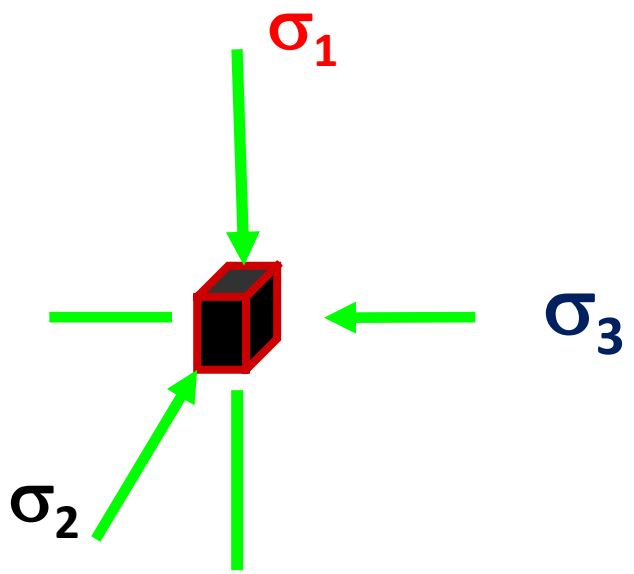
Relation of Rupture to Stress

The stress acting at a point may be referred to three mutually axes known as the principal stress axes.

σ_1 - greatest principal stress

σ_2 - intermediate principal stress

σ_3 - minimum principal stress



ويمكن ان تكون جميع الاجهادات الرئيسة الثلاثة ظاغطة (كابسة) او شادة او من المحتمل ان تكون ائتلافات متنوعة.
يعتبر الضغط في الجيولوجي موجبا (+) بينما يعتبر الشد او السحب سالبا (-).

في حين في الهندسة المفهوم معكوس.
والسبب متأتي من حقيقة كون ان المقاومة الشدية اقل قيمة من المقاومة الانضغاطية . وبما ان المقاومة الشدية مهمة جدا في تقييم المشأت الهندسية (البنايات والجسور) لذلك تعطى الاولوية في الهندسة .في حين ان السمة السائدة للاجهادات في القشرة الارضية هي انضغاطية والتي تكون مسؤولة عن نشؤ التراكيب الجيولوجية لذلك تعطى الاولوية.

Properties of stress axes.(σ_1, σ_2, and σ_3) .

All three principal stresses can be compressive ,or tensile or various combination as possible.

-These are oriented perpendicular to each other and $\sigma1 > \sigma2 > \sigma3$

-Mean stress is $(\sigma1 + \sigma2 + \sigma3)/3$

-Differential Stress(Stress Difference) is the algebraic difference between the maximum ($\sigma1$) and the minimum ($\sigma3$) . ie $\sigma1-\sigma3$

-If the differential stress exceeds the strength of the rock, permanent deformation occurs.

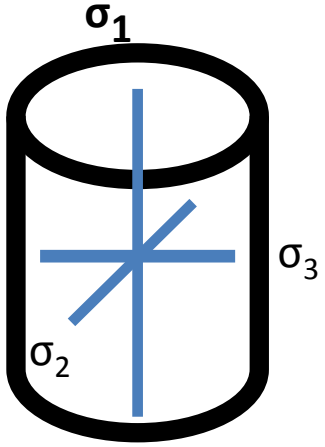
-The length of an axis is related to the magnitude of the stress.

Concept of Stress Difference or Differential Stress.

A few specific example will illustrate these concept.

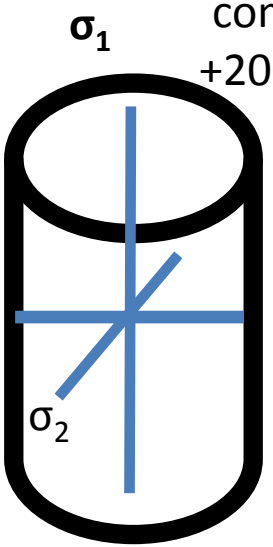
وهو الفرق الجبري بين قيمة الاجهاد الرئيس الاكبر وقيمة الاجهاد الرئيس الأصغر وهو يمثل صافي الاجهاد المؤثر المسبب للتشوه عندما تجاوز قيمتة مقاومة النموذج

+1000 kg/cm² compressive stress



σ_3 = +1kg/cm² محاطة بالهواء

Stress Difference= $\sigma_1-\sigma_3$=
1000-1=999 kg/cm²



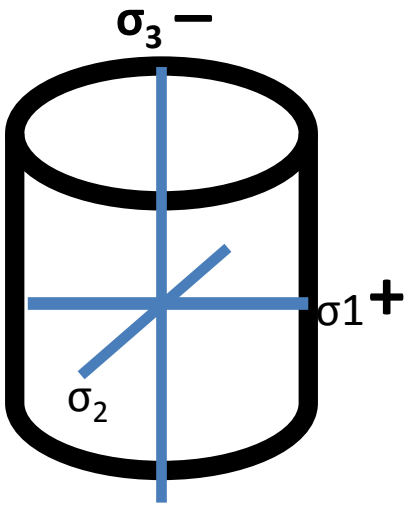
compressive stress
+2000 kg/cm²

+500 kg/cm²
Hydrostatic pressure

Stress Difference= $\sigma_1-\sigma_3$=
2000-500=1500 kg/cm²

If a tensile stress of 1000 kg/cm²is applied to the ends of the cylinder , the sides of which stress is are confined by air ,
The least principal is -1000 kg/cm² ,whereas the greatest principal stress is 1 atmosphere , that is 1 kg/cm².
The stress difference is

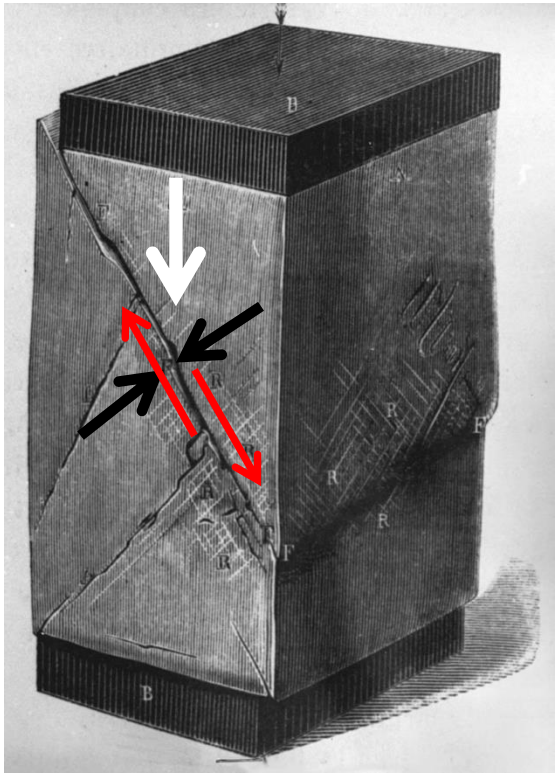
Another example : if the sides of cylinder are subjected to a hydrostatic pressure of 500 kg/cm² ,whereas the ends are subjected to a tensile stress of 2000kg/cm²,thye least principal stress is -2000 kg/cm²,wkereas the greatest principal stress axis is +500 kg/cm² .the stress difference is kg/cm²,because the greatest is compressive ,the least is tensile.



