الدوال وانواعها

تعريف الدالة

لتكن f علاقة من المجموعة غير الخالية A الى المجموعة B . يقال أن f دالة (أو تطبيق) من A الى B ، أذا أقترن مع كل عنصر في A عنصر وحيد في B ، ويعبر عن ذلك بالرموز كالاتي:

$$A \xrightarrow{f} B \qquad \text{أو} \qquad f: A \to B$$

وهكذا فأن f دالة من A الى B أذا استوفت الشروط الثلاثة الأتية:

1. f علاقة من A الى B ، وبذلك $f \subseteq A \times B$.
2. لكل $a \in A$ يوجد $b \in B$ بحيث $(a, b) \in f$.
3. أذا كان $(a, b_1) \in f$ ، $(a, b_2) \in f$ فأن $b_1 = b_2$.

أذا كانت f دالة من A الى B وكان $(a, b) \in f$ ، فأننا نكتب $b = f(a)$. يطلق على $f(a)$ صورة العنصر a تحت تأثير f ، كما يقال أيضاً أن $f(a)$ قيمة الدالة f في a .

تعريف:

لتكن $f: A \to B$ ، فأن بيان الدالة f هو بيان العلاقة f ، أي المجموعة

$\{(a, f(a)): a \in A\}$

تعريف:

لتكن $f: A \to B$. تسمى المجموعة A منطلق (أو مجال) domain الدالة f ، كما تسمى المجموعة B مستقر (أو المجال المقابل) codomain الدالة f . ويطلق على المجموعة التي تتكون من صورة كل عنصر من عناصر المجموعة A بفعل f مدى range الدالة، ويرمز لها بـــ $f(A)$ أو R_f ، أي أن

$f(A) = \{ f(a): a \in A\}$ or $R_f = \{ f(a): a \in A\}$

أي أن مدى الدالة هو مجموعة القيم الفعلية للدالة f.

أما منطلق الدالة f فيعرف بالمجموعة الاتية:

$D_f = \{a : \ b = f(a), a \in A\}$

أذاً، فالدالة هي علاقة يرتبط كل عنصر في منطلقها بعنصر واحد فقط في مداها.

ملاحظة: أذا كانت $f: A \to B$ دالة ، فأن:

- $D_f = A$
- $R_f \subseteq B$

مثال: إذا كانت

$A = \{a, b, c\}, \qquad B = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

فأي العلاقات الآتية تمثل دالة من A الى B :

$f_1 = \{(a, 2), (b, 4)\}$

$f_2 = \{(a, 2), (b, 4), (b, 6), (c, 8)\}$

$f_3 = \{(a, 2), (b, 3), (c, 10)\}$

$f_4 = \{(a, 2), (a, 4), (b, 6), (b, 8)\ (c, 10)\}$

الحـل:

f_1 ليست دالة لأن العنصر c في المنطلق (المجال) لم يرتبط بأي عنصر من المستقر (المجال المقابل).

f_2 ليست دالة لأن العنصر b قد ظهر مرتين كأحداثي أول في الأزواج المرتبة لهذه العلاقة.

f_3 دالة لأن كل عنصر من المنطلق ارتبط بعنصر وحيد من المستقر.

f_4 ليست دالة لأن العنصر a والعنصر b ظهرا مرتين في الأزواج المرتبة لهذه العلاقة.

مثال: لتكن $A = \{a, b, c, d\}$ ، $B = \{-1, 0, 2, 3, 5, 7, 12\}$. ولتكن

$f = \{(a, 0), (b, 3), (c, 12), (d, 12)\}$

$S = \{(a, -1), (a, 0), (b, 3), (c, 7), (d, 12)\}$

$T = \{(a, 2), (b, 3), (d, 7)\}$

فأن f بيان لدالة من A الى B ، وان مدى هذه الدالة

$f(A) = \{\ 0, 3, 12\ \}$

بينما كل من S ، T لا يمثل بيان لدالة من A الى B .

