الغايات للدوال

مثال: لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ دالة، بحيث أن لكل $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 - 1$$

ماذا يحدث لقيمة الدالة $f(x)$ عندما نعطي لـــ x قيماً قريبة جداً الى العدد 2 من الجهتين، أي أعطاء قيم لـــ x أقل بقليل من العدد 2 وأكثر بقليل من العدد 2 . لأجل ذلك نكون الجدول الاتي:

x	1.7	1.9	1.99	1.999	1.9999	2.3	2.1	2.05	2.001	2.0001
$f(x)$	1.89	2.61	2.96	2.996	2.9996	4.29	3.41	3.203	3.004	3.0004

نلاحظ ان قيمة الدالة f تقترب جداً الى العدد 3 كلما أقتربت قيمة x من العدد 2 . ونعبر عن هذه النتيجة بالقول: غاية الدالة $f(x) = x^2 - 1$ في العدد 2 هي 3 .

ويكتب ذلك رياضياً

$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}(x^2 - 1) = 3$$

مثال: جد غاية الدالة

$$f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

عندما تقترب x من 1 .

الحل: نلاحظ أن $\sqrt{x}$ يقترب من 1 كلما أقتربت قيمة x من 1، وأن $1+\sqrt{x}$ يقترب من 2 كلما أقتربت قيمة x من 1، ولذلك نستنتج أن:

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2}$$

حساب غاية الدالة

لحساب غاية الدالة $f(x)$ عندما $x \to \mathrm{a}$ نعوض في هذه الدالة عند $x = \mathrm{a}$ وقد نحصل عليها وقد لا نحصل عليها عندئذ نتبع طرائق أخرى للحل.

مثال: لتكن $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ دالة، بحيث أن لكل $x\in\mathbb{R}$

$$f(x)=x^3$$

أحسب غاية الدالة $f(x)$ عندما $x\to 2$.

الحل:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\ x^3=2^2=8$$

وهذا يعني أن $f(x)$ تقترب من 8 عندما تقترب قيمة x من العدد 2 .

مثال: أذا كانت

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & , \quad x\neq 2 \\ 0 & , \quad x=2 \end{cases}$$

جد $\lim_{x\to 2} f(x)$.

الحل: نلاحظ أنه أذا كان $x\to 2$ هذا يعني أن $x\neq 2$ ، فأذاً

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\ x^2=4$$

الغايات من جهة واحدة One−Sided Limits

الغاية من اليمين (أو الغاية اليمنى) للدالة $f(x)$ هي غاية الدالة عندما x تقترب من العدد a من اليمين (أي بقيم أكبر) ونرمز لها بـــ $\lim_{x\to a^+} f(x)$ أو $\lim_{\substack{> \\ x\to a}} f(x)$.

الغاية من اليسار (أو الغاية اليسرى) للدالة $f(x)$ هي غاية الدالة عندما x تقترب من العدد a من اليسار (أي بقيم أصغر) ونرمز لها بـــ $\lim_{x\to a^-} f(x)$ أو $\lim_{\substack{< \\ x\to a}} f(x)$.

مبرهنة وحدانية الغاية

أذا كانت غاية الدالة $f:D\to\mathbb{R}$ في العدد a موجودة فأنها تكون وحيدة، أي، أذا كانت

$$\lim_{x\to a} f(x)=\mathrm{L}_1 \quad , \qquad \lim_{x\to a} f(x)=\mathrm{L}_2$$

فأن $\mathrm{L}_1=\mathrm{L}_2$.

ملاحظة:

- من الواضح ان وجود العبارة $\lim_{x\to a} f(x)$ تستلزم وجود تساوي كل من غاية اليمين $\lim_{x\to a^+} f(x)$ وغاية اليسار $\lim_{x\to a^-} f(x)$. أي أن

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x)$$

- أن وجود غاية من اليمين لا يستلزم وجود غاية من اليسار والعكس صحيح أيضاً.

