1=A(x+2)+B(x-1)$$

$$0=A+B\Rightarrow A=-B$$

$$1=2A-B=2A+A=3A\Rightarrow A=\frac{1}{3}\Rightarrow B=-\frac{1}{3}$$

$$\therefore\int\frac{dx}{x^2+x-2}=\int\frac{1/3}{(x-1)}dx-\int\frac{1/3}{(x+2)}dx=\frac{1}{3}Ln|x-1|-\frac{1}{3}Ln|x+2|+C$$

$\boxed{3}$ $\int \frac{x+5}{x^2-3x-10}dx$

$$\frac{x+5}{x^2-3x-10}=\frac{A}{(x-5)}+\frac{B}{(x+2)}=\frac{A(x+2)+B(x-5)}{(x-5)(x+2)}$$

$$x+5=A(x+2)+B(x-5)$$

$$1=A+B\Rightarrow A=1-B$$

$$5=2A-5B=2(1-B)-5B\Rightarrow -7B=3\Rightarrow B=-3/7\Rightarrow A=10/7$$

$$\therefore\int\frac{x+5}{x^2-3x-10}dx=\int\frac{10/7}{(x-5)}dx-\int\frac{-3/7}{(x+2)}dx=\frac{10}{7}Ln|x-5|-\frac{3}{7}Ln|x+2|+C$$

$\boxed{4}$ $\int \frac{3x+8}{x^2-11x+30}dx$

$$\frac{3x+8}{x^2-11x-30}=\frac{A}{(x-5)}+\frac{B}{(x-6)}=\frac{A(x-6)+B(x-5)}{(x-5)(x-6)}$$

$$3x+8=A(x-6)+B(x-5)$$

$$3=A+B\Rightarrow A=3-B$$

$$8=-6A-5B=-6(3-B)-5B\Rightarrow B=26\Rightarrow A=-23$$

$$\therefore\int\frac{3x+8}{x^2-11x-30}dx=\int\frac{-23}{(x-5)}dx+\int\frac{26}{(x-6)}dx=-23Ln|x-5|+26Ln|x-6|+C$$

$\boxed{5}$ $\int \frac{dx}{x^3+4x^2+x-6}$

عند تحليل دالة من الدرجة الثالثة نتبع ما يلي :
1- نبحث عن جذر يحقق المعادلة بعد مساواتها بالصفر .
2- نقسم المعادلة في المقام على (x-root) قسمة طويلة حيث ان root هو الجذر .
في المثال اعلاه نجد ان الجذر هو (1) يحقق المعادلة في المقام
اذن نقسم المعادلة قسمة طويلة على x-1 .

$$\begin{array}{r|l} & x^2+5x+6 \\ x-1 & x^3+4x^2+x-6 \\ & \underline{x^3-x^2} \\ & 5x^2+x-6 \\ & \underline{5x^2-5x} \\ & 6x-6 \\ & \underline{6x-6} \\ & 0 \end{array}$$

$$\therefore x^3+4x^2+x-6=(x-1)(x^2+5x+6)$$
$$=(x-1)(x+2)(x+3)$$

$$\therefore\int\frac{dx}{x^3+4x^2+x-6}=\frac{A}{(x-1)}+\frac{B}{(x+2)}+\frac{C}{(x+3)}$$

$$A=1/12\quad,\quad B=-1/3\quad,\quad C=1/4$$

$$\therefore\int\frac{dx}{x^3+4x^2+x-6}=\frac{1}{12}Ln|x-1|-\frac{1}{3}Ln|x+2|+\frac{1}{4}Ln|x+3|+C$$

CASE 2 : **الحالة الثانية :**

اذا كانت عوامل g(x) خطية اولية (من الدرجة الاولى) و متكررة أي ان :

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(x-a)^n}=\frac{A}{(x-a)}+\frac{B}{(x-a)^2}+\frac{C}{(x-a)^3}+.......+\frac{Z}{(x-a)^n}$$

EXAM :

