الاستمرارية The Continuity

تعريف:

يقال للدالة f أنها مستمرة continuous في العدد الحقيقي a أذا وفقط أذا كان a في منطلقها وكان $\lim_{x\to \mathrm{a}} f(x) = f(\mathrm{a})$.

وبعبارة أخرى، تكون f مستمرة في العدد a أذا وفقط اذا حققت الشروط الثلاثة الاتية:

1) $f(\mathrm{a})$ موجودة، أي، أن f معرفة في a ،

2) $\lim_{x\to \mathrm{a}} f(x)$ موجودة،

3) $\lim_{x\to \mathrm{a}} f(x) = f(\mathrm{a})$.

ويقال للدالة أنها غير مستمرة discontinuous في a أذا لم تحقق شرطاً أو أكثر من الشروط الثلاثة المذكورة أعلاه. كما يقال للدالة f أنها مستمرة في فترة I أذا كانت مستمرة في كل نقطة في I . كما يقال أن f مستمرة (دائماً) اذا كانت مستمرة في كل عدد حقيقي.

مثال: أي دالة متعددة حدود تكون مستمرة في كل عدد حقيقي.

مثال: أفرض أن $x \geq 0$, $f(x) = \sqrt{x}$. هذه الدالة مستمرة في كل عدد حقيقي موجب، لأنه، أذا كان $\mathrm{a} > 0$ ، فأن

$$\lim_{x\to \mathrm{a}} f(x) = \lim_{x\to \mathrm{a}} \sqrt{x} = \sqrt{\mathrm{a}} = f(\mathrm{a})$$

ولكنها غير مستمرة في العدد 0 ، لأن $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}$ غير موجودة. وهكذا تكون الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ مستمرة في الفترة $\mathbb{R}^+$ (أي في الفترة $(0, \infty)$) .

مثال: هل الدالة المعرفة بـــ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} \ , & x \neq -3 \quad \text{عندما} \\ -6 \ , & x = -3 \quad \text{عندما} \end{cases}$$

مستمرة في العدد -3 ؟.

الحل:

$$\lim_{x\to -3} f(x) = \lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to -3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)}$$
$$= \lim_{x\to -3} (x-3) = -6 = f(-3)$$

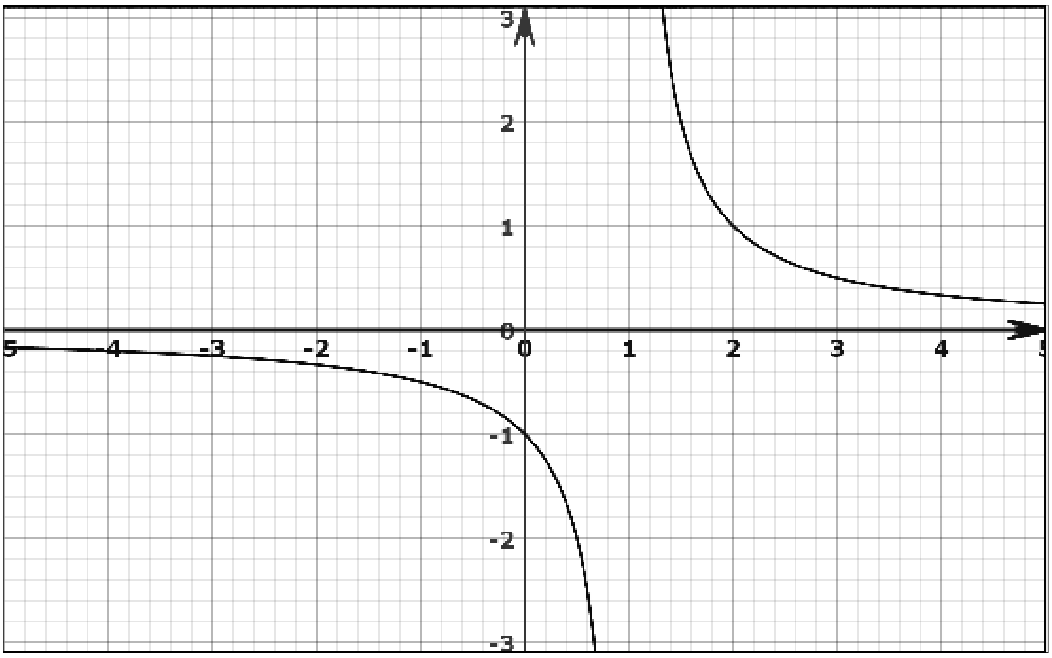
أذاً الدالة مستمرة في العدد -3 .