مثال: أذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \geq 0 \\ 0 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

أحسب $\lim_{x\to 0} f(x)$.

الحل: أذا أقتربت قيمة x الى الصفر من جهة اليمين (أي بقيم أكبر) ، فأن:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

وأذا أقتربت قيمة x الى الصفر من جهة اليسار (أي بقيم أصغر) ، فأن:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$$

وبالتالي، فان $\lim_{x\to 0} f(x)$ ليست وحيدة. وعليه، فأن غاية الدالة غير موجودة عندما تقترب x من الصفر.

مثال: أفرض أن $f(x) = \sqrt{x}$. أدرس وجود الغاية عندما $x \to 0$.

الحل: منطلق هذه الدالة هو $[0, \infty)$. لنفرض أولاً أن x تقترب من 0 من اليمين (أي بقيم أكبر) فنجد أن $\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x} = 0$ موجودة. أما أذا جعلنا x تقترب من 0 من اليسار (أي بقيم أصغر) فنجد أن $\lim_{x\to 0^-} \sqrt{x}$ غير موجودة لأن الدالة $f(x) = \sqrt{x}$ غير معرفة عندما تكون قيمة x أصغر من الصفر. وعليه فان $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}$ غير موجودة.

مثال: جد $\lim_{x\to 3} f(x)$ اذا كانت

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5 & , \quad x \leq 3 \\ \sqrt{x + 13} & , \quad x > 3 \end{cases}$$

الحل: عندما تقترب x الى العدد 3 من اليسار فأن الدالة $f(x)$ هي $f(x) = x^2 - 5$ ، وبالتالي فأن

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-}(x^2-5) = 3^2 - 5 = 4$$

وعندما تقترب x الى العدد 3 من اليمين فأن الدالة $f(x)$ هي $f(x) = \sqrt{x+13}$ ، فأن

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+}(\sqrt{x+13}) = \sqrt{3+13} = 4$$

بما أن الغايتين من اليمين ومن اليسار متساويتين، فأن الغاية موجودة وتساوي 4 . أي أن

$$\lim_{x\to -3} f(x) = 4$$

مثال: جد $\lim_{t\to 0} g(t)$ اذا كانت

$$g(t) = \begin{cases} t^2 \ , & t \geq 0 \\ t-2 \ , & t < 0 \end{cases}$$

الحل: عندما تقترب t الى العدد 0 من اليسار فأن الدالة $g(t)$ هي $g(t) = t - 2$ ، فأن

$$\lim_{t\to 0^-} g(t) = \lim_{t\to 0^-}(t-2) = 0 - 2 = -2$$

وعندما تقترب t الى العدد 0 من اليمين فأن الدالة $g(t)$ هي $g(t) = t^2$ ، فأن

$$\lim_{t\to 0^+} g(t) = \lim_{t\to 0^+}(t^2) = 0^2 = 0$$

بما أن الغاية من اليمين لا تساوي الغاية من اليسار، فليس للدالة غاية عند هذه النقطة.

مثال: لتكن $f(x) = |x-4|$. أحسب $\lim_{x\to 4} f(x)$ أذا كانت موجودة ؟.

الحل:

$$f(x) = |x-4| = \begin{cases} x-4 & , \ x \geq 4 \\ -(x-4) & , \ x < 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+}(x-4) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 4^-} f(x) = \lim_{x\to 4^-}\big(-(x-4)\big) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^-} f(x) = 0$$

أذاً الغاية لهذه الدالة موجودة عندما $x \to 4$ وأن $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$.

مثال: لتكن

$$f(x) = \begin{cases} 2-x & , \quad x<1 \\ x^2+1 & , \quad x>1 \end{cases}$$

أدرس غاية الدالة عندما $x \to 1$.

الحل:

الغاية من اليمين $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x^2+1) = 2$

الغاية من اليسار $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (2-x) = 1$

بما أن $\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$ ، أذاً $\lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة.