$\boxed{6}$ $\int \frac{4x+3}{(x-1)^2(x+2)}dx$

$$\frac{4x+3}{(x-1)^2(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

$A+C=0 \Rightarrow A=-C$ ....(1)

$A+B-2C=4$ ....(2)

$-2A+2B+C=3$ ....(3)

$by\ sub.\ 1\ in\ \ 2 we\ get:\ -C+B-2C=4 \Rightarrow B=4+3C$ .....(4)

$by\ sub.\ 1\ \&\ 4\ in\ \ 3 we\ get:$

$-2(-C)+2(4+3C)+C=3 \Rightarrow 9C=-5$

$C=\frac{-5}{9} \qquad A=\frac{5}{9} \qquad B=\frac{7}{3}$

$$\therefore \int \frac{4x+3}{(x-1)^2(x+2)}dx=\frac{5}{9}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{7}{3}\int\frac{dx}{(x-1)^2}-\frac{5}{9}\int\frac{dx}{x+2}$$

$$=\frac{5}{9}Ln|x-1|-\frac{7}{3}\frac{1}{x-1}-\frac{5}{9}Ln|x+2|+C$$

$\boxed{7}$ $\int \frac{4x^2+2x+5}{(x-2)^3}dx$

$$\frac{4x^2+2x+5}{(x-2)^3}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}+\frac{C}{(x-2)^3}=\frac{A(x-2)^2+B(x-2)+C}{(x-2)^3}$$

$4x^2+2x+5=A(x^2-4x+4)+B(x-2)+C \Rightarrow A=4$

$-4A+B=2 \Rightarrow B=18 \quad , \quad 4A-2B+C=5 \Rightarrow C=25$

$$\int \frac{4x^2+2x+5}{(x-2)^3}dx=4\int\frac{dx}{x-2}+18\int\frac{dx}{(x-2)^2}+25\int\frac{dx}{(x-2)^3}$$

$$=4Ln|x-2|-18(x-2)^{-1}-\frac{25}{2}(x-2)^{-2}+C$$

$\boxed{8}$ $\int \frac{2x+4}{x^3-2x^2}dx$

$$\frac{2x+4}{x^3-2x^2}=\frac{2x+4}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{(x-2)}=\frac{Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2}{x^2(x-2)}$$

$$2x+4=A(x^2-2x)+B(x-2)+Cx^2$$

$$A+C=0\Rightarrow A=-C$$

$$-2A+B=2$$

$$-2B=4\Rightarrow B=-2\ ,\ A=-2\ ,\ C=2$$

$$\therefore\int\frac{2x+4}{x^3-2x^2}dx=-2\int\frac{dx}{x}-2\int\frac{dx}{x^2}+2\int\frac{dx}{(x-2)}=-2Ln|x|+\frac{2}{x}+2Ln|x-2|+C$$

CASE 3 : الحالة الثالثة :

اذا كانت عوامل **g(x)** غير خطية (من الدرجة الثانية) وغير متكررة أي ان :

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{(a_1x^2+b_1x+c_1)(a_2x^2+b_2x+c_2)......(a_nx^2+b_nx+c_n)}$$

عندئذٍ التعويض يكون بالشكل التالي :

$$\frac{Ax+B}{(a_1x^2+b_1x+c_1)}+\frac{Cx+D}{(a_2x^2+b_2x+c_2)}+.......+\frac{Yx+Z}{(a_nx^2+b_nx+c_n)}$$

$\boxed{9}$ $\int\frac{x^2+3x+2}{(x^2+1)(x-2)}dx$

$$\frac{x^2+3x+2}{(x^2+1)(x-2)}=\frac{Ax+B}{x^2+1}+\frac{C}{(x-2)}=\frac{(Ax+B)(x-2)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-2)}$$