تذكر؛ اذا تجاوزت قيمة فرق الاجهاد قيمة مقاومة الصخرة . فان تشوهاً دائما سيحدث للصخرة

If the differential stress exceeds the strength of the rock, permanent deformation occurs

تذكر تحليل الاجهاد على سطح مائل



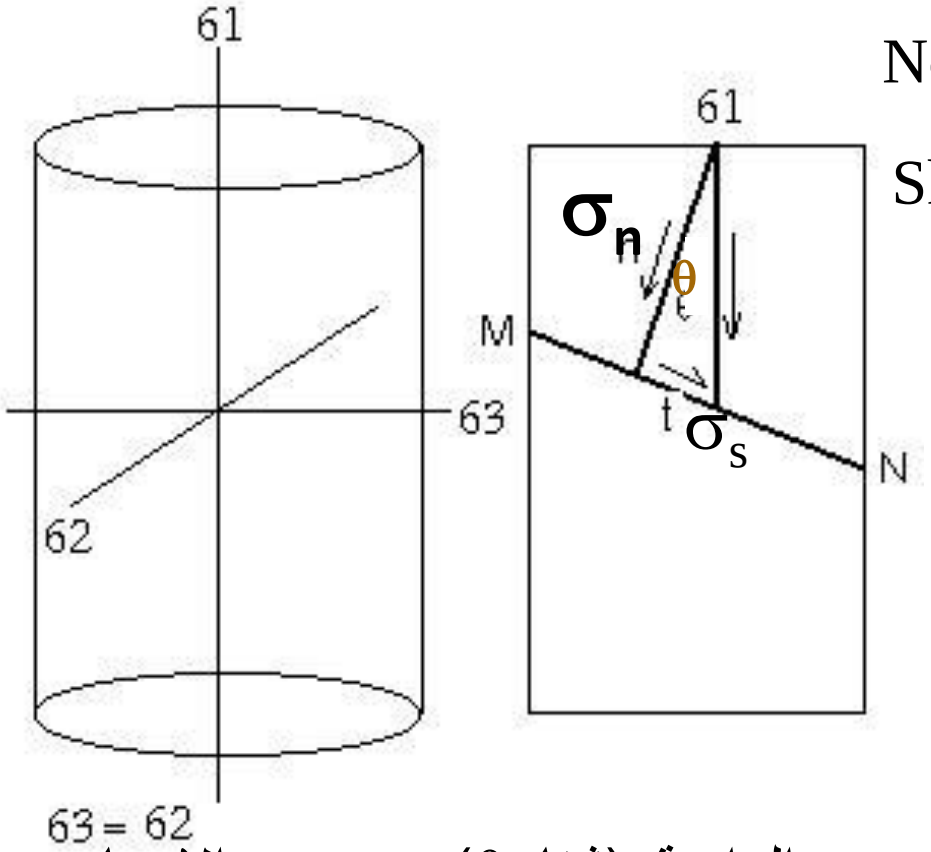
Normal stress, σ_n

and, shear stress, σ_s

Normal compressive stresses tend to inhibit sliding along the plane and are considered positive if they are compressive.

Normal tensional stresses tend to separate rocks along the plane and values are considered negative.

Shear stresses tend to promote sliding along the plane, labeled positive if its right-lateral shear and negative if its left-lateral shear



Normal Stress σ_n, n حساب الاجهاد العمودي

Shear Stress σ_s, t حساب الاجهاد القصي(تاو)

لاتوجد طريقة مباشرة في حساب الاجهاد العمودي والاجهاد القصي لذلك يتم استنتاجها من خلال تحليل قيم الاجهادات الرئيسة وعلاقتها مع مستوي الكسر من خلال الزاوية (ثيتا θ) وهي الزاوية المحصورة مركبة الجهد العمودي وبين متجه الجهد الرئيسي او هي زاوية ميل مستوي الكسر عندما يكون متجه الجهد عامودي (شاقولي)او هي الزاوية بين مستوي الكسر

ومحور الاجهاد الأعظم σ_1

ملاحظة) $\sigma_2 = \sigma_3$ (σ_2)عمودية على مستوى الورقة وقد اهملت في التحليل

ولحساب الاجهادات في المستوي MN الذي يصنع الزاوية (ثيتا θ) مع محور الاجهاد الاعظم فأن الاجهاد القصي (t)σ_s والاجهاد العمودي σ_n على امتداد المستوي MN هما:

$$\sigma_n = (\sigma_1+\sigma_3)/2-(\sigma_1-\sigma_3)/2 \cos 2\theta$$

$$\sigma_s = (\sigma_1-\sigma_3)/2 \sin 2\theta$$

Sin 0=0.... Cos 0 =1 sin 90= 1 Cos 90 =0 .. Sin 180 =0 ...Cos 180 = -1

لذلك ومن المعادلات السابقة نستنتج بان قيم الاجهاد العمودي والاجهاد القصي تتغير مع تغير زاوية ثيتا (θ) **وكما يلي:**

الاجهاد القصي : تكون قيمتة أعلى ما يمكن عندما تكون الزاوية 45 لان جيب الزاوية 90 هو 1.

$$\sigma_s = ((\sigma_1-\sigma_3)/2) * \sin 2\theta$$

أماالاجهاد العمودي تكون أعلى قيمة عندما تكون الزاوية 90 وذلك لان جيبتمام 180= 1- وهذا يجعل المطروح مضافاً إلى الحد الأول من المعادلة.فيما تكون أقل قيمة له عندما تكون الزاوية تساوي صفر لان جيبتمام الزاوية صفر = 1 فيحتفظ المطروح في المعادلة بقيمته وبذلك يقلل من قيمة الاجهاد n.

$$\sigma_n=((\sigma_1+\sigma_3)/2-(\sigma_1-\sigma_3)/2) * \cos 2\theta$$

$$\sigma_n= (\sigma_1+\sigma_3)/2-(\sigma_1-\sigma_3)/2 *(-1) \qquad \theta = 90$$

$$\sigma_n= (\sigma_1+\sigma_3)/2+(\sigma_1-\sigma_3)/2$$

$$\sigma_n= (\sigma_1+\cancel{\sigma_3}+\sigma_1-\cancel{\sigma_3})/2 \qquad \sigma_n= (\cancel{2}\sigma_1)/\cancel{2}$$

