المشتقات The Derivatives

تعريف:

المشتقة للدالة f هي دالة، يرمز لها f' ، بحيث أن قيمتها في كل عدد x في منطلق f معطاة بـــ

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

بشرط أن تكون هذه الغاية موجودة.

وتقرأ $f'(x)$ مشتقة الدالة $f(x)$ بالنسبة لــ x . وهناك رموز أخرى تستعمل لمشتقة الدالة $y = f(x)$ بالنسبة الى x ، وهي $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)$, y' .

قد يكون للدالة $f(x)$ مشتقة في العدد a ، وعندئذ تكون قيمتها $f'(\mathrm{a})$ ويقال أن الدالة قابلة الأشتقاق differentiable في a ، كما قد يحدث خلاف ذلك، أي قد لا يكون للدالة $f(x)$ مشتقة في a لعدم وجود الغاية، وفي هذه الحالة يقال أن الدالة غير قابلة الأشتقاق في a .

ويقال أن الدالة $f(x)$ قابلة الأشتقاق في الفترة I أذا كانت قابلة الأشتقاق في كل عدد x في I وقد تكون الدالة قابلة الأشتقاق في كل نقاط منطلقها.

لأيجاد المشتقة الأولى للدالة f عند x بأستعمال التعريف نتبع الخطوات الاتية:

1) نحسب $f(x + \Delta x)$
2) نحسب الفرق $f(x + \Delta x) - f(x)$
3) نحسب المقدار $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$
4) أخيراً للحصول على $f'(x)$ نحسب الغاية $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

مثال: جد مشتقة الدالة بأستعمال التعريف

$$f(x) = x^2 + 3x - 2$$

ثم أستعمل النتيجة لأيجاد قيمة المشتقة في $x = 3$ (أي أيجاد $f'(3)$) .

الحل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^2 + 3(x+\Delta x) - 2$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x - 2$$

$$f(x+\Delta x) - f(x)$$
$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x - 2 - (x^2 + 3x - 2)$$

$$= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x + 3\Delta x - 2 - x^2 - 3x + 2$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x$$

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 3\Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta x(2x + \Delta x + 3)}{\Delta x}$$

$$= 2x + \Delta x + 3$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x + 3) = 2x + 0 + 3$$

$$= 2x + 3$$

لذلك، فأن هذه الدالة قابلة الأشتقاق في $\mathbb{R}$.

قيمة المشتقة في $x = 3$ ، هي

$$f'(3) = 2(3) + 3 = 6 + 3 = 9.$$

ملاحظة: يرمز، في بعض الأحيان، لقيمة المشتقة للدالة $f(x)$ في $x = \mathrm{a}$ بالرمز

$$f'(x)|_{x=\mathrm{a}}$$

مثال: لتكن $f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$ ، حيث أن a , b ثابتان (أي $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathbb{R}$). جد $f'(x)$.

الحل:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x) = \mathrm{a}\,(x+\Delta x) + \mathrm{b} = \mathrm{a}\,x + \mathrm{a}\,\Delta x + \mathrm{b}$$

$$f(x+\Delta x) - f(x) = \mathrm{a}\,x + \mathrm{a}\,\Delta x + \mathrm{b} - (\mathrm{a}x + \mathrm{b}) = \mathrm{a}\,\Delta x$$

لذلك، فأن

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\mathrm{a}\,\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \mathrm{a} = \mathrm{a}.$$

مثال: لتكن $f(x)=\sqrt{x}$، حيث $x \geq 0$. جد $f'(x)$ عندما $x>0$.

الحل:

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x)=\sqrt{x+\Delta x}$$

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$$

ولأجل حساب هذه الغاية نضرب البسط والمقام في مرافق البسط، الذي هو $\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\right)\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x+\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}\cdot\sqrt{x+\Delta x}\ -x}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}$$

$$=\frac{1}{\left(\sqrt{x+0}+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

بشرط $x>0$. لاحظ أن المشتقة غير موجودة عندما $x=0$.

مثال: جد مشتقة الدالة $f(x)=\frac{1}{x-2}$ وبين أنه لا توجد مشتقة عندما $x=2$.