مثال: أفرض أن $f\colon N \to N$ ، حيث أن N مجموعة الاعداد الطبيعية $\{\dots, 1, 2, 3\} = N$. وأن $f = \{(x, y)\colon x \in N, y \in N, y = 2x\}$. فأن f دالة ، ويمكن أن نعبر عن هذه الدالة بأختصار $y = 2x$ لكل $x \in N$ ، أو $f(x) = 2x$ لكل $x \in N$. واضح أن مدى هذه الدالة هي مجموعة كل الاعداد الصحيحة الزوجية الموجبة.

مثال: لتكن $A = \{4, 5, 6\}$, $B = \{6, 8, 10, 12\}$. ولتكن $f: A \to B$ دالة معرفة كالاتي: $f(a) = 2a - 2$ لكل $a \in A$.

أ) أكتب صورة كل عنصر ، ثم أكتب مدى الدالة.

ب) أكتب الدالة كأزواج مرتبة، ثم أرسم المخطط البياني لهذه الدالة.

الحل:

أ)

$$f(a) = 2\,a - 2$$
$$f(4) = 2\,(4) - 2 = 8 - 2 = 6$$
$$f(5) = 2\,(5) - 2 = 10 - 2 = 8$$
$$f(6) = 2\,(6) - 2 = 12 - 2 = 10$$

وأن مدى الدالة f :

$$R_f = f(A) = \{6, 8, 10\}$$

ب) كتابة الدالة كازواج مرتبة يعني أيجاد بيان الدالة

$$\{(a, f(a)) : a \in A\} = \{(4,6), (5,8), (6,10)\}$$

مثال: لتكن $f: A \to B$ علاقة معرفة بالشكل $f = \{(x, y): y = 2x + 1\}$ ، حيث أن $A = \{1, 3, 5, 9\}$ و $B = \{3, 7, 11, 19, 16\}$.

لاحظ أن كل عنصر في A يرتبط بعنصر وحيد في B ، وعليه فأن f دالة من A الى B .

مثال: لتكن $f: X \to N$ دالة، حيث أن $X = \{0, 5, 10, 15\}$ و N مجموعة الاعداد الطبيعية وأن $f(x) = x + 10$. جد مدى وبيان الدالة.

مثال: لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، معرفة كالاتي: لكل $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اذا كان } x \text{ عدد نسبي} \\ 0 & \text{اذا كان } x \text{ عدد غير نسبي} \end{cases}$$

فأن منطلق ومستقر الدالة f هو $\mathbb{R}$ ، بينما مدى الدالة f هو المجموعة $\{0, 1\}$. كما أن بيان الدالة هو المجموعة

$$\{(x, 1): x \text{ عدد نسبي}\} \cup \{(x, 0): x \text{ عدد غير نسبي}\}$$

مثال: المجموعة $\left\{ \left(x, \sqrt{x}\right): x \in \mathbb{R} \right\}$ لا تمثل بيان لدالة من $\mathbb{R}$ الى $\mathbb{R}$ ، وذلك لأن الاعداد الحقيقية السالبة ليس لها جذور تربيعية حقيقية. أي ليس كل عدد حقيقي في $\mathbb{R}$ يظهر كأحداثي أول في زوج مرتب $\left(x, \sqrt{x}\right)$. لذلك فالعلاقة هذه لا تمثل دالة.

مثال: لو أحدثنا تغييراً في المثال السابق، وفرضنا

$$\mathrm{X} = \{x: x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} \quad \text{و} \quad f: \mathrm{X} \to \mathbb{R}$$

حيث $f(x) = \sqrt{x}$ ، لكل $x \in \mathrm{X}$ ، فأن f دالة بيانها المجموعة

$$\left\{ \left(x, \sqrt{x}\right): x \in \mathrm{X} \right\}$$

ويكون مدى هذه الدالة المجموعة X ، أي $\mathrm{R}_f = \mathrm{X}$.

مثال: لتكن $\mathrm{A} = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\right\}$ و $\mathrm{B} = \mathbb{R}$. ولتكن f علاقة معرفة من A الى B كالاتي: $(x, y) \in f$ اذا وفقط اذا

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{عدد صحيح } x \\ \frac{1}{2} & \text{ليس عدداً صحيحاً } x \end{cases}$$

فأن f دالة من A الى B ، وأن

$$\mathrm{R}_f = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1, 4, 9 \right\} \quad , \quad \mathrm{D}_f = \mathrm{A}$$

الدوال الحقيقية The Real Functions

تعريف:

يقال للدالة $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ أنها حقيقية أذا كان كل من منطلقها A ومستقرها B مجموعة من أعداد حقيقية.

