1.8 Newton-cotes Methods

Assume that $x_k = x_0 + kh$ are equally spaced nodes and $f_k = f(x_k)$. The first four closed Newton-Cotes quadrature formulas are

$$1 - \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \cong \frac{h}{2}[f_0 + f_1] \qquad \text{(trapezoidal rule)}$$

$$2 - \int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \cong \frac{h}{3}[f_0 + 4f_1 + f_2] \qquad \text{(Simpson's 1/3 rule)}$$

$$3 - \int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3}{8}h[f_0 + 3f_1 + 3f_2 + f_3] \qquad \text{(Simpson's 3/8 rule)}$$

$$4 - \int_{x_0}^{x_4} f(x)dx = \frac{2}{45}h[7f_0 + 32f_1 + 12f_2 + 32f_3 + 7f_4] \qquad \text{(Boole's rule)}$$

صيغة (1) هي صيغة شبه المنحرف والتي تتضمن نقطتين وخطأ البتر فيها من الرتبة $O(h^3)$, صيغة (2) هي صيغة 1/3 سمبسون وتتضمن ثلاث نقاط و صيغة (3) هي صيغة 3/8 سمبسون وتتضمن اربع نقاط ورتبة الخطأ في كلا الصيغتين $O(h^5)$, واما الصيغة (4) فهي صيغة بول ذات النقاط الخمس وان رتبة الخطأ فيها $O(h^7)$.

Example (13): Find the value of the integral

$$\int_0^1 (1 + e^{-x}\sin(4x))\,dx$$

by using Newton-Cotes formulas.

Sol.:

For the trapezoidal rule, n=1 → h = 1 and

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = \frac{1}{2}[1 + 0.72159] = 0.86079$$

For 1/3 Simpson's rule, n=2 → h = 1/2, and we get

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \frac{1/2}{3}\left[f(0) + f(\frac{1}{2}) + f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{6}[1 + 4(1.55152) + 0.72159] = 1.32128$$

For Simpson's 3/8 rule, n=3 →h = 1/3, and we obtain

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{3\left(\frac{1}{3}\right)}{8}\left[f(0) + 3f\left(\frac{1}{3}\right) + 3f\left(\frac{2}{3}\right) + f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{8}[1 + 3(1.69642) + 3(1.23447) + 0.72159)]$$

$$= 1.31440$$

For Boole's rule, n=4→h = 1/4, and the result is

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{2\left(\frac{1}{4}\right)}{45}\left[7f(0) + 32f\left(\frac{1}{4}\right) + 12f\left(\frac{1}{2}\right) + 32f\left(\frac{3}{4}\right) + 7f(1)\right]$$

$$= \frac{1}{90}[(7(1) + 32(1.65534) + 12(1.55152) + 32(1.06666) + 7(0.72159)]$$

$$= 1.30859$$

The true value of this integral is (1.3082506046426) and the approximation 1.30859 from Boole's rule is best.

Chapter Two

Least Square Method Approximation

In curve fitting we are given n points $(x_1,y_1), (x_2,y_2),\dots, (x_n,y_n)$ and we want to determine a function f(x) such that $f(x_i)=y_i$, $i=1,2,\dots,n$

بمعنى نريد ايجاد العلاقة الدالية بين المتغيرين x, y

$$y=f(x)=f(x,c_1,c_2,\dots,c_m) \tag{1}$$

علينا ايجاد قيم الثوابت التي تجعل f افضل دالة ترافق البيانات المعطاة وهذا يحصل عندما تكون قيمة مجموع مربعات الانحرافات اقل ما يمكن. بعبارة اخرى نجد قيم الثوابت $c_1,c_2,\dots,c_m$ التي تجعل المجموع δ في نهايته الصغرى حيث

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^2 \quad , \quad \delta_i = y_i - f(x_i, c_1, \dots, c_m) \tag{2}$$

اولا": اذا كانت الدالة الاوفقية خطية Linear Square Approximation بالنسبة لـ x فان صيغتها العامة هي

$$y=f(x,c_1,c_2) = c_1+c_2x \tag{3}$$

ولايجاد قيم الثوابت (c_1,c_2) يجب حل منظومة المعادلات

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{n}(y_i - c_1 - c_2\, x_i)=0 \\ &\sum_{i=1}^{n}(y_i - c_1 - c_2\, x_i)x_i=0 \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

وبالتبسيط نحصل على معادلتين خطيتين في c_2 , c_1 وهما

$$\left.\begin{aligned} &nc_1 + c_2\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i \\ &c_1\sum_{i=1}^{n} x_i + c_2\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

وعليه قيمة كل من c_1 , c_2 هي

$$c_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

(6)

$$c_2 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}$$

Example: Find a straight-line approximation for the following data, using the least squares method

x	1	3	4	6	8	9	11	14
y	1	2	4	4	5	7	8	9

Sol.: we find the values

$\sum_{i=1}^{8} x_i = 56$, $\sum_{i=1}^{8} y_i = 40$

$\sum_{i=1}^{8} {x_i}^2 = 524$, $\sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 364$

Now from eq.(6) we have

$$c_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{(40)(524) - (56)(364)}{(8)(524) - (56)^2} = \frac{6}{11}$$

$$c_2 = \frac{n \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{n \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} = \frac{(8)(364) - (56)(40)}{(8)(524) - (56)^2} = \frac{7}{11}$$

And from eq.(3) we get

$$\Longrightarrow \quad y = c_1 + c_2 x = \frac{6}{11} + \frac{7}{11} x$$