الحل:

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\frac{1}{x+\Delta x-2}-\frac{1}{x-2}=\frac{(x-2)-(x+\Delta x-2)}{(x+\Delta x-2)(x-2)}$$

$$=\frac{x-2-x-\Delta x+2}{(x+\Delta x-2)(x-2)}=\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x-2)(x-2)}$$

وهكذا، يكون

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{-\Delta x}{(x+\Delta x-2)(x-2)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x \cdot (x+\Delta x-2)(x-2)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{(x+\Delta x-2)(x-2)}$$

$$= \frac{-1}{(x-2)(x-2)} = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

واضح أن $f'(x)$ موجودة لكل قيم x الحقيقية ما عدا $x = 2$.

مبرهنة: أذا كانت f دالة قابلة الأشتقاق في a ، فأن f مستمرة في a .

المثال الاتي يبين أن عكس هذه المبرهنة غير صحيح دائماً، أي قد تكون الدالة f مستمرة في العدد a ولكن مشتقتها في a غير موجودة.

مثال: تأمل دالة القيمة المطلقة $f(x) = |x|$. هذه الدالة مستمرة في $x = 0$ وقيمتها تساوي صفراً، ولكن مشتقتها عند هذه النقطة غير موجودة، كما مبين في الاتي:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{|x+\Delta x| - |x|}{\Delta x}$$

لذلك، فأن

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|0+\Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

فأذا كانت $\Delta x > 0$ ، فأن $f'(0) = 1$ ، وأذا كانت $\Delta x < 0$ ، فأن $f'(0) = -1$. لذلك فأن الغاية اليمنى لا تساوي الغاية اليسرى عندما $\Delta x \to 0$. وعليه، فأن هذه الغاية غير موجودة، أي $f'(0)$ ، غير موجودة.

بعض قوانين الأشتقاق

يطلق على عملية أيجاد مشتقة دالة ما التفاضل differentiation ، ولكن عملية التفاضل هذه مطولة ومملة وخاصة عندما تكون الدالة معقدة. لذلك وجب وضع قواعد وقوانين تسهل أجراء عملية التفاضل.

مبرهنة: أذا كان $f(x) = \mathrm{c}$ لكل x ، حيث c ثابت حقيقي، فأن $f'(x) = 0$. أي مشتقة الثابت تساوي صفراً.

مثال: أذا كانت $f(x) = 7$ ، فأن $f'(x) = 0$ وأذا كانت $f(x) = -5$ ، فأن $f'(x) = 0$

مبرهنة: أذا كان n عدداً صحيحاً موجباً وكانت $f(x) = x^{\mathrm{n}}$ ، فأن $f'(x) = \mathrm{n}\, x^{\mathrm{n}-1}$.

مثال: اذا كانت $f(x) = x^3$ ، فأن $f'(x) = 3x^2$ وأذا كانت $f(x) = x^5$ ، فأن $f'(x) = 5x^4$

مبرهنة: أذا كان c ثابتاً وكانت f دالة قابلة الأشتقاق، فأن $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\mathrm{c} \cdot f(x)] = \mathrm{c}\, f'(x)$.

مثال: اذا كانت $f(x) = 3x^6$ ، فأن $f'(x) = 3(6)\, x^5 = 18\, x^5$

مبرهنة: لتكن $f(x)$ و $\mathrm{g}(x)$ دالتين قابلتي الأشتقاق، فأن

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\, f(x) \pm \mathrm{g}(x)\,] = f'(x) \pm \mathrm{g}'(x)$$

ويمكن أن نكتب قاعدة الاشتقاق المتضمنة في هذه المبرهنة كالاتي:

$$(f \pm \mathrm{g})'(x) = f'(x) \pm \mathrm{g}'(x)$$

أذا كانت

$$f(x) = \mathrm{a_n}\, x^{\mathrm{n}} + \mathrm{a_{n-1}}\, x^{\mathrm{n}-1} + \mathrm{a_{n-2}}\, x^{\mathrm{n}-2} + \cdots \mathrm{a_1}\, x + \mathrm{a_0}$$