مثال: هل الدالة $x \neq 1$, $f(x) = \frac{1}{x-1}$ مستمرة في العدد 1 ؟.

الحل: واضح أن هذه الدالة غير معرفة في العدد 1 ، أي ، $f(1)$ غير موجودة. كما أن

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} = \infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

أذاً، الدالة غير مستمرة في العدد 1.



مثال: تأمل الدالة المعرفة بــــ

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x \le 1 \text{ عندما} \\ 2 & , \quad x > 1 \text{ عندما} \end{cases}$$

هل الدالة g مستمرة في العدد 1 ؟ ولماذا ؟ أرسم مخططها.

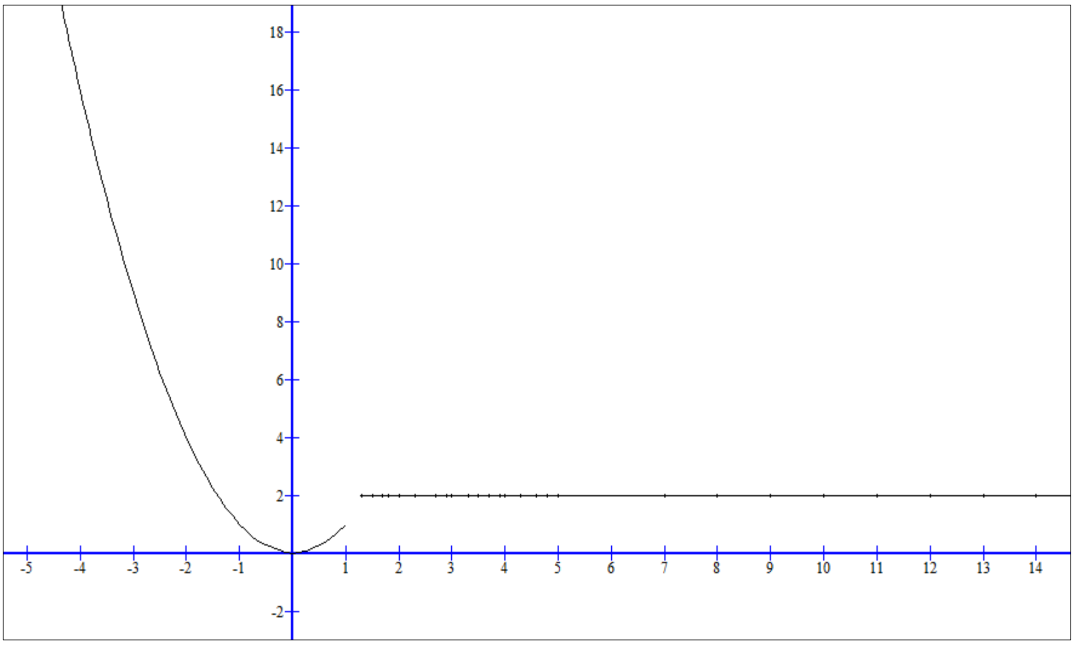
الحل: واضح أن الدالة g معرفة في العدد 1 ، وأن

$$g(1) = (1)^2 = 1$$

والان نوجد الغاية من يمين العدد 1 والغاية من يساره،

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} (2) = 2$$
$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2) = (1)^2 = 1$$

بما أن الغاية اليمنى لا تساوي الغاية اليسرى في العدد 1 ، فأن $\lim_{x\to 1} g(x)$ غير موجودة. وبناء على ذلك، فأن g غير مستمرة (أو منفصلة) عند $x = 1$ لأنها لا تحقق الشرط الثاني.



مثال: تأمل الدالة f المعرفة بــــ

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5 \ , & x \neq 1 \ \text{عندما} \\ 2 \ , & x = 1 \ \text{عندما} \end{cases}$$

نلاحظ أن

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2(1) - 5 = -3$$

بينما $f(1) = 2$ لذلك فأن $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$. وعليه فأن الدالة f غير مستمرة عند $x = 1$.