$$x^2+3x+2=Ax^2-2Ax+Bx-2B+Cx^2+C$$

$$A+C=1\Rightarrow A=1-C \quad ....(1)$$

$$-2A+B=3 \quad ....(2)$$

$$-2B+C=2 \quad ....(3)$$

$$from\ 2 we\ get\ \ B=3+2A=3+2(1-C)=5-2C \qquad (sub.\ in\ \ 3)$$

$$-2(5-2C)+C=2\Rightarrow C=\frac{12}{5}\ ,\ B=\frac{1}{5}\ ,\ A=\frac{-7}{5}$$

$$\int\frac{x^2+3x+2}{(x^2+1)(x-2)}dx=\int\frac{-\frac{7}{5}x+\frac{1}{5}}{x^2+1}dx+\int\frac{\frac{12}{5}}{(x-2)}dx$$

$$=\frac{-7}{5}\int\frac{x}{x^2+1}dx+\frac{1}{5}\int\frac{dx}{x^2+1}+\frac{12}{5}\int\frac{dx}{(x-2)}$$

$$=\frac{-7}{10}Ln|x^2+1|+\frac{1}{5}\tan^{-1}x+\frac{12}{5}Ln|x-2|+C$$

$\boxed{10}$ $\int \frac{1-5x^2}{x^5+x^3}dx$

$$\frac{1-5x^2}{x^5+x^3} = \frac{1-5x^2}{x^3(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{Dx+E}{x^2+1}$$

$$= \frac{Ax^2(x^2+1)+Bx(x^2+1)+C(x^2+1)+(Dx+E)x^3}{x^3(x^2+1)}$$

$$1-5x^2 = Ax^4+Ax^2+Bx^3+Bx+Cx^2+C+Dx^4+Ex^3$$

$$A=-6 \ , \ B=0 \ , \ C=1 \ , \ D=6 \ , \ E=0$$

$$\int \frac{1-5x^2}{x^5+x^3}dx = \int \frac{-6}{x}dx + \int \frac{0}{x^2}dx + \int \frac{1}{x^3}dx + \int \frac{6x+0}{x^2+1}dx$$

$$= -6Ln|x| - \frac{1}{2}x^{-2} + 3Ln|x^2+1| + C$$

CASE 4 : **الحالة الرابعة :**

اذا كانت عوامل g(x) غير خطية (من الدرجة الثانية) و متكررة أي ان :

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{(ax^2+bx+c)^n}$$

عندئذً التعويض يكون بالشكل التالي :

$$\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)} + \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^2} + \dots\dots + \frac{Yx+Z}{(ax^2+bx+c)^n}$$

$\boxed{11}$ $\int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx$

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$2x^2+3 = Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx+D$$

$$A=0 \ , \ B=2 \ , \ C=0 \ , \ D=1$$

$$\therefore \int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{2}{x^2+1}dx + \underbrace{\int \frac{1}{(x^2+1)^2}dx}_{\#}$$

$$\# \quad x = \tan\theta \Rightarrow dx = \sec^2\theta d\theta \quad , \quad \theta = \tan^{-1}x$$

$$\int \frac{\sec^2\theta d\theta}{(\tan^2\theta+1)^2} = \int \frac{d\theta}{\sec^2\theta} = \int \cos^2\theta d\theta$$

$$= \frac{1}{2}\int (1+\cos 2\theta)d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\sin(2\tan^{-1}x)\right) \quad ....\#$$

$$\therefore \int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}dx = 2\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\left(\tan^{-1}x + \frac{1}{2}\sin(2\tan^{-1}x)\right) + C$$

HOME WORK

$$\int \frac{x^2+2x+4}{(x-1)(x^2+2x+1)}dx \qquad \int \frac{3x-1}{(x-2)(x+5)}dx$$

$$\int \frac{5}{x(x^2-9)}dx \qquad \int \frac{4x^3-x}{(x^2+5)^2}dx$$

$$\int \frac{x^3-3x^2+2x-3}{x^2+1}dx \qquad \int \frac{1-3x^4}{(x-2)(x^2+1)^2}dx$$

$$\int \frac{3x^2-10}{x^2-4x+4}dx \qquad \int \frac{x^2+2}{x+2}dx$$

MOHAMED SABAH AL TAEE
M.SC / MATHEMATICS
E-MAIL : msmt_80@yahoo.com
2013 -2014