متعددة حدود، فأن

$$f'(x) = \mathrm{n}\, \mathrm{a_n}\, x^{\mathrm{n}-1} + (\mathrm{n}-1)\, \mathrm{a_{n-1}}\, x^{\mathrm{n}-2} + (\mathrm{n}-2)\, \mathrm{a_{n-2}}\, x^{\mathrm{n}-3} + \cdots + \mathrm{a_1}$$

مثال: أذا كانت $f(x) = 5x^7 - 2x^6 + 3x^2 - 2x - 4$ ، فأن

$$f'(x) = 35x^6 - 12x^5 + 6x - 2$$

مبرهنة: أذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين قابلتي الأشتقاق، فأن

$$\frac{d}{dx}[\, f(x) \cdot g(x)\,] = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

or

$$(f \cdot g)'(x) = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

مثال: أذا كانت $f(x) = (3x - 2) \cdot (4x + 1)$ ، فأن

$$f'(x) = (3x - 2) \cdot (4) + (4x + 1) \cdot (3) = 12x - 8 + 12x + 3$$

$$= 24x - 5$$

مبرهنة: أذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين قابلتي الأشتقاق، وأن $g(x) \neq 0$ ، فأن

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

مثال: أذا كانت $f(x) = \frac{8\,x^7}{2x-1}$ ، حيث $x \neq \frac{1}{2}$ ، فأن

$$f'(x) = \frac{(2x - 1) \cdot (56\,x^6) - (8\,x^7) \cdot (2)}{(2x - 1)^2} = \frac{112\,x^7 - 56\,x^6 - 16\,x^7}{(2x - 1)^2}$$

$$= \frac{96\,x^7 - 56\,x^6}{(2x-1)^2}$$

مثال: لتكن

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 5}{x - 9}\,,\ x \neq 9$$

فأن

$$f'(x) = \frac{(x - 9) \cdot (2\,x - 2) - (x^2 - 2x + 5) \cdot (1)}{(x - 9)^2}$$

$$= \frac{2\,x^2 + 18 - 18\,x - 2x - x^2 + 2x - 5}{(2x - 1)^2} = \frac{x^2 - 18\,x + 13}{(2x - 1)^2}$$

مثال: لتكن $g(t)=\frac{t^2}{t^2-4}$ ، أوجد قيمة $\frac{dg}{dt}$ عندما $t=0$ ، $t=1$.

الحل:

$$\frac{dg}{dt}=\frac{(t^2-4)\cdot(2\,t)-(t^2)\cdot(2\,t)}{(t^2-4)^2}=\frac{2\,t^3-8\,t-2\,t^3}{(t^2-4)^2}=\frac{-8\,t}{(t^2-4)^2}$$

$$\frac{dg}{dt}\Big|_{t=0}=0 \quad , \quad \frac{dg}{dt}\Big|_{t=1}=\frac{-8}{9}$$

مثال: لتكن $y=f(x)=\frac{1}{2x-1}$ ، حيث $x\neq\frac{1}{2}$ ، فأن

$$y'=\frac{df}{dx}=\frac{(2x-1)\cdot(0)-(1)\cdot(2)}{(2x-1)^2}=\frac{0-2}{(2x-1)^2}=\frac{-2}{(2x-1)^2}$$

مبرهنة: أذا كان n عدداً صحيحاً موجباً وكانت $f(x)=x^{-n}$ ، فأن $f'(x)=-n\,x^{-n-1}$

مثال: أذا كانت $f(x)=x^5-3x^{-2}+2x^{-3}+1$ ، فأن

$$f'(x)=5x^4-3(-2)x^{-2-1}+2(-3)x^{-3-1}+0=5x^4+6\,x^{-3}-6\,x^{-4}$$

يمكن تعميم هذه القاعدة لتشمل الحالات التي يكون فيها الأس عدداً نسبياً.