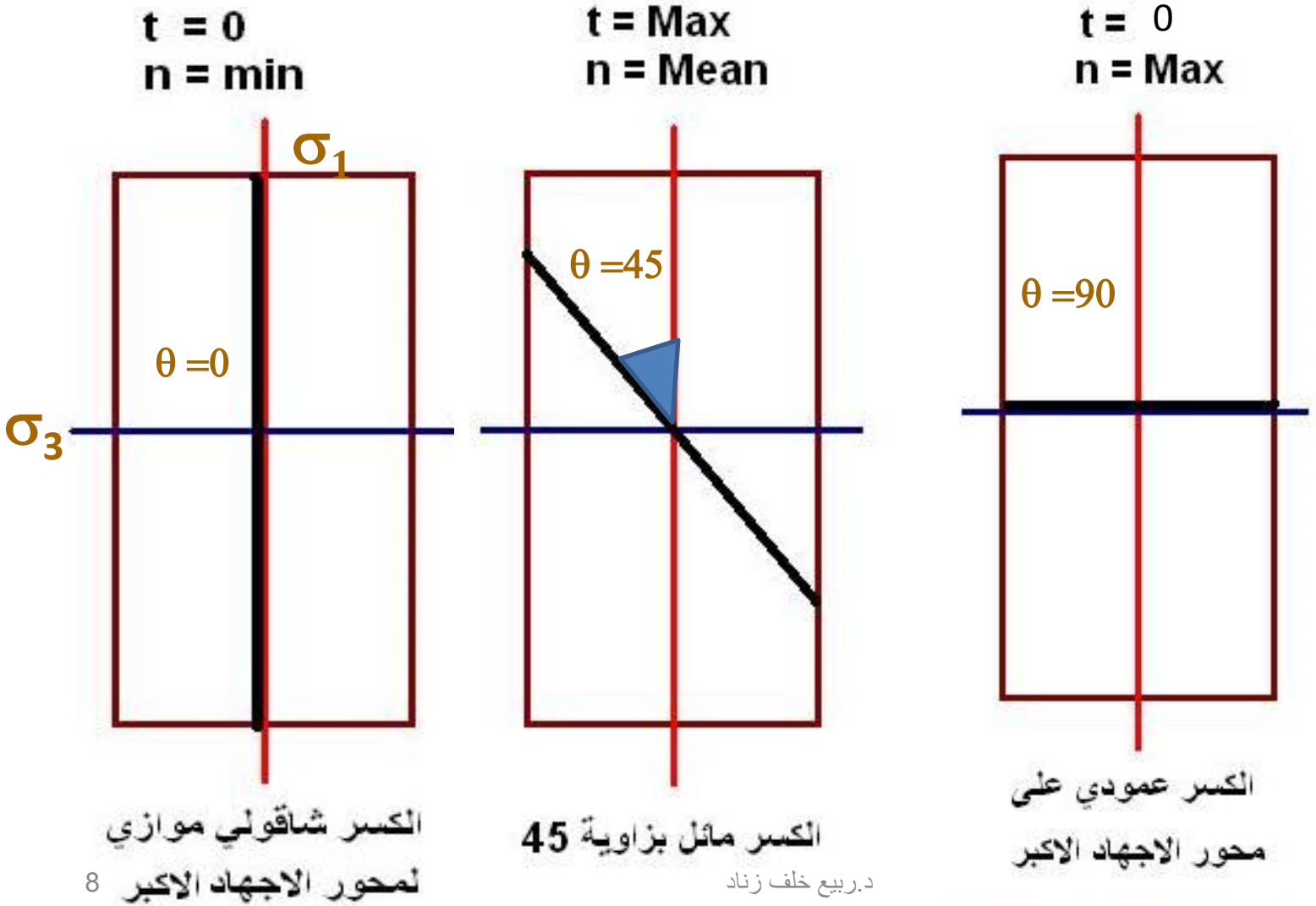
$$\sigma_n= \sigma_1$$

Max : Maximum stress axis
محور الاجهاد الاعظم

Min: Minimum stress axis
محور الاجهاد الاصغر

Sin 0=0.... Cos 0 =1 sin 90= 1 Cos 90 =0 .. Sin 180 =0 ...Cos 180 = -1

$\sigma_s = ((\sigma_1-\sigma_3)/2)\ \sin 2\theta \quad \sigma_n=((\sigma_1+\sigma_3)/2-(\sigma_1-\sigma_3)/2)\ \cos 2\theta$



Stress Ellipse and Stress Ellipsoid مفهوم اهليج الاجهاد

ان اية نقطة تحت سطح الارض والتي تمثل نقطة تقاطع مالانهاية له من المستويات معرضة للاجهاد من جميع الجوانب وليست بالضرورة ان تكون متساوية في جميع الاتجاهات , لذلك يوجد دائما فرق في الاجهاد . وبما ان الاجهادات تسلط من كافة الاتجاهات اي ان معظمها تكون ليست عمودية على النقطة المعينة ولذلك فهي تحلل الى اجهاد عمودي واجهاد مائل(قصي) والعلاقة بينهما

$$\sigma_n = (\sigma_1+\sigma_3)/2-(\sigma_1-\sigma_3)/2 \cos 2\theta$$

$$\sigma_s = (\sigma_1-\sigma_3)/2 \sin 2\theta$$

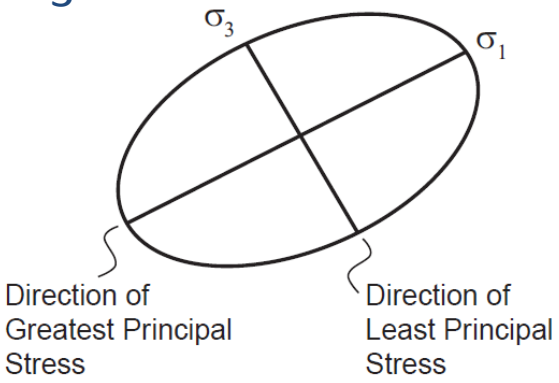
يتضح من معادلة الاجهاد العمودي والجهاد القصي ان قيمهما تعتمد على الزاوية ثيتا. ان هذه الزاوية متغيرة حتماً على محيط دائرة (اذا اعتبرنا ان النقطة تحت السطح تمائل شكل حلقة دائرية (اذا تكلمنا ببعدين (x,y او انها (اي الزاوية) متغيرة على سطح كرة اذا تكلمنا (بالابعاد الثلاثة (x,y,z),وتبعا لذلك سوف تنشأ قيم لمحاور الاجهاد تتوزع بين اعلى مايمكن وادنى مايمكن ومابينهما قيم وسطية وان التفاعل بين هذه المحاور يؤدي الى اختلاف الاجهاد المسلط على تلك النقطه(الدائرة او الكرة)

وبما ان النظريات تفترض ان اية نقطة تحت سطح الارض تمثل نقطة تقاطع مالانهاية له من المستويات لذلك نشأ مفهوم الاهليج ليصف حالة الاجهاد على هذه النقطة. واختصر هذا الوصف بثلاث محاور رئيسة للاجهاد . والتي اطلق عليها محور الاجهاد الاكبر والاوسط والادنى

Stress Ellipse and Stress Ellipsoid مفهوم اهليج الاجهاد

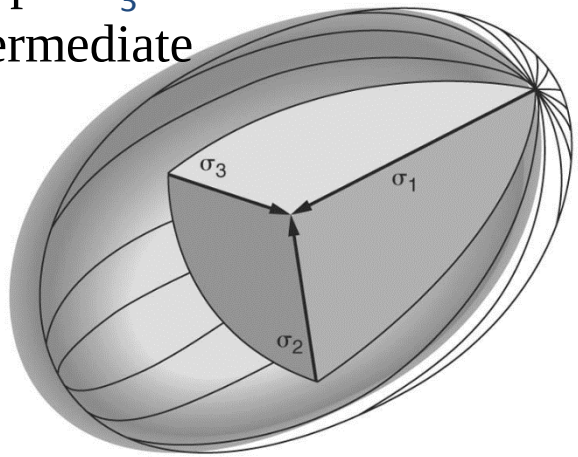
In 2D dynamic analysis ,the stat of stress represented by stress ellipse.
The long axis of the ellipse is referred to as the axis of great principal stress ; σ_1

The short axis is known as the axis of least principal stress σ_3



In 3D dynamic analysis ,it is the stress ellipsoid
That provides the description of the stress at a point.
In addition to the axes of greatest σ_1 and least principal σ_3
, the stress ellipsoid is characterized by an axis of intermediate
Principal σ_2 which is oriented perpendicular to the

plane containing $\sigma_{1 \text{ and }} \sigma_3$.



Stress State

If the 3 principal stresses are equal in magnitude = isotropic stress $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

Here the state of stress is represented by a sphere, not an ellipsoid.

If the principal stress are unequal in magnitude = anisotropic stress

Here the greatest stress is called σ_1 The intermediate stress, σ_2 and minimum stress is called σ_3

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$

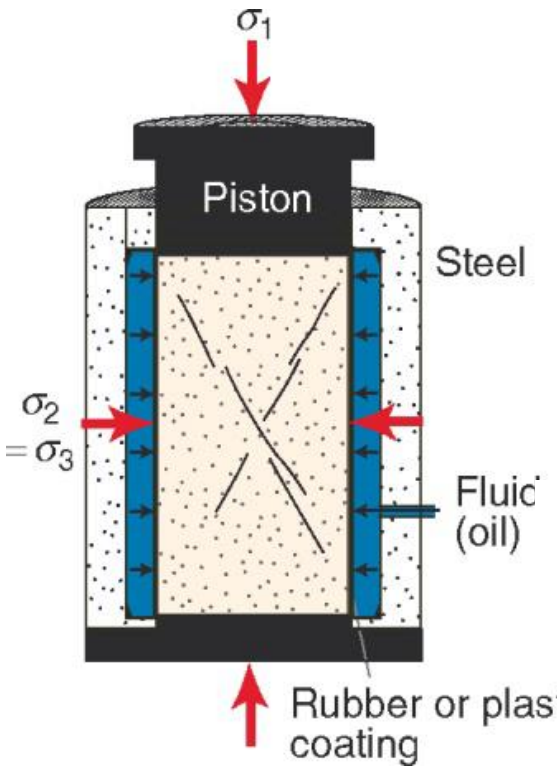
By changing the relative values of the three principal stresses we define several common **stress states**:

General triaxial stress	$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \neq 0$
Biaxial (plane) stress	One axis =0 e.g. $\sigma_1 > 0 > \sigma_3$
Uniaxial compression	$\sigma_1 > 0; \sigma_2 = \sigma_3 = 0$
Uniaxial tension	$\sigma_1 = \sigma_2 = 0; \sigma_3 < 0$
Hydrostatic stress (pressure)	$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$