مثال: الدالة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} \quad , \quad x\neq 1 & \text{عندما} \\ 1 \quad , \quad x=1 & \text{عندما}\end{cases}$$

غير مستمرة عندما $x=1$ ، لأن $\lim_{x\to 1} f(x)=2$ ، ولكن $f(1)=1$.

مثال: أفرض أن $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$.

هذه الدالة غير مستمرة عندما $x=2$ ، لأن $f(2)$ غير معرفة، ومع ذلك

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)}\right)=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$

مثال: أفرض أن $x\neq 1 \quad , \quad f(x)=\frac{1}{x-1}$.

هذه الدالة غير مستمرة في العدد 1 ، لأن $f(1)$ غير موجودة، وكذلك الغاية غير موجودة.

مثال: أفرض أن

$$g(x)=\begin{cases} x^2 \quad , \quad x\leq 1 & \text{عندما} \\ 2 \quad , \quad x>1 & \text{عندما}\end{cases}$$

واضح أن هذه الدالة غير مستمرة في العدد 1.

مثال: أفرض أن

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

هذه الدالة غير مستمرة عندما $x=0$ ، لأن $f(0)$ غير موجودة (أو غير معرفة)، وكذلك الغاية غير موجودة.

مبرهنات في الاستمرارية

مبرهنة: لتكن f و g دالتين مستمرتين العدد a . فان

$$f\cdot\mathrm{g}\ \ ,\ \ f-\mathrm{g}\ \ ,\ \ f+\mathrm{g}$$

مستمرة عند a. كذلك $\frac{f}{\mathrm{g}}$ مستمرة عند a عندما $\mathrm{g(a)}\neq 0$.

مبرهنة:

لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة متعددة الحدود، بحيث أن لكل $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=\mathrm{a_n}\,x^{\mathrm{n}}+\mathrm{a_{n-1}}\,x^{\mathrm{n-1}}+\mathrm{a_{n-2}}\,x^{\mathrm{n-2}}+\cdots+\mathrm{a_1}\,x+\mathrm{a_0}$$

فأن f مستمرة في $\mathbb{R}$.

مبرهنة:

لتكن $f:\mathrm{D}\to\mathbb{R}$ دالة نسبية، بحيث أن لكل $x\in\mathrm{D}$

$$f(x)=\frac{\mathrm{g}(x)}{\mathrm{h}(x)}$$

وأن $\mathrm{D}=\{x\colon x\in\mathbb{R}\,,\mathrm{h}(x)\neq 0\}$ ، فأن f مستمرة في D .

الأستمرارية في فترة

تعريف:

يقال للدالة f أنها مستمرة في الفترة المفتوحة $(\mathrm{a,b})$ أذا كانت مستمرة في كل عدد حقيقي في $(\mathrm{a,b})$.

مثال: الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ مستمرة في الفترة المفتوحة $(0,\infty)$.

تعريف:

يقال للدالة f أنها مستمرة من اليمين في العدد a أذا وفقط أذا أستوفت الشروط الاتية:

1) $f(\mathrm{a})$ موجودة، أي، أن f معرفة في a ،

2) $\lim\limits_{x\to\mathrm{a}^+}f(x)$ موجودة،

3) $\lim\limits_{x\to\mathrm{a}^+}f(x)=f(\mathrm{a})$.

مثال: الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ مستمرة من اليمين عند $x=0$ ، لأن

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=0=f(0)$$

تعريف:

يقال للدالة f أنها مستمرة من اليسار في العدد a أذا وفقط أذا أستوفت الشروط الاتية:

1) $f(\mathrm{a})$ موجودة، أي، أن f معرفة في a ،

2) $\lim_{x\to \mathrm{a}^-} f(x)$ موجودة،

3) $\lim_{x\to \mathrm{a}^-} f(x)=f(\mathrm{a})$.

مثال: الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ غير مستمرة من اليسار عند $x=0$ ، لأن $\lim_{x\to 0^-}\sqrt{x}$ غير موجودة.

مثال: تأمل الدالة $x\le 2$, $f(x)=\sqrt{2-x}$. واضح أن

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\sqrt{2-x}=0=f(2)$$

وعليه، فأن هذه الدالة مستمرة من اليسار في العدد 2 ، ولكنها غير مستمرة من اليمين في العدد 2 .

ملاحظة: تكون الدالة مستمرة في عدد ما a اذا وفقط أذا كانت مستمرة من اليمين ومستمرة من اليسار في العدد a .