مثال: أذا كانت $f(x)=5\sqrt[3]{x}$ ، أي أن $f(x)=5\,(x)^{\frac{1}{3}}$ ، فأن

$$f'(x)=5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)(x)^{\frac{1}{3}-1}=\frac{5}{3}\,(x)^{\frac{-2}{3}}=\frac{5}{3}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{-2}=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$$

مبرهنة: أذا كانت $y=[\,f(x)\,]^n$ ، حيث أن n عدد صحيح وأن $f(x)$ دالة قابلة للأشتقاق، فأن

$$\frac{dy}{dx}=n\,[f(x)]^{n-1}\cdot f'(x)$$

مثال: لتكن $y = 2\,(3\,x^2 + 5)^4 - 3\,(x^2 + 3x - 2)^{-5}$. جد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 2\,(4)(3\,x^2 + 5)^3 \cdot (6\,x) - 3(-5)(x^2 + 3x - 2)^{-6} \cdot (2\,x + 3)$$

$$= 48\,x\,(3\,x^2 + 5)^3 + 15\,(x^2 + 3x - 2)^{-6} \cdot (2\,x + 3)$$

مثال: لتكن $y = 4\,(2\,x^2 + 3\,x - 2)^2$. جد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 4\,(2)(2\,x^2 + 3\,x - 2)^{2-1} \cdot (4\,x + 3)$$
$$= 8\,(2\,x^2 + 3\,x - 2) \cdot (4\,x + 3)$$

مشتقة الدالة المركبة . قاعدة السلسلة The Chain Rule

مبرهنة: لتكن $y = f(u)$ دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى u ، ولتكن $u = g(x)$ دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x ، فأن الدالة المركبة $y = (f \circ g)(x)$ قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x وأن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ أذا كانت $y = (\,x^2 + 5\,x - 3)^6$.

الحل: نفرض أن $u = x^2 + 5\,x - 3$ ، عندئذ تكون $y = u^6$. ومنها نحصل على

$$\frac{du}{dx} = 2x + 5 \quad , \quad \frac{dy}{du} = 6\,u^5$$

وبموجب قاعدة السلسلة،

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 6\,u^5 \cdot (2x + 5) = 6(x^2 + 5\,x - 3)^5 \cdot (2x + 5)$$

مثال: أذا كانت $u = x + 3 \quad , \quad y = u^2 + 5u - 1$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل: بموجب قاعدة السلسلة،

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (2u + 5) \cdot (1) = 2\,u + 5$$

بما أن $u = x + 3$ ، فأن

$$\frac{dy}{dx} = 2\,u + 5 = 2(x + 3) + 5 = 2x + 6 + 5 = 2x + 11$$

مثال: أذا كانت $u = 5x^2 \quad , \quad y = u^3 + 2u + 4$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل: بموجب قاعدة السلسلة،

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (3\,u^2 + 2) \cdot (10\,x)$$

بما أن $u = 5x^2$ ، فأن

$$\frac{dy}{dx} = (3\,u^2 + 2) \cdot (10\,x) = (3\,(5x^2)^2 + 2) \cdot (10\,x)$$
$$= (75\,x^4 + 2) \cdot (10\,x) = (75x^4 + 2) \cdot (10\,x) = 750\,x^5 + 20\,x$$

مثال: أذا كانت $u = \frac{1}{x+1} \quad , \quad y = 4u^2 + 4$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$.

مثال: أذا كانت $u = 4\,x^2 - 2\,x + 5 \quad , \quad y = u^3$ ، فجد $\frac{dy}{dx}$.

الدوال الضمنية Implicit Functions

قد تصادفنا في بعض الأحيان علاقات ومعادلات متضمنة متغيرين أو أكثر مثل

$x^2 + y^2 = 9 \quad , \quad 3y^3x^2 + 6yx - 5x^2 = 10$

في مثل هذه المعادلات يصعب أو يتعذر التعبير عن أحد المتغيرات بدلالة الأخر مباشرة، وحتى في حالة أيجاد أحد المتغيرين، مثل y ، بدلالة x ، فأن ذلك يؤدي الى أكثر من دالة واحدة. فأذا أخذنا المعادلة $x^2 + y^2 = 9$ نجد منها $y = \pm\sqrt{9 - x^2}$ ، وهذه علاقة مكونة من دالتين هما $y = -\sqrt{9 - x^2} \quad , \quad y = \sqrt{9 - x^2}$. ولهذا السبب يطلق على هذه العلاقات دوال ضمنية، لكونها تتضمن دالة واحدة على الأقل ولذلك عند أيجاد $\frac{dy}{dx}$ من دالة ضمنية نعتبر y دالة لــ x ، ونطبق قواعد الأشتقاق المناسبة.