Mohr circle for Stress دائرة موهر للاجهاد

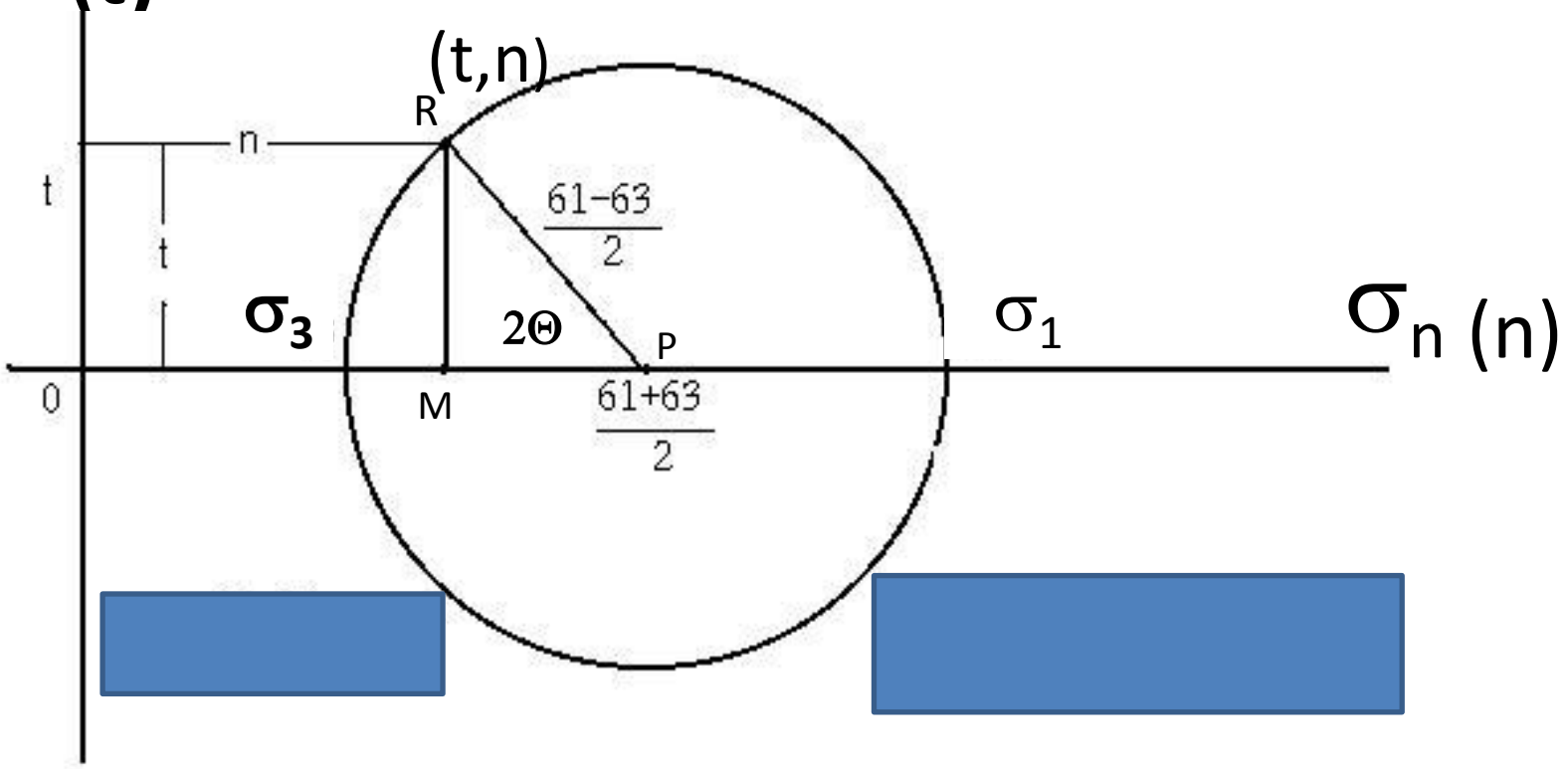
The relation between stress and rupture may be determined graphically by moher stress circles. The accompanying diagrams are based on *triaxial compression test*.

The ends of cylinder under confining pressure are compressed, thus the greatest principal stress axis, σ_1 paralle$_l$ to the axis of the cylinder, where σ_2 =and σ_3 are equal.

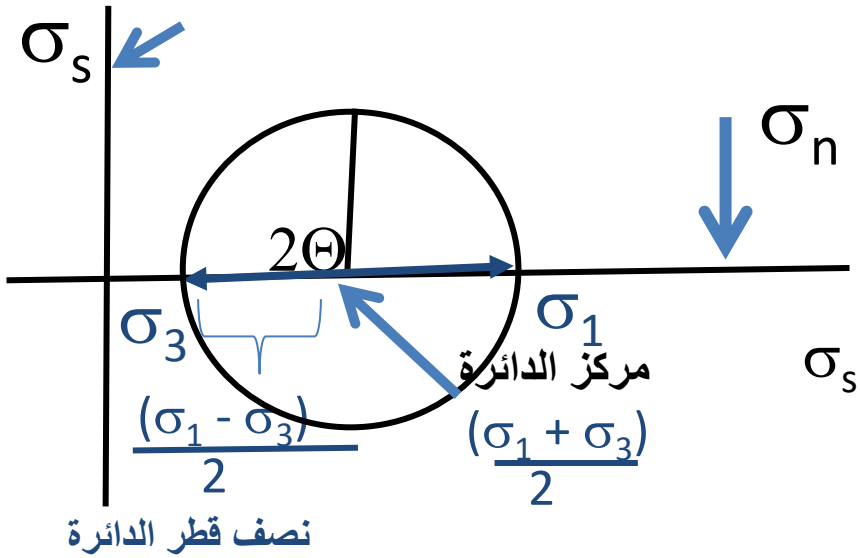


Fluid supplies confining pressure ($\sigma_2 = \sigma_3$)

σ_s (t) Mohr circle for Stress دائرة موهر للاجهاد

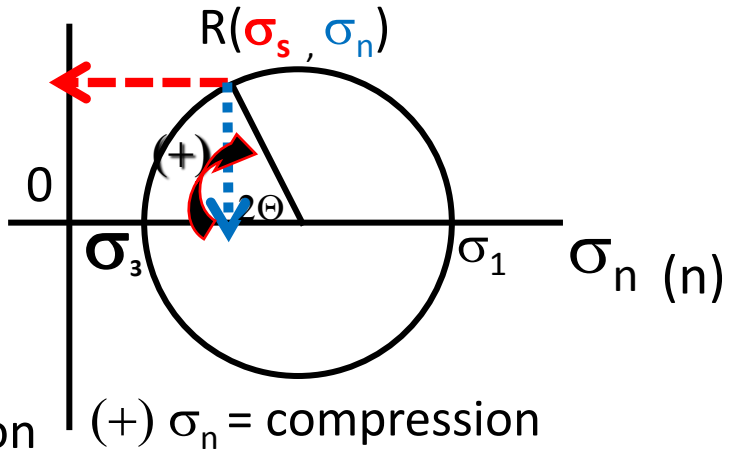


Mohr circle for Stress دائرة موهر للاجهاد



ان تعيين احداثيات النقطة R على محيط الدائرة تتم من خلال الاستفادة من الزاوية وكما يلي