مبرهنات في الغايات

1) أذا كانت الدالة $f(x)$ **متعددة حدود**، فأن

$$\lim_{x\to \mathrm{a}} f(x) = f(\mathrm{a})$$

مثال: لتكن $f(x) = x^2 - 1$ ، فأن

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} (x^2-1) = f(3) = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

2) **غاية مجموع دالتين** : لتكن $f(x)$ ، $\mathrm{g}(x)$ دالتين في x فأن

$$\lim_{x\to \mathrm{a}} \big(f(x) + \mathrm{g}(x)\big) = \lim_{x\to \mathrm{a}} f(x) + \lim_{x\to \mathrm{a}} \mathrm{g}(x)$$

مثال: لتكن $\mathrm{g}(x) = 3\,x^2 \quad , \quad f(x) = 6\,x^3$ ، فأن

$$\lim_{x\to -2} \big(f(x) + \mathrm{g}(x)\big) = \lim_{x\to -2} f(x) + \lim_{x\to -2} \mathrm{g}(x) = f(-2) + \mathrm{g}(-2)$$
$$= -48 + 12 = -36$$

3) **غاية فرق دالتين** : لتكن $f(x)$ ، $\mathrm{g}(x)$ دالتين في x فأن

$$\lim_{x\to \mathrm{a}} \big(f(x) - \mathrm{g}(x)\big) = \lim_{x\to \mathrm{a}} f(x) - \lim_{x\to \mathrm{a}} \mathrm{g}(x)$$

مثال: اذا كانت $\mathrm{g}(x) = x^3 \quad , \quad f(x) = 2\,x^2$ ، فأن

$$\lim_{x\to 1} \big(f(x) - \mathrm{g}(x)\big) = \lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} \mathrm{g}(x) = f(1) - \mathrm{g}(1)$$
$$= 2 - 1 = 1$$

وعموماً اذا كانت $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{\mathrm{n}}(x)$ دوال في x فأن:

$$\lim_{x\to \mathrm{a}} (f_1(x) \pm f_2(x) \pm \cdots \pm f_{\mathrm{n}}(x))$$
$$= \lim_{x\to \mathrm{a}} f_1(x) \pm \lim_{x\to \mathrm{a}} f_2(x) \pm \cdots \pm \lim_{x\to \mathrm{a}} f_{\mathrm{n}}(x)$$

مثال: لتكن

$$f_4(x) = x^4\,, \qquad f_3(x) = -2x^3\,, f_2(x) = 3x^2\,, \qquad f_1(x) = x$$

$$\lim_{x\to 1}(f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x)) = \lim_{x\to 1}(x + 3x^2 - 2x^3 + x^4)$$
$$= 1 + 3(1)^2 - 2(1)^3 + (1)^4 = 3$$

4) غاية ضرب دالتين :

لتكن $f(x)$ ، $\mathrm{g}(x)$ دالتين في x فأن

$$\lim_{x\to \mathrm{a}}\big(f(x)\cdot \mathrm{g}(x)\big) = \lim_{x\to \mathrm{a}} f(x)\cdot \lim_{x\to \mathrm{a}} \mathrm{g}(x)$$

مثال: اذا كانت $\mathrm{g}(x) = 5x^2 + 1 \quad , \quad f(x) = -2\,x^3 - 1$ ، فأن

$$\lim_{x\to -1}\big(f(x)\cdot \mathrm{g}(x)\big) = \lim_{x\to -1} f(x)\cdot \lim_{x\to -1} \mathrm{g}(x) = f(-1)\cdot \mathrm{g}(-1)$$
$$= (-2\,(-1)^3 - 1\,)\cdot(\,5\,(-1)^2 + 1\,)$$
$$= (2-1)\cdot(5+1) = (1)\cdot(6) = 6$$

وعموماً اذا كانت $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{\mathrm{n}}(x)$ دوال في x فأن:

$$\lim_{x\to \mathrm{a}}(f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot \dots \cdot f_{\mathrm{n}}(x)) = \lim_{x\to \mathrm{a}} f_1(x)\cdot \lim_{x\to \mathrm{a}} f_2(x)\cdot \dots \cdot \lim_{x\to \mathrm{a}} f_{\mathrm{n}}(x)$$