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ من الدالة الضمنية $x^3 + 4\,y^3 - x\,y^2 + 7\,x = 10$

الحل: نعتبر y دالة للمتغير x ونأخذ المشتقة لكل حد من الحدود بتطبيق القواعد

$$3x^2 + 12\,y^2\frac{dy}{dx} - \left(2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} + y^2\right) + 7 \;= 0$$

ثم نجمع الحدود المحتوية على المشتقة $\frac{dy}{dx}$ في طرف واحد، وننقل الحدود الأخرى الى الطرف الثاني.

$$(12\,y^2 - 2\,x\,y)\frac{dy}{dx} = y^2 - 3x^2 - 7$$

اذاً، $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3x^2 - 7}{12\,y^2 - 2\,x\,y}$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ من الدالة الضمنية $4\,x^2 + 3\,xy - x\,y^2 = 0$

الحل: كما في المثال السابق،

$$8\,x + 3\,x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 3y - \left(x\left(2\,y\,\frac{dy}{dx}\right) + y^2\right) = 0$$

$$8\,x + 3\,x\left(\frac{dy}{dx}\right) + 3y - 2\,x\,y\,\frac{dy}{dx} - y^2 = 0$$

$$(3\,x - 2\,x\,y)\,\frac{dy}{dx} = y^2 - 3\,y - 8\,x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - 3\,y - 8\,x}{3\,x - 2\,x\,y}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ من الدالة الضمنية $2\,y + \sqrt{xy} = 3\,x^3$

الحل:

$$2\,y + (x\,y)^{1/2} = 3\,x^3 \implies 2\,y + x^{1/2}\cdot y^{1/2} = 3\,x^3$$

$$2\,\frac{dy}{dx} + x^{1/2}\cdot\left(\frac{1}{2}\,y^{\frac{1}{2}-1}\,\frac{dy}{dx}\right) + y^{1/2}\cdot\left(\frac{1}{2}\,x^{\frac{1}{2}-1}\right) = 9\,x^{3-1}$$

$$2\,\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\,x^{1/2}\cdot\,y^{\frac{-1}{2}}\,\frac{dy}{dx} + \frac{1}{2}\,x^{\frac{-1}{2}}\cdot\,y^{1/2} = 9\,x^2$$

$$\left(2 + \frac{1}{2}\,x^{1/2}\cdot\,y^{\frac{-1}{2}}\right)\frac{dy}{dx} = 9\,x^2 - \frac{1}{2}\,x^{\frac{-1}{2}}\cdot\,y^{1/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{9\,x^2 - \frac{1}{2}\,x^{\frac{-1}{2}}\cdot\,y^{1/2}}{2 + \frac{1}{2}\,x^{1/2}\cdot\,y^{\frac{-1}{2}}} = \frac{9\,x^2 - \frac{1}{2\,\sqrt{x}}\cdot\sqrt{y}}{2 + \frac{\sqrt{x}}{2}\cdot\,\frac{1}{\sqrt{y}}} = \frac{9\,x^2 - \frac{\sqrt{y}}{2\,\sqrt{x}}}{2 + \frac{\sqrt{x}}{2\,\sqrt{y}}}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ من الدالة الضمنية $x\,y = 1$

الحل:

$$x\,\frac{dy}{dx} + y = 0 \implies x\,\frac{dy}{dx} = -y \implies \frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x}$$

بما أن $y = \frac{1}{x}$ ، فأن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} = \frac{\frac{-1}{x}}{x} = \frac{-1}{x^2}$$

مثال: جد $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$ لكل مما يأتي:

$$x\,\mathrm{y}^3 - 3\,x^2 = x\,\mathrm{y} + 5$$
$$x^2 - 2\,x\,\mathrm{y} + \mathrm{y}^2 = 0$$
$$4\,x^2 + 9\,\mathrm{y}^2 - 36 = 0$$
$$\frac{1}{\mathrm{y}} + \frac{1}{x} = 1$$

المشتقات من المراتب العليا Derivatives of Higher Orders

المشتقة الثانية للدالة $f(x)$ مشتقة المشتقة الأولى $f'(x)$. ويرمز عادة للمشتقة الثانية للدالة $\mathrm{y} = f(x)$ بأحد الرموز الاتية:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{d}x^2} \quad , \quad f''(x) \quad , \quad \mathrm{y}''$$

وبذلك، فأن

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}\right)$$

وبالمثل، نعرف المشتقة الثالثة (أن وجدت) بأنها مشتقة المشتقة الثانية. وهكذا، بالنسبة للمشتقات من الرتبة الرابعة، الخامسة، ... الخ.