$\sigma_s\ (\tau)$



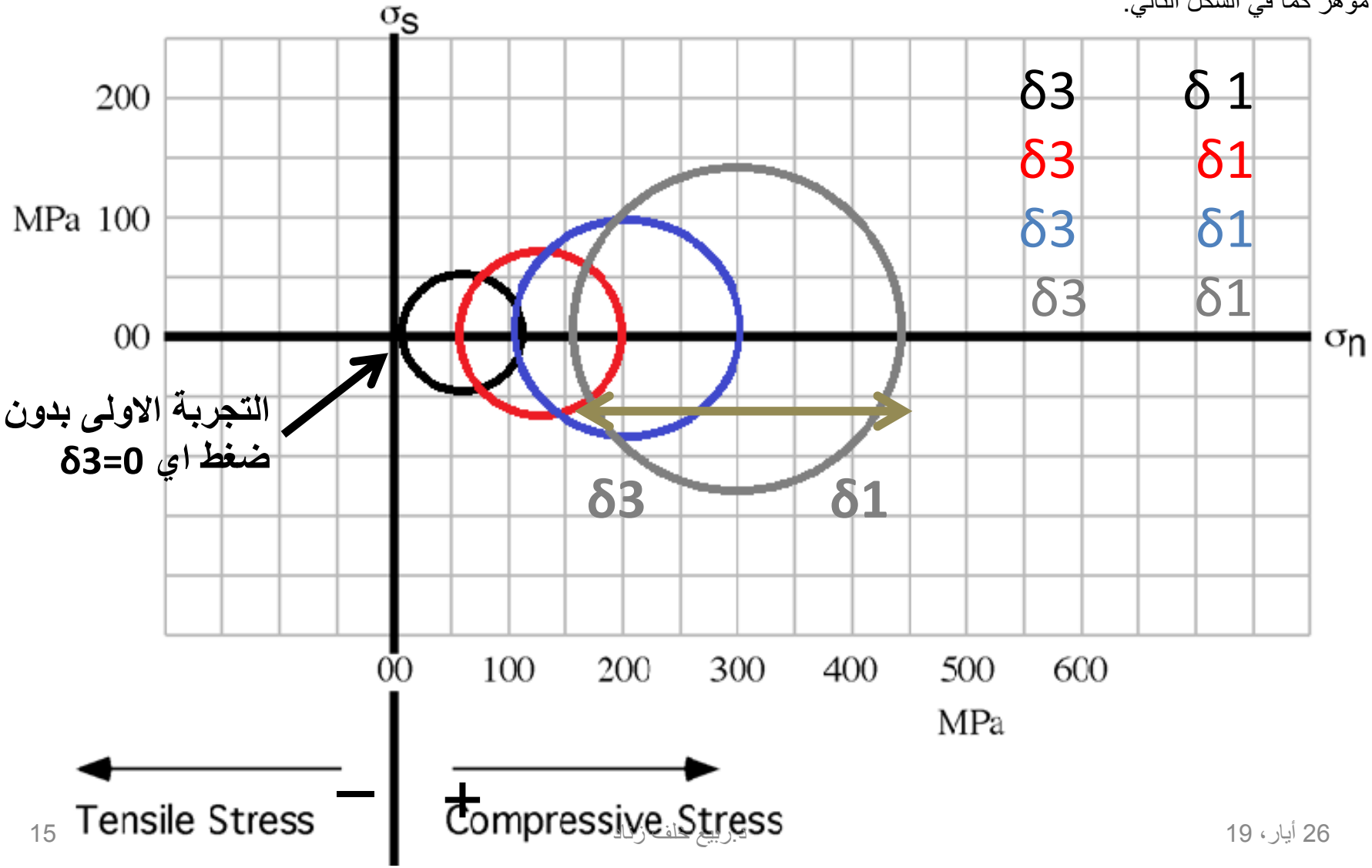
(–) σ_n = tension (+) σ_n = compression

2

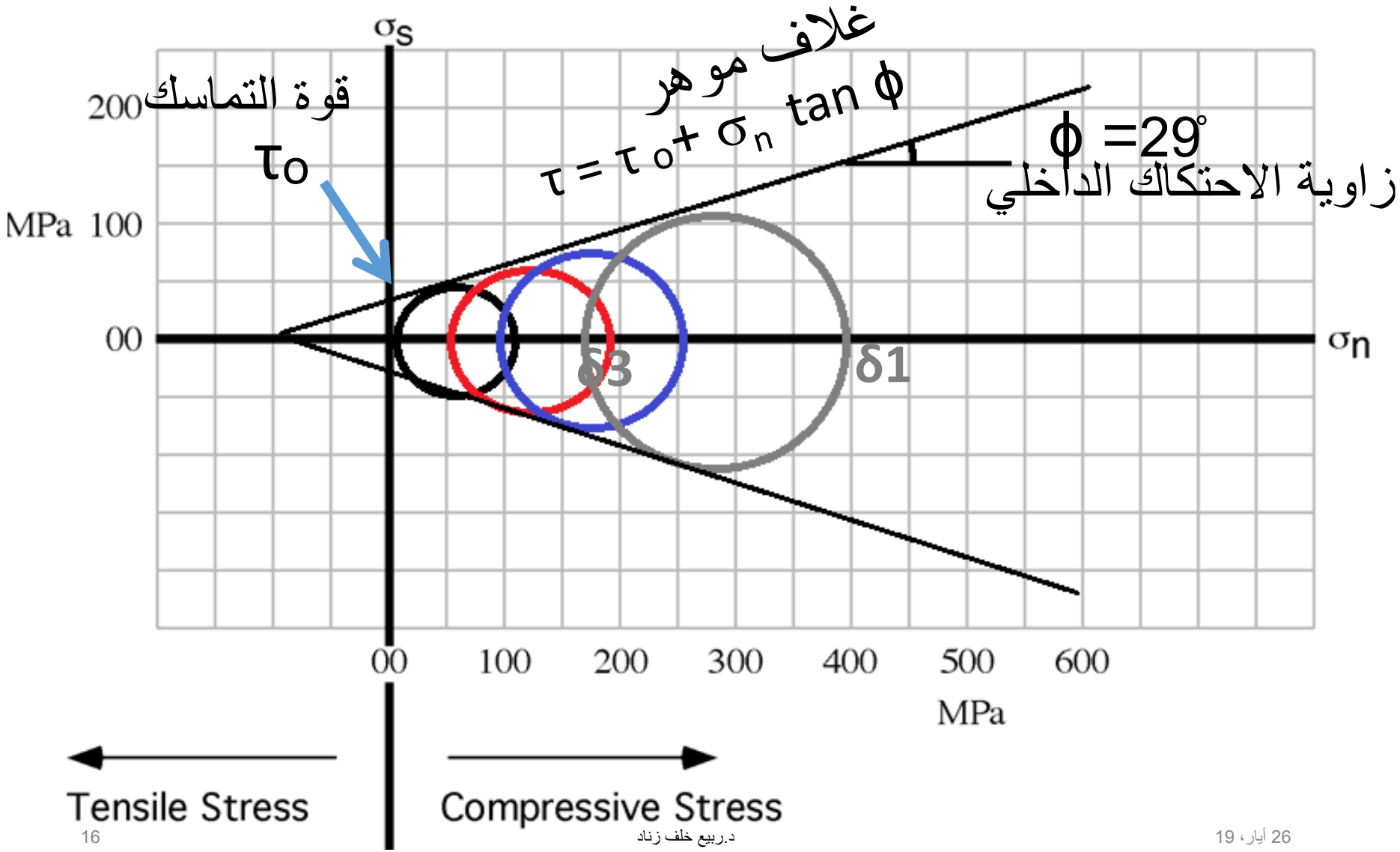
Θ

ان الشكل السابق يمثل تجربة واحدة حيث يمكن من خلاله استنتاج الاجهاد العمودي والاجهاد القصي من خلال الزاوية التي يصنعها الكسر مع محور الاجهاد الرئيس.