تعريف: الدالة المتباينة one–to–one function (injective function)

يقال للدالة أنها متباينة أذا كان كل عنصر من مستقرها هو صورة لعنصر واحد على الأكثر من منطلقها. أي لا يوجد عنصران مختلفان في المنطلق يرتبطان بعنصر واحد في المستقر.

ويمكن استخدام الرموز للتعبير عن ذلك بالشكل الاتي:

$f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ دالة متباينة، اذا كان:

$$\forall \; x_1, x_2 \in \mathrm{A} \; , \qquad f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2$$

or

$$\forall \; x_1, x_2 \in \mathrm{A} \; , \qquad x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

مثال:

لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث $f(x) = x^3$ ، فأن f دالة متباينة، وذلك لأن مكعبي أي عددين حقيقيين مختلفين يكونان مختلفين أيضاً.

مثال:

لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث $f(x) = x^2$ ، فأن f دالة غير متباينة، لأنه لو أخذنا $\mathrm{a} \in \mathbb{R}$ و $\mathrm{a} \neq 0$ فأن

$$f(-\mathrm{a}) = f(\mathrm{a}) = \mathrm{a}^2$$

بينما $-\mathrm{a} \neq \mathrm{a}$.

مثال: لتكن $A = \{a, b, c, d\}$ و $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. وأفرض أن بيانات الدوال كالاتي:

$f_1 = \{(a, 1), (b, 2), (c, 5), (d, 4)\},$

$f_2 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 3), (d, 3)\},$

$f_3 = \{(b, 5), (a, 2), (c, 4), (d, 3)\}$

$f_4 = \{(a, 2), (b, 1), (c, 2), (d, 3)\}$

فأي من هذه الدوال متباينة؟.

الحل: لا يوجد في بيان الدالة المتباينة زوجان مرتبان يتساويان فيهما الأحداثي الثاني. وعلى ذلك، فأن الدالتين f_1 و f_3 متباينتان، أما الدالتان f_2 و f_4 فغير متباينتين.

تعريف: الدالة الشاملة (onto function (surjective function

يقال للدالة $f: A \to B$ أنها شاملة (أو غامرة) أذا كان $f(A) = B$ ، أي أن مداها يساوي مستقرها. وبمعنى اخر، كل عنصر في B هو قيمة للدالة في عنصر واحد، على الأقل، في A .

مثال: لتكن $A = \{1, 2, 3\}$ و $B = \{-1, -2\}$ وأن

$f = \{(1, -1), (2, -1), (3, -2)\}$

فأن $f: A \to B$ دالة شاملة ولكنها ليست متباينة.

مثال: لتكن $f: N \to N$ ، حيث $f = 2x$. فأن هذه الدالة f ليست شاملة، وذلك لأن $f(N) \neq N$ ، حيث أن الاعداد الفردية، وهي في مستقر الدالة، ليست صوراً لعناصر في المنطلق وفق الدالة f .

مثال: هل الدالة الاتية شاملة؟.

$f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث $f(x) = 2x + 1$

الحل: ليكن y أي عنصر في مستقر الدالة (أي أن $y \in \mathbb{R}$). لكي يكون y صورة لعنصر ما x في المنطلق، يجب أن يكون $y = 2x + 1$. ولكن

$$y = 2x + 1 \Longrightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

وعليه، فأن

$$f(x) = 2x + 1 = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = y$$

أي أن y صورة للعنصر $\frac{y-1}{2}$ بفعل هذه الدالة. اذاً كل عنصر $y \in \mathbb{R}$ هو صورة للعنصر $x \in \mathbb{R}$. وهكذا يكون $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. أذاً f دالة شاملة. لاحظ بأن f دالة متباينة أيضاً.

مثال: هل الدالة الاتية شاملة؟.

$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث $g(x) = \frac{x+1}{x}$

الحل: نفرض أن $y \in \mathbb{R}$ عنصراً في مدى الدالة، فأن

$$y = \frac{x+1}{x} \Longrightarrow x = \frac{1}{y-1}$$

بشرط أن $y \neq 1$.