لتكن $\mathrm{y} = f(x)$ ولنفرض أن f قابلة للأشتقاق n من المرات في المجال $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ ، فيكون لدينا التعريفات الاتية:

$$\mathrm{y}' = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}(f(x))}{\mathrm{d}x} = f'(x)$$

$$\mathrm{y}'' = \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{y}}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}(f'(x))}{\mathrm{d}x} = f''(x)$$

$$\mathrm{y}''' = \frac{\mathrm{d}^3\mathrm{y}}{\mathrm{d}x^3} = \frac{\mathrm{d}(f''(x))}{\mathrm{d}x} = f'''(x)$$

$$\mathrm{y}^{(4)} = \frac{\mathrm{d}^4\mathrm{y}}{\mathrm{d}x^4} = \frac{\mathrm{d}(f'''(x))}{\mathrm{d}x} = f^{(4)}(x)$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\mathrm{y}^{(\mathrm{n})} = \frac{\mathrm{d}^{\mathrm{n}}\mathrm{y}}{\mathrm{d}x^{\mathrm{n}}} = \frac{\mathrm{d}\left(f^{(\mathrm{n}-1)}(x)\right)}{\mathrm{d}x} = f^{(\mathrm{n})}(x)$$

مثال: جد المشتقات الثلاث الأولى للدالة $y = x^4 + 5\,x^3 - 4\,x + 1$

الحل:

المشتقة الاولى $y' = 4\,x^3 + 15\,x^2 - 4$

المشتقة الثانية $y'' = 12\,x^2 + 30\,x$

المشتقة الثالثة $y''' = 24\,x + 30$

مثال: جد y''' للدالة $y = 6x^5$

الحل:

$$y' = 30\,x^4 \quad , \quad y'' = 120\,x^3 \quad , \quad y''' = 360\,x^2$$

مثال: جد $y^{(6)}$ للدالة $y = 2x^5 + 3x^3 + 5x - 1$

الحل:

$$y' = 10\,x^4 + 9\,x^2 + 5 \quad , \quad y'' = 40\,x^3 + 18\,x$$

$$y''' = 120\,x^2 + 18 \quad , \quad y^{(4)} = 240\,x$$

$$y^{(5)} = 240 \quad , \quad y^{(6)} = 0$$

مثال: جد قيمة y'' للدالة الضمنية $x^2\,y + 3y = 4$ في النقطة $(-1, 1)$ الواقعة على منحني الدالة.

الحل: نوجد المشتقة الأولى بالاشتقاق الضمني:

$$x^2\,y' + y\,(2x) + 3\,y' = 0 \;\Longrightarrow x^2\,y' + 2\,x\,y + 3\,y' = 0$$

نوجد المشتقة الثانية

$$x^2\,y'' + y'(2\,x) + 2\,(x\,y' + y) + 3\,y'' = 0$$

لأيجاد قيمة y'' في النقطة $(-1, 1)$ ، أي عندما $x = -1$, $y = 1$ ، نحتاج أولاً أيجاد قيمة y' في هذه النقطة، وقيمة y' نحصل عليها من العلاقة الأولى وكالاتي:

$$(-1)^2\,y' + 2\,(-1)\cdot\,(1) + 3\,y' = 0 \;\Longrightarrow\; y' + 3\,y' = 2 \Longrightarrow 4\,y' = 2$$

$$y' = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

والان نعوض هذه القيم في العلاقة الثانية (أي في المشتقة الثانية)

$$x^2\, y'' + y'(2\,x) + 2\,(x\, y' + y) + 3\, y'' = 0$$

$$(-1)^2\, y'' + \frac{1}{2}\big(2\,(-1)\big) + 2\left((-1)\,\left(\frac{1}{2}\right) + 1\right) + 3\, y'' = 0$$

$$y'' - 1 + 1 + 3\, y'' = 0 \implies y'' + 3\, y'' = 0 \implies 4\, y'' = 0 \Rightarrow y'' = 0$$