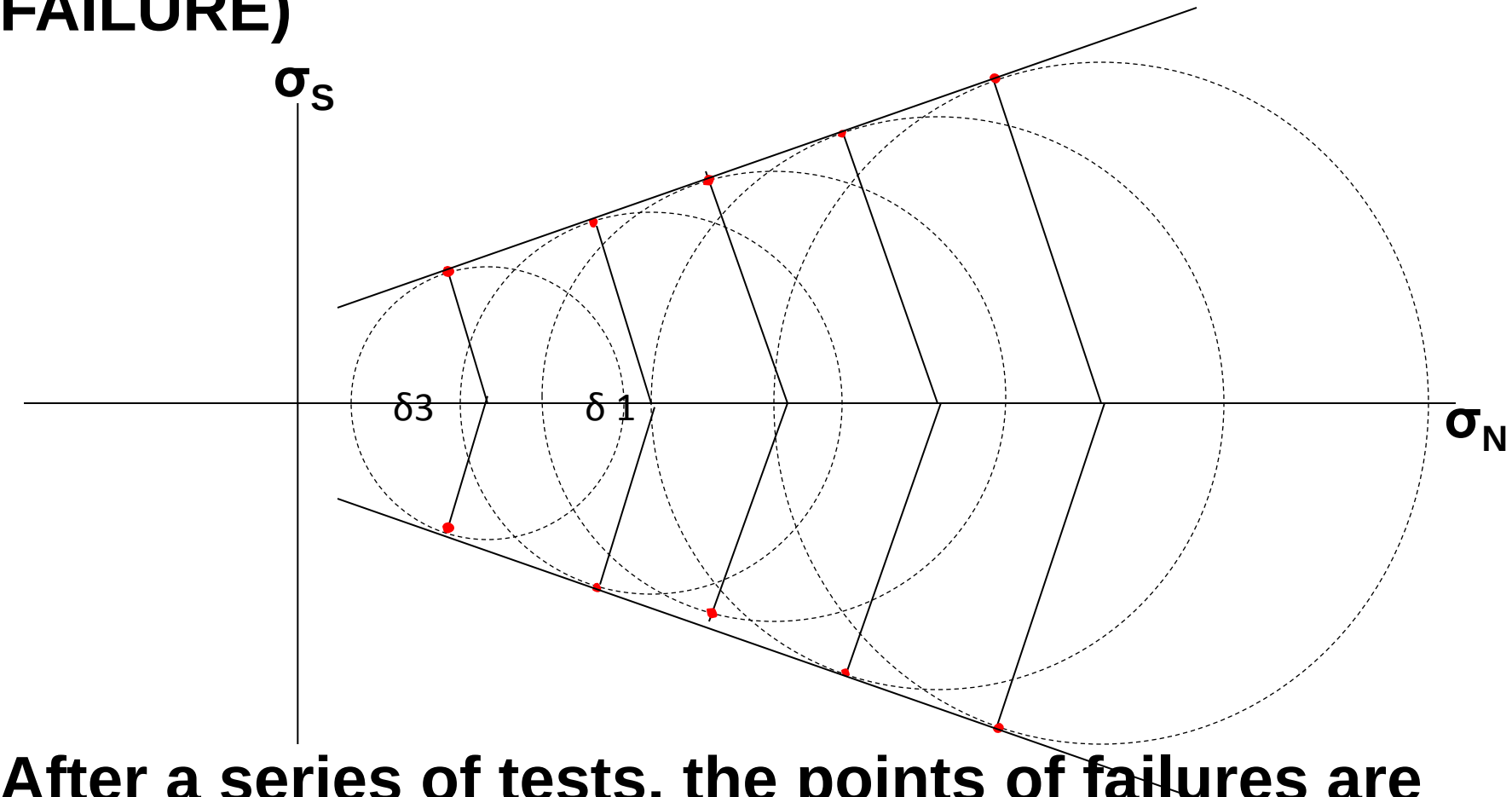
ولغرض تحديد مقاومة القص الكلية للنموذج تحت الاجهادات الملسطة يجب اجراء سلسة من التجارب بقيم مختلفة من الضغط الحاصر بحيث تستمر التجربة الى ان يحدث الكسر. ويتم في كل تجربة تسجيل الضغط الحاصر (الاجهاد)(δ3) ومن ثم تسجيل الاجهاد المحوري (δ1) الذي يحصل عنده الكسر. ومن ثم يتم تسقيط هذه القيم على المحور الافقي لمخطط موهر وبالتالي رسم دائرة موهر لكل تجربة ليتشكل مخطط دوائر موهر كما في الشكل التالي.



حساب قوة التماسك Cohesive strength
و زاوية الاحتكاك الداخلي Angle of internal friction

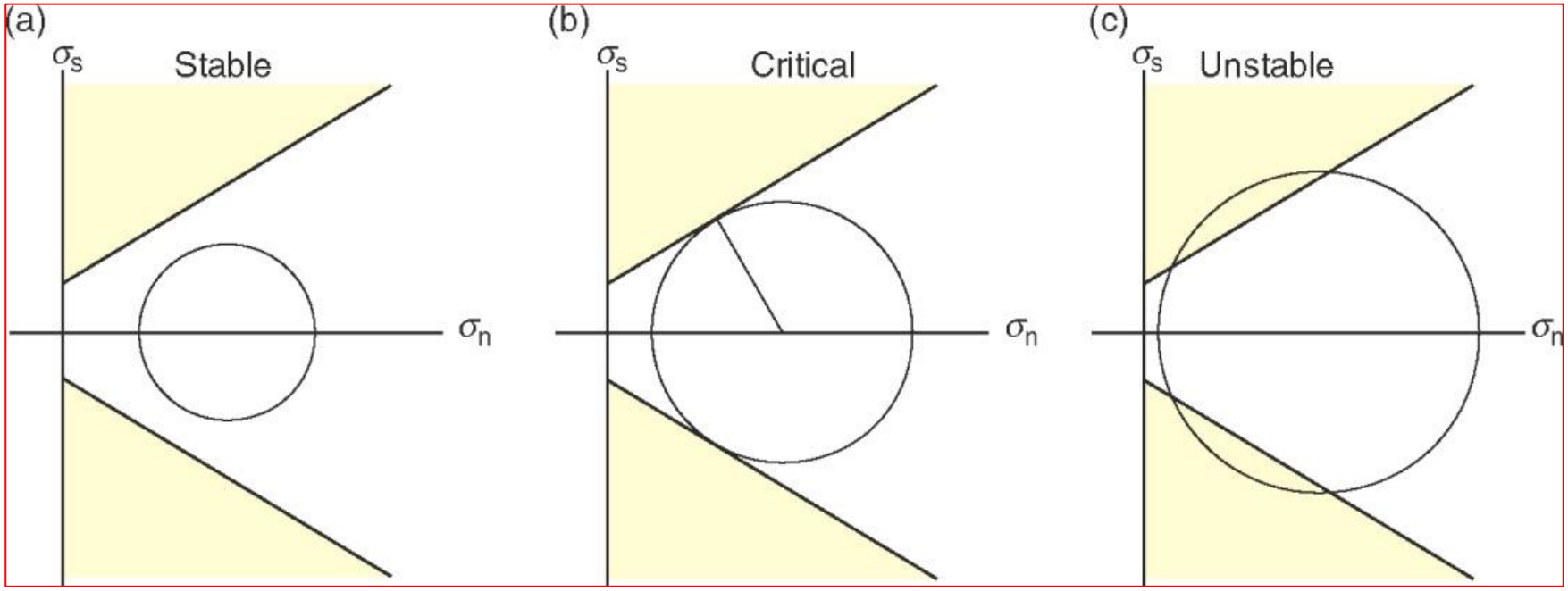


•**The normal and shear stress values of brittle failure for the rock is recorded (POINT OF FAILURE)**



After a series of tests, the points of failures are joined together to define a FAILURE ENVELOPE

تحت هذا الغلاف (الخط المستقيم المائل) فان النموذج يتحمل الاجهادات المسلطة عليه ويكون في حالة اجهاد مستقر وليس هناك احتمال للكسر اما تجاوزت احدى دوائر الاجهاد هذا الغلاف فان النموذج يتكسر ولايتحمل هذا الاجهاد لذلك يجب عدم تجاوز قيم الاجهاد المسلط لبناية أى منشأ هندسي (سطحي او تحت سطحي) غلاف موهر لصخور ذلك الموقع.



Mean Stress and Deviatoric Stress

In a system with unequal principal stresses σ1 , σ2 and σ3 it is convenient to recognize a mean stress,which represent the hydrostatic stress component of field stress .the remaining part of stress is refered to as the deviatoric stress components.

so we subdivide the stress into two components, the **mean stress** and the **deviatoric** stress.

The **mean stress** is defined as (σ1 + σ2 + σ3)/3, using the symbol σm.