5) غاية قسمة دالتين : لتكن $f(x)$ ، $\mathrm{g}(x)$ دالتين في x وأن $\lim_{x\to \mathrm{a}} \mathrm{g}(x) \neq 0$ ، فأن

$$\lim_{x\to \mathrm{a}}\left(\frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to \mathrm{a}} f(x)}{\lim_{x\to \mathrm{a}} \mathrm{g}(x)}$$

مثال: اذا كانت $\mathrm{g}(x) = 5x^2 - 1 \quad , \quad f(x) = 2\,x + 5$ ، فأن

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to 0} f(x)}{\lim_{x\to 0} \mathrm{g}(x)} = \frac{f(0)}{\mathrm{g}(0)} = \frac{2\,(0) + 5}{5\,(0)^2 - 1} = \frac{5}{-1} = -5$$

6) أذا كانت الدالة $f(x)$ دالة ثابتة، أي أن، $f(x) = \mathrm{c}$ ، حيث أن c عدد حقيقي، فأن:

$$\lim_{x\to \mathrm{a}} f(x) = \mathrm{c}$$

مثال: لتكن $f(x) = 7$ ، فأن

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 7$$

7) أذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = L$ موجودة، فأن $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = L^n$ حيث أن n عدد صحيح، وأن $L \neq 0$ عندما يكون n عدداً صحيحاً سالباً.

مثال:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{4x^2+x}{2x}\right)^4 = \left(\frac{4\,(1)^2+1}{2\,(1)}\right)^4 = \left(\frac{5}{2}\right)^4 = \frac{3125}{16}$$

8) أذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = L$ موجودة، وكان n عدداً صحيحاً، فأن:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

بشرط أن يكون المقدار $\sqrt[n]{L}$ عدداً حقيقياً.

9) أذا كانت $\lim_{x\to a} f(x) = L$ موجودة، وكان c عدداً حقيقياً، فأن:

$$\lim_{x\to a} c\,f(x) = c\,\lim_{x\to a} f(x)$$

الغايات اللانهائية Infinite limits

بالرغم من ان الرمزين $\infty\,, -\infty$ لا يمثلان عددين حقيقيين، ومع ذلك فأنهما يستعملان بكثرة في الغايات. فيما يلي نذكر بعض الخواص:

$$\infty + \infty = \infty \quad , \quad \infty\cdot\infty = \infty$$
$$(-\infty) + (-\infty) = -\infty \quad , \quad (-\infty)\cdot(-\infty) = \infty$$
$$\infty\cdot(-\infty) = -\infty \quad , \quad (-\infty)\cdot\infty = -\infty$$

وأذا كان c عدداً حقيقياً موجباً، فأن

$$c\cdot\infty = \infty \quad , \quad c\cdot(-\infty) = -\infty$$

وأذا كان c عدداً حقيقياً سالباً، فأن

$$c\cdot\infty = -\infty \quad , \quad c\cdot(-\infty) = \infty$$

ولكل عدد حقيقي c ، فأن

$$\infty + c = \infty \quad , \quad \infty - c = \infty$$
$$(-\infty) + c = -\infty \quad , \quad (-\infty) - c = -\infty$$

مثال: أحسب الغاية للدالة

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}\,, \qquad x \neq 1$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \infty$$

وبما أن ∞ لا يمثل عدد حقيقي، فأن الغاية غير موجودة.