مبرهنة رول Rolle's Theorem

لتكن f دالة مستمرة في الفترة المغلقة $[a, b]$ وقابلة الأشتقاق في الفترة المفتوحة (a, b) فأذا كان $f(a) = f(b)$ ، فأنه يوجد على الاقل عدد واحد c في الفترة المفتوحة (a, b) بحيث أن $f'(c) = 0$.

مثال: لتكن $f(x) = x^3 - 4\,x + 2$ ، فان

$$f'(x) = 3\,x^2 - 4$$

وهي موجودة لكل قيم x الحقيقية، أي أن f قابلة الأشتقاق ومستمرة على $\mathbb{R}$.

نلاحظ أن

$$f(-2) = f(2) = f(0) = 2$$

ومن جهة أخرى، نجد أن

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3\,x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$$

وبموجب مبرهنة رول يجب أن يكون هنالك $c_1 \in (-2, 0)$, $c_2 \in (0, 2)$ بحيث أن

$$f'(c_1) = f'(c_2) = 0$$

ولما كان

$$-2 < -\frac{2}{\sqrt{3}} < 0 \qquad , \qquad 0 < \frac{2}{\sqrt{3}} < 2$$

فأن

$$c_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} \qquad , \qquad c_1 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

مثال: بين فيما أذا كانت الدوال الاتية تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة المبينة إزاء كل منها ؟. اذا كانت كذلك جد قيم c الممكنة.

$f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-3)^2 \quad , \qquad [-3 \text{ و } 4]$
$f(x) = (2-x)^2 \quad , \qquad [0,4]$
$f(x) = |x| \quad , \qquad [-1,1]$
$f(x) = x \quad , \qquad [0,1]$
$f(x) = \mathrm{k} \quad , \qquad [\mathrm{a},\mathrm{b}]$
$f(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x-2} \quad , \qquad [1,3]$

مبرهنة القيمة المتوسطة في التفاضل Mean–Value Theorem

اذا كانت f دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ وقابلة الأشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b) ، فأنه يوجد على الأقل عدد واحد c في الفترة المفتوحة (a,b) بحيث أن

$f'(\mathrm{c}) = \frac{f(\mathrm{b})-f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}}$

مثال: لتكن $f(x) = \frac{1}{2}x^3$. جد كل الأعداد الحقيقية، c ، في الفترة $(-2,2)$ والتي كل منها يحقق مبرهنة القيمة المتوسطة.

الحل: نوجد $f'(x) \quad , \quad f(-2) \quad , \quad f(2)$

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 \quad , \quad f(-2) = -4 \quad , \quad f(2) = 4$

بما أن الدالة متعددة حدود، فهي مستمرة وقابلة الأشتقاق في $[-2,2]$.