تعريف:

يقال للدالة f أنها مستمرة في الفترة المغلقة $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ أذا وفقط أذا كانت مستمرة في الفترة المفتوحة (a,b) ، ومستمرة من اليمين في العدد a ومستمرة من اليسار في العدد b .

أي أن الدالة f تكون مستمرة في الفترة المغلقة $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ أذا كانت مستمرة في الفترة المفتوحة (a,b) ، و معرفة عند a و b بحيث يكون:

$$\lim_{x\to \mathrm{b}^-} f(x)=f(\mathrm{b}) \quad , \quad \lim_{x\to \mathrm{a}^+} f(x)=f(\mathrm{a})$$

مثال: الدالة $f(x)=\sqrt{x}$ مستمرة في الفترة $[0,\infty)$

مثال: الدالة $f(x)=\sqrt{2-x}$ مستمرة في الفترة $(-\infty,2]$

مثال: أثبت أن الدالة $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ مستمرة في الفترة $[-1,1]$

الحل: واضح أن f مستمرة في الفترة المفتوحة $(-1,1)$. ولما كان

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(-1)$$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{1 - x^2} = 0 = f(1)$$

فأن f مستمرة من اليمين في العدد -1 ، ومستمرة من اليسار في العدد 1 . وبذلك، تكون f مستمرة في الفترة المغلقة $[-1,1]$.

مثال: جد كل قيم x التي تكون فيها الدالة غير مستمرة

$$f(x) = \frac{x^5 + x^3 - 4x^2 + 2}{x^2 - 5x + 6}$$

الحل: بما أن الدالة $f(x)$ كسرية (نسبية)، فأنها مستمرة عند كل الأعداد الحقيقية، عدا الاعداد x التي تحقق المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$ (أي ما عدا الأعداد التي تجعل المقام صفراً)، أي أن $(x - 3)(x - 2) = 0$ ، وهذا يعني $x = 2$ ، $x = 3$.

مثال: جد الفترة أو الفترات التي تكون فيها الدالة مستمرة

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 9}$$

الحل: بما أن الدالة $f(x)$ كسرية، فأنها مستمرة في كل نقطة في منطلقها. منطلق الدالة $f(x)$ هو جميع الاعداد الحقيقية ما عدا الاعداد التي تحقق المعادلة $x^2 - 9 = 0$ ، أي أن $(x - 3)(x + 3) = 0$ ، وهذا يعني $x = \pm 3$. أذاً منطلق هذه الدالة هو كل الأعداد الحقيقية ما عدا $x = 3$ ، $x = -3$. ونعبر عن ذلك بالشكل:

$$(-\infty, -3) \cup (-3,3) \cup (3, \infty)$$

أذاً الدالة $f(x)$ مستمرة في الفترة $(-\infty, -3) \cup (-3,3) \cup (3, \infty)$.

مثال: أدرس استمرارية الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 4 \ , & x < 2 \\ 3x + 4 \ , & x \geq 2 \end{cases}$$

الحل:

من تعريف هذه الدالة، نرى أن $f(x) = 3x - 4$ عندما يكون x أي عدد حقيقي أصغر من 2 . بما أن $3x - 4$ دالة متعددة حدود، فأنها مستمرة عند أي عدد حقيقي اصغر من 2 كذلك من التعريف نجد أن $f(x) = 3x + 4$ عندما يكون x أي عدد حقيقي أكبر أو يساوي 2 ، وهي أيضاً دالة متعددة حدود.

نستطيع القول أن $f(x)$ دالة مستمرة لكل عدد حقيقي اصغر من 2 ، وكذلك دالة مستمرة عند أي عدد حقيقي أكبر أو يساوي 2 .

والان نبحث أستمرارية الدالة عندما $x = 2$.

- $f(2) = 3(2) + 4 = 10$ معرفة
- $\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (3x - 4) = 3(2) - 4 = 2$
- $\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (3x + 4) = 3(2) + 4 = 10$

بما أن $\lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$ ، فأن $\lim_{x \to 2} f(x)$ غير موجودة. وبالتالي لم يتحقق الشرط الثاني من شروط الاستمرارية عند 2 .

أذاً الدالة مستمرة عند أي عدد حقيقي ما عدا $x = 2$.