مثال: أحسب الغاية للدالة

$$f(x) = \frac{-2}{x^2}\,, \qquad x \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

مثال: أحسب الغايتين $\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{x-1}$, $\lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x-1}$

الحل:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2}{x-1} = \infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2}{x-1} = -\infty$$

مبرهنة: ليكن n عدداً صحيحاً موجباً، فأن:

$$1)\quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = \infty$$

$$2)\quad \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} \infty & \text{عندما } n \text{ زوجي} \\ -\infty & \text{عندما } n \text{ فردي} \end{cases}$$

مثال: أحسب الغاية

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x+1}{x^2+2x+1}$$

الحل:

$$\lim_{x\to -1} (3x+1) = -2 < 0$$

$$\lim_{x\to -1} (x^2+2x+1) = 0$$

وبما أن لكل $x \in \mathbb{R}$ ، عدا -1 ،

$$x^2+2x+1 = (x+1)^2 > 0$$

ولذلك: $\lim_{x\to -1} \frac{3x+1}{x^2+2x+1} = -\infty$

مثال: أثبت أن

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x+1}{x-2} = \infty \qquad , \qquad \lim_{x\to 2^-} \frac{x+1}{x-2} = -\infty$$

مثال: أحسب الغايات

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x+2} + \frac{1}{(x-1)^2}\right) \qquad , \qquad \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+2)(x-1)^2}$$

$$\lim_{x\to -2} \left(\frac{5(x-3)}{(x+2)^4 \cdot \sqrt{x+3}}\right) \qquad , \qquad \lim_{x\to -2} \frac{1}{(x+2)^4}$$

الغايات في اللانهاية **Limits at Infinity**

هناك حالات نحتاج فيها لأيجاد غاية دالة ما عندما تزداد قيمة المتغير المستقل x زيادة مطلقة غير منتهية، أي، عندما $x \to \infty$ وفي هذه الحالة يجب أن تكون الدالة معرفة لكل القيم المتناهية في الكبر. كما أن هناك حالات أخرى نجد فيها غاية دالة ما عندما تتناقص قيمة x دون حد، أي، عندما تصبح قيمته متناهية في الصغر، بمعنى اخر، $x \to -\infty$.

لاحظ أن $x \to \infty$ أو $x \to -\infty$ يبين سلوكية المتغير x فقط ولا يعني مطلقاً أن قيمة x هي ∞ أو $-\infty$ ، لأن منطلق x هو مجموعة أعداد حقيقية وأن ∞ و $-\infty$ غير حقيقيين.

مبرهنة: $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $x \neq 0$ فأن

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

مبرهنة: ليكن $x \neq 0$ و n عدداً صحيحاً موجباً، فأن

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{x^{\mathrm{n}}} = 0$$

مثال: $\lim_{x\to \infty} \frac{2}{x^2} = 0$ و $\lim_{x\to \infty} \frac{3}{x^5} = 0$

مبرهنة:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\mathrm{a_n}\, x^{\mathrm{n}} + \mathrm{a_{n-1}}\, x^{\mathrm{n-1}} + \mathrm{a_{n-2}}\, x^{\mathrm{n-2}} + \cdots \mathrm{a_1}\, x + \mathrm{a_0}\right) = \infty$$

مثال:
$$\lim_{x\to\infty} \left(4\,x^2 + 2\,x + 5\right) = \infty$$

مثال: أحسب الغاية

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^3 + 6x - 21}{x^2 + 1}$$

الحل: بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام، فان الغاية ∞ ، أي، غير موجودة.

صيغ غير معينة Indeterminate Forms

هناك سبع صيغ (أو كميات) غير معينة في الرياضيات، وهذه الصيغ هي:

$$\frac{\infty}{\infty}\ ,\qquad \infty - \infty\ ,\qquad 0\cdot\infty\ ,\qquad \frac{0}{0}\ ,\qquad 0^0\ ,\qquad \infty^0\ ,\qquad 1^\infty$$

أولاً: عدم التعيين $\frac{0}{0}$

ويزال بالتحليل وقسمة البسط على المقام وبالأختصار أو بالقيام بعملية طرح أو جمع أو باستعمال طرائق أخرى مثل قاعدة لوبيتال الاولى.