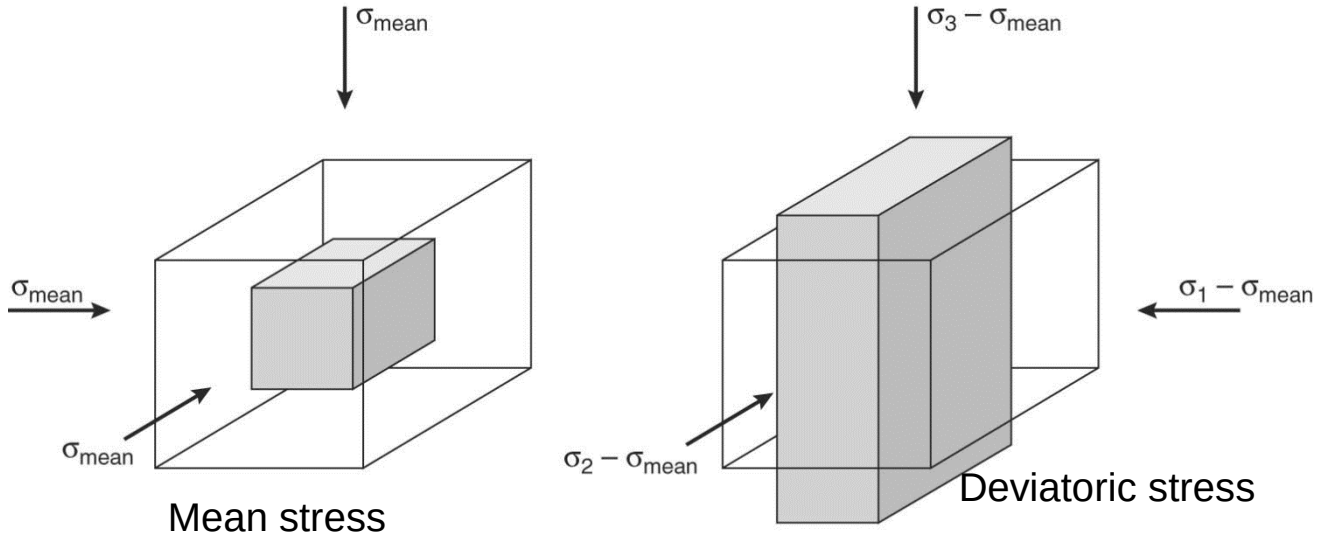
The **deviatoric stress** (σdev), is the difference between **mean stress** and **total stress** .

$$\sigma_{total} = \sigma_{mean} + \sigma_{dev}$$

$$\sigma_{devl} = \sigma_{total} - \sigma_{mean}$$

الاجهاد الكلي المسلط على نقطة معينة هو مجموع (معدل الاجهاد+الاجهاد المسؤول عن التغيير في الشكل).

جهد الانحراف,(σdev) :هو احد مكونات الاجهاد المسؤوله عن التشوه في الشكل distortion وهو يساوي الفرق بين الاجهاد الكلي العامل باتجاه معين ومعدل الاجهاد العام



(a) Mean stress causes volume change and (b) deviatoric stress causes shape change.

لاحظ لكل وجه من المكعب تشوه بفعل اجهاد ديفاتوري خاص به نتج عن طرح معدل الاجهاد من الاجهاد الرئيسي العامل على ذلك الوجه.

- وبذلك سيكون لمحاور الاجهاد الرئيسية الثلاثة ثلاثة محاور اجهاد دفياتورية أو انحرافي Three principal deviatoric stress وهي كما ياتي:

δ'1(deva.) = δ1 – δm or (2 δ1 – δ2 – δ3) / 3

Where $\sigma_{mean}\,[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3]/3$

δ'2(deva.) = δ2 – δm or (2 δ2 – δ1 – δ3) / 3

δ'3(deva.) = δ3 – δm or (2 δ3 – δ1 – δ2) / 3

- ان الاجهاد الدفياتوري هو الذي يسبب التشوه Distortion والاجهاد الهيدروستاتيكي يسبب ال Dilation. ولهذا نجد أن نظام الاجهاد المؤثر على جسم يقسم تأثيره إلى قسمين الأول Dilationوهو تغير بالحجم والثاني Distortion وهو التشوه المفصول عن تغير الحجم

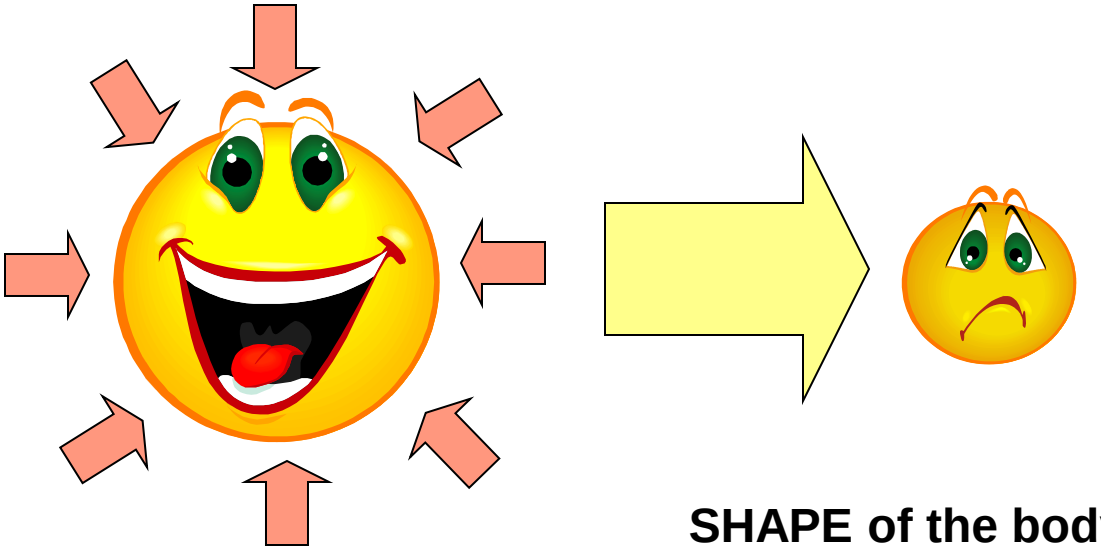
Hydrostatic (or mean) Stress

The mean stress is often called the hydrostatic component of stress or the **hydrostatic pressure,** because a fluid is stressed equally in all directions. Because the magnitude of the hydrostatic stress is equal in all directions it is an **isotropic stress component**

عندما تكون محاور الاجهاد الرئيسية متساوية، فان الاجهاد العمودي متساوي على أي مستوٍ في الجسم، ولا وجود للانفعال القصي في هذا الجسم، ويكون التأثير فقط في تغيير الحجم. ويكون هذا التغيير أحياناً تشوهاً مرناً (يزول بزوال الاجهاد) أو يكون تشوهاً لدناً (تشوه دائمي).

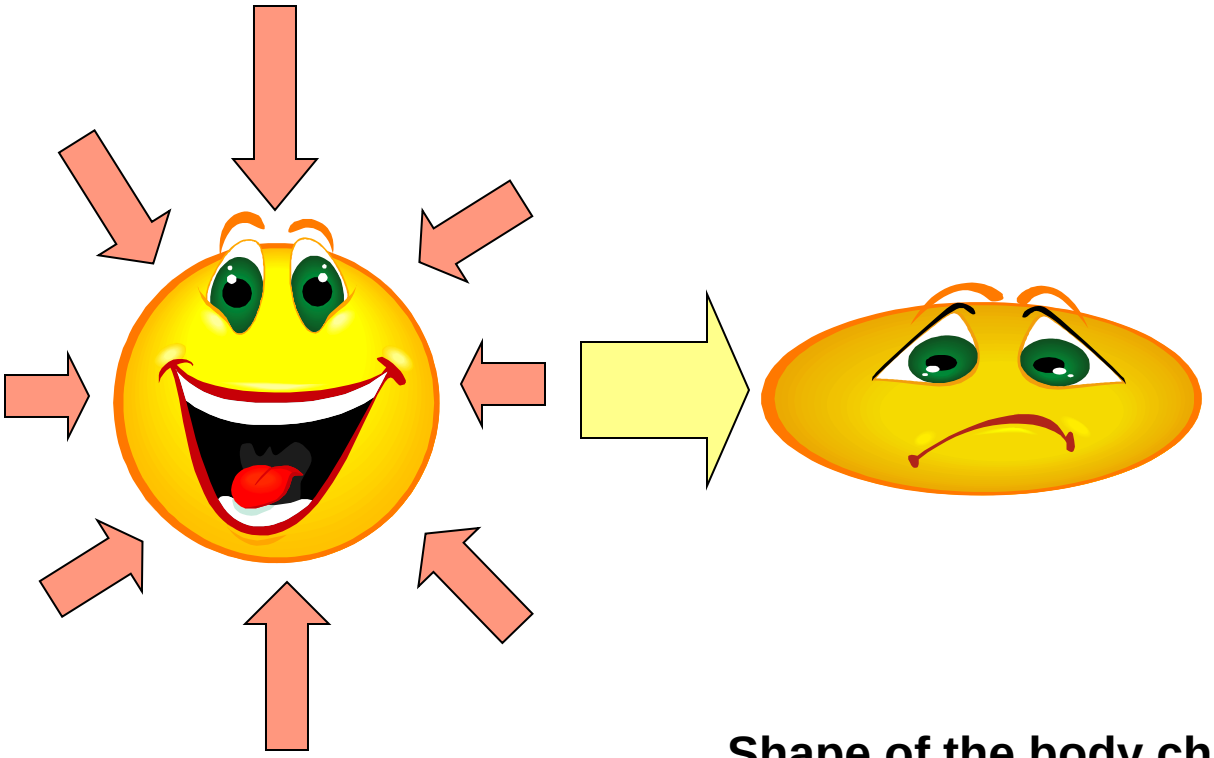
Properties:-

- Has no shear stress component
- All principal stresses are equal ($\sigma1= \sigma2= \sigma3$)
- Changes the volume (or density) of the body under stress
- As depth increases, the hydrostatic stress on rocks increases