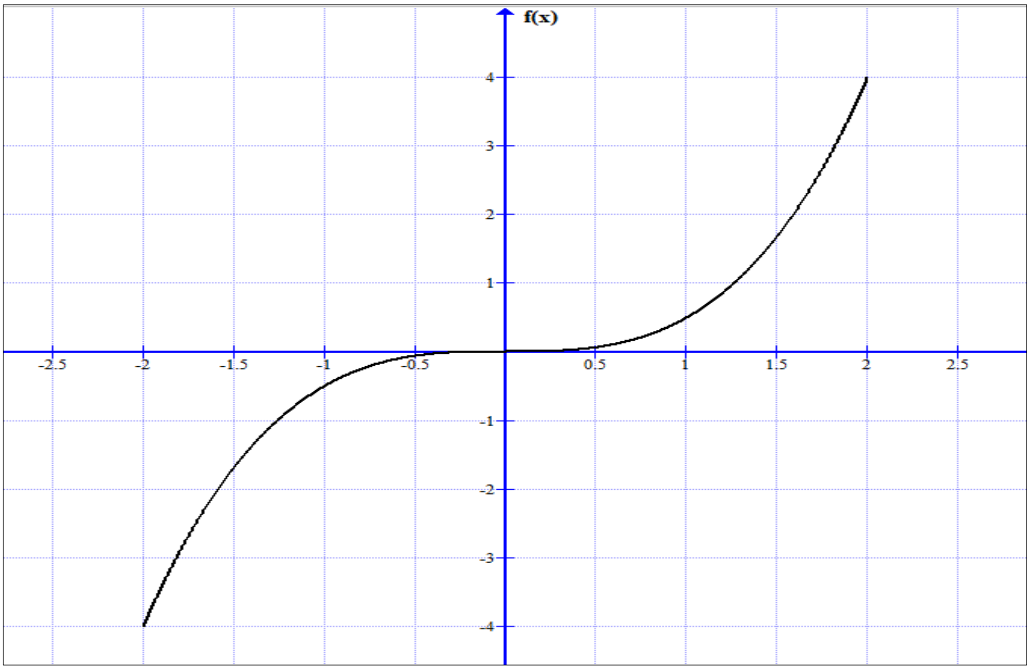
ليكن c أي عدد في الفترة $(-2,2)$ يحقق مبرهنة القيمة المتوسطة، فأن

$$f'(\mathrm{c}) = \frac{f(\mathrm{b})-f(\mathrm{a})}{\mathrm{b}-\mathrm{a}} = \frac{f(2)-f(-2)}{2-(-2)} = \frac{4-(-4)}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

بما أن $f'(x) = \frac{3}{2}x^2$ ، فأن $f'(\mathrm{c}) = \frac{3}{2}\mathrm{c}^2$. أي أن $\frac{3}{2}\mathrm{c}^2 = \mathrm{c}$. وهكذا، فأن

$\mathrm{c} = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

أي، يوجد عددان $\frac{2}{\sqrt{3}}$, $-\frac{2}{\sqrt{3}}$ في الفترة $(-2,2)$ يحققان مبرهنة القيمة المتوسطة.



مثال: لتكن $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2\,x$. جد كل الأعداد الحقيقية، c ، في الفترة $(0,3)$ والتي كل منها يحقق مبرهنة القيمة المتوسطة.

الحل: واضح أن الدالة متعددة حدود، لذلك فهي مستمرة وقابلة الأشتقاق في $[0,3]$.

فأنه يوجد على الأقل عدد c في الفترة $(0,3)$.

نوجد $f'(x)$, $f(0)$, $f(3)$

$$f'(x) = x^2 + 2 \quad , \quad f(0) = 0 \quad , \quad f(3) = 15$$

$$f'(\mathrm{c}) = \frac{f(\mathrm{b}) - f(\mathrm{a})}{\mathrm{b} - \mathrm{a}} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{15 - 0}{3} = 5$$

وبما أن $f'(x) = x^2 + 2$ ، فأن

$$f'(\mathrm{c}) = \mathrm{c}^2 + 2$$

$$\mathrm{c}^2 + 2 = 5 \Rightarrow \mathrm{c}^2 = 3 \Rightarrow \mathrm{c} = \pm\sqrt{3}$$

بما أن $-\sqrt{3}$ خارج (لا ينتمي الى الفترة) $(0,3)$ ، فأن العدد الوحيد الذي يحقق مبرهنة القيمة المتوسطة في الفترة المعطاة للدالة f هو $\mathrm{c} = \sqrt{3}$.

مثال: بين فيما أذا كانت الدوال الاتية تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة على الفترة المبينة إزاء كل منها ؟. اذا كانت كذلك جد قيم c الممكنة.

$f(x) = \sqrt{x} \ , \qquad [0, 9]$

$f(x) = x^2 - 6x + 4 \ , \qquad [-1, 7]$

$f(x) = \sqrt{25 - x^2} \ , \qquad [-4, 0]$

$f(x) = 3 + \sqrt{x} \ , \qquad [0, 4]$

$f(x) = \dfrac{1}{x} \ , \qquad [-1, 1]$

$f(x) = \dfrac{x}{1 + x} \ , \qquad [1, 3]$