مثال: أحسب الغاية

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{0}{0}$$ عدم التعيين

يجب أزالة عدم التعيين

$$\frac{x^2 - 9}{x - 3} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)} = (x+3)\,,\qquad x \neq 3$$

أذاً
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = \lim_{x\to 3}\ (x+3) = 6$$

مثال: أحسب الغاية

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x}{x}$$

الحل:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x}{x} = \frac{0}{0} \quad \text{عدم التعيين}$$

$$\frac{x\,(x-1)}{x} = (x-1)\,, \quad x \neq 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x\to 0}\ (x-1) = -1\ , \quad x \neq 0$$

مثال: أحسب كل مما يأتي:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\,x^4 + 4\,x^2}{x^4 + 3\,x^2}\ , \quad \lim_{x\to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 9}\ , \quad \lim_{x\to 3} \frac{2x^2 - 2x - 12}{x - 3}$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3 + 6x^2 + 12x + 8}{x + 2}\ , \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}\ , \quad \lim_{x\to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 1}\ , \quad \lim_{x\to 0} \frac{2x}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}$$

ثانياً: عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$

لأزالة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$ عندما $x \to \infty$ ، نقسم البسط والمقام على المتغير الذي يحمل أكبر أس. ويمكن أستعمال قاعدة لوبيتال الثانية لمعالجة المشكلة.

مثال: أحسب الغاية

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

الحل:

$$\lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{عدم التعيين}$$

نقسم البسط والمقام على x^2 فيكون لدينا

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\lim_{x\to \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1 + 0} = 1$$

مثال: أحسب الغاية

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^3}$$

الحل:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^3} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{عدم التعيين}$$

نقسم حدود الدالة على x^3 فيكون لدينا

$$\frac{x+5}{x^3} = \frac{\frac{x}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{1} = \frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}\right) = 0+0 = 0$$

مثال: أحسب الغايات

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^5+3}{x^2} \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{3x+5}{6x-8}} \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{3x-4}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3-2x+1}{3x^3+x^2+5} \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{3x+5}{6x-8}} \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{3x-4}$$

ثالثاً: عدم التعيين $\infty \cdot 0$ و $\infty - \infty$: لأزالة عدم التعيين نستعمل طريقة التحليل الجبري ثم نقوم بالأختصار والقيام بعملية الضرب والقسمة في حالة وجودهما.

مثال: أحسب الغاية

$$\lim_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right)$$

الحل:

$$\lim_{x\to 0} x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right) = 0 \cdot \infty \quad \text{عدم التعيين}$$

$$x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2-x}\right) = x\left(\frac{3}{x}+\frac{2}{x(x-1)}\right) = x\left[\frac{1}{x}\left(3+\frac{2}{(x-1)}\right)\right]$$

$$= 3+\frac{2}{(x-1)}$$

$$\lim_{x\to 0} \left(3+\frac{2}{(x-1)}\right) = 3+\frac{2}{0-1} = 3-2 = 1$$

مثال: أحسب الغاية

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)$$

الحل:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}\right)=\infty-\infty \quad \text{عدم التعيين}$$

$$\frac{3}{x-1}-\frac{1}{x^2-1}=\frac{3}{x-1}-\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{(x-1)}\left[3-\frac{1}{x+1}\right]$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)}\left[3-\frac{1}{x+1}\right]=\infty\ \left[3-\frac{1}{2}\right]=\infty\ \left[\frac{5}{2}\right]=\infty$$

مثال: أحسب الغاية

$$\lim_{x\to 0} x\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

الحل:

$$\lim_{x\to 0} x\left(1+\frac{1}{x}\right)=0\ \cdot(1+\infty)=\ 0\cdot\infty \quad \text{عدم التعيين}$$

$$x\left(1+\frac{1}{x}\right)=x\left(\frac{x+1}{x}\right)=x+1$$
$$\lim_{x\to 0}(x+1)=1$$

مثال: أحسب الغايتين

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{4x+1}-2\sqrt{x}\right] \quad , \quad \lim_{x\to 0}\left[x^2\left(x+\frac{2}{x^2}\right)\right]$$