Increased mean stress

SHAPE of the body remains the same. SIZE changes



Increased Deviatoric Stress

Shape of the body changes.
Size remains the same

Example - Deviatoric & Mean stress

Given: σ_1 = 8 Mpa, σ_2 = 5 Mpa, and σ_3 = 2 Mpa

Find the mean and the diviatoric stresses

The mean stress (σ_m):

σ_m = (8 + 5 + 2) / 3 = 5 MPa

$$\sigma_{devl}\,(\sigma_n') = \sigma_{total} - \sigma_{mean}$$

The deviatoric stresses (σ_n'):

(compressive) σ_1' = 8-5 = 3 Mpa

σ_2' = 5-5 = 0 Mpa

(tensile) σ_3' = 2-5 = -3 Mpa

STRESS TRAJECTORIES AND STRESS FIELDS until now we have been considering stress at a point, but normally stress will vary through out a rock body.

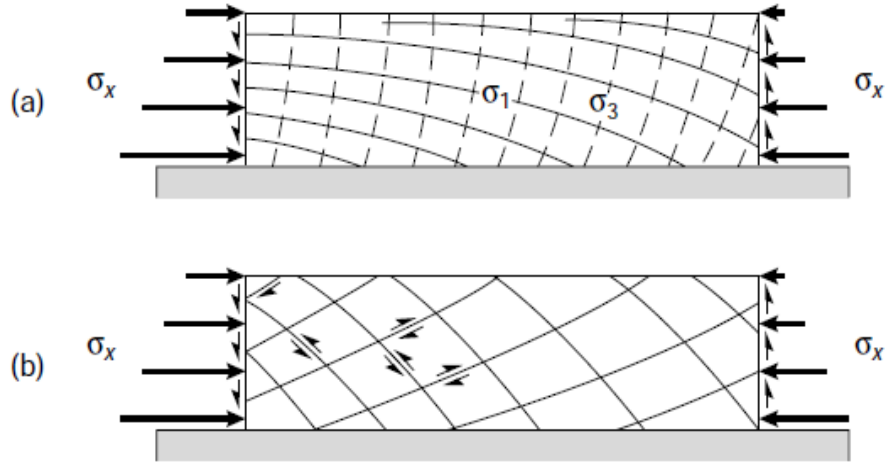
By connecting the orientation of principal stress vectors at several points in a body, you obtain trajectories that show the variation in orientation of that vector within the body, which are called **Stress Trajectories**.

Generally, stress trajectories for the maximum and minimum principal stresses are drawn, and a change in trend means a change in orientation of these principal stresses.

Collectively, principal stress trajectories represent the orientation of the **Stress Field** in a body.

In some cases the magnitude of a particular stress vector is represented by varying the spacing between the trajectories. An example of the stress field in a block that is pushed on one side is shown in the Figure. If the stress at each point in the field is the same in magnitude and orientation, the stress field is *homogeneous;*otherwise it is *heterogeneous*,

The orientation of stress trajectories under natural conditions typically varies, arising from the presence of discontinuities in rocks, the complex interplay of more than one stress field (like gravity), or contrast in rheology.

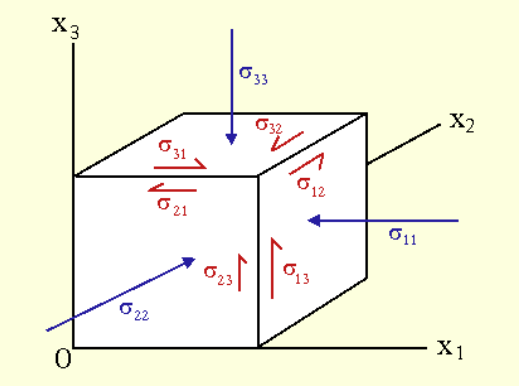


a) Theoretical stress trajectories of σ1 (full lines) and σ3 (dashed lines) in a block that is pushed from the left resisted by frictional forces at its base. Using the predicted angle between maximum principal stress (σ1) and fault surface of around 30° (Coulomb failure criterion ,we can predict the orientation of faults, as shown in (b).

متجه الاجهاد Stress Vector والاجهاد الكامل Stress Tensor

يمثل متجه الاجهاد : هو متجه الاجهاد الذي يعمل على السطح في نقطة معينة ويكون ذو مقدار كمي معين (vector quantity)

الاجهاد الكامل: هو الاجهاد المسلط على السطح في نقطة معينة ولكن من جميع الاتجاهات المحتملة. ان متجهات الاجهاد المحتملة تلتقي جميعها في نقطة ويسمى بالاجهاد الكامل ويتم التعامل مع مركبات الاجهادات بطريقة المصفوفات Matrixes



$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

each of the three planes has one normal component & two shear components

therefore,

9 components necessary to define stress at a point

3 normal (الارقام المتشابهة σ11 σ22 تمثل الاجهاد العامودي σ33)

6 shear

TERMINOLOGY AND SYMBOLS OF FORCE AND STRESS

Force :-Mass times acceleration ($F = m \cdot a$; Newton's second law); symbol F

Stress :-Force per unit area (F/A); symbol σ

Anisotropic stress:- At least one principal stress has a magnitude unequal to the other principal stresses

(describes an ellipsoid)

Deviatoric stress :-Component of the stress that remains after the mean stress is removed; this component of the stress contains the six shear stresses; symbol σdev

Differential stress:- The difference between two principal stresses (e.g., $\sigma 1 - \sigma 3$), which by definition is ≥ 0; symbol σd

Homogeneous stress ;-Stress at each point in a body has the same magnitude and orientation

Hydrostatic stress/pressure :-Isotropic component of the stress; strictly, the pressure at the base of a water column

Inhomogeneous stress :-Stress at each point in a body has different magnitude and/or orientation

Isotropic stress:- All three principal stresses have equal magnitude (describes a sphere)

Lithostatic stress/pressure :-Isotropic pressure at depth in the Earth arising from the overlying rock column (density ×gravity × depth, $\rho \cdot g \cdot h$); symbol PI

Mean stress:- $(\sigma1+\sigma2+\sigma3)/3$; symbol σ mean

Normal stress:- Stress component oriented perpendicular to a given plane; symbol σn

Principal plane :-Plane of zero shear stress; three principal planes exist

Principal stress:- The normal stress on a plane with zero shear stress; three principal stresses exist, with the convention $\sigma1 \geq \sigma2 \geq \sigma3$

Shear stress:- Stress parallel to a given plane; symbol σs (sometimes the symbol τ is used)

Stress ellipsoid:- Geometric representation of stress; the axes of the stress ellipsoid are the principal stresses

Stress field :-The orientation and magnitudes of stresses in a body

Stress tensor:- Mathematical description of stress (stress is a second-order tensor)

Stress trajectory :-Principal stress directions in a body

HOMOGENEOUS and *ISOTROPIC* يجب التمييز بين مفاهيم الاجهاد الاتية

Homogenous Field Stress:

If the stress at each point in the field is the same in magnitude and orientation, the stress field is *homogeneous;* otherwise it is *heterogeneous*

Homogeneity and heterogeneity of the stress field should not be confused with isotropic and anisotropic stress.

Isotropic means that the principal stresses are equal (describing a sphere), whereas homogeneous stress implies that the orientation and shape of the stress ellipsoids are equal throughout the body.

In a homogeneous stress field, all principal stresses have the same orientation and magnitude.

The orientation stress trajectories under natural conditions typically of varies, arising from the presence of discontinuities in rocks