وهكذا العدد 1 لا ينتمي الى مدى الدالة g ، ولكنه ينتمي الى المستقر $\mathbb{R}$. أي أن المدى للدالة g لا يساوي المستقر $\mathbb{R}$ ، أذاً $g(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$. وبذلك تكون الدالة g غير شاملة.

تعريف: الدالة المتقابلة one–to–one onto function (bijective function)

يقال للدالة $f: A \to B$ أنها متقابلة أذا كانت متباينة وشاملة.

مثال: الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث $f(x) = 2x + 1$ دالة متقابلة لانها متباينة وشاملة.

مثال: لتكن $X = \{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \}$ و $f: X \to X$ ، حيث $f(x) = x^2$. فأن f دالة متقابلة لانها متباينة وشاملة.

مثال: الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث $f(x) = 4x + 1$. فأن f دالة متقابلة لانها متباينة وشاملة.

تعريف: الدالة الثابتة Constant function

يقال للدالة $f: A \to B$ أنها ثابتة أذا كان مداها مجموعة أحادية (أي مكونة من عنصر واحد فقط).

مثال: الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، بحيث أن $f(x) = 2$ لكل $x \in \mathbb{R}$ ، هي دالة ثابتة.

مثال: لتكن $A = \{1, 2, 3, 5, 9, 11\}$ و $B = \{-1, -2, -5\}$.

$f = \{(1, -2), (2, -2), (3, -2), (5, -2), (9, -2), (11, -2)\}$,

فأن $R_f = f(A) = \{-2\}$. أي أن المدى لهذه الدالة هو مجموعة أحادية (عنصر واحد).

وبذلك فأن $f: A \to B$ دالة ثابتة.

تعريف: الدالة الذاتية Identity function

يقال للدالة $f: A \to B$ أنها دالة ذاتية اذا كان $f(x) = x$ لكل $x \in A$.

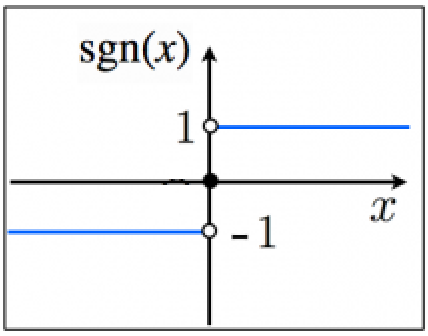
لاحظ أن أي دالة ذاتية تكون متقابلة.

لتكن $A = \{2, 4, 6, 8\}$ و $f = \{(2,2), (4,4), (6,6), (8,8)\}$ ، فأن $f: A \to A$ دالة ذاتية.

تعريف: دالة الإشارة Sign function (or Signum function)

دالة الإشارة لأي عدد حقيقي x تعرف كالاتي:

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{if } x < 0 \\ 0, & \text{if } x = 0 \\ 1, & \text{if } x > 0 \end{cases}$$



تعريف: (الدالة الفردية والدالة الزوجية)

لتكن $f: X \to \mathbb{R}$ دالة ، فأن:

f دالة فردية odd function اذا كان $f(-x) = -f(x)$ لكل $x \in X$.

f دالة زوجية even function اذا كان $f(-x) = f(x)$ لكل $x \in X$.

مثال: كل من الدوال الاتية فردية:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \quad , \quad f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 5}} \quad , \quad f(x) = 5x^3 - 2x$$

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+3} \quad , \quad f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$$

مثال: كل من الدوال الاتية زوجية

$$f(x) = x^2 \quad , \quad f(x) = x^2 - 5 \quad , \quad f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^4 + 2}}$$

$$f(x) = x^2 + \sqrt{2x^2 + 61} \quad , \quad f(x) = \frac{x^2}{x^4+1}$$

The only function that is even and odd is $f(x) = 0$.

ملاحظة: توجد دوال ليست فردية وليست زوجية، مثل:

$f(x) = x^2 - 3x + 5$

$f(x) = x + 1$

$f(x) = x^3 - x + 1$

$f(x) = 10\,x^3 - 4\,x^2 + 3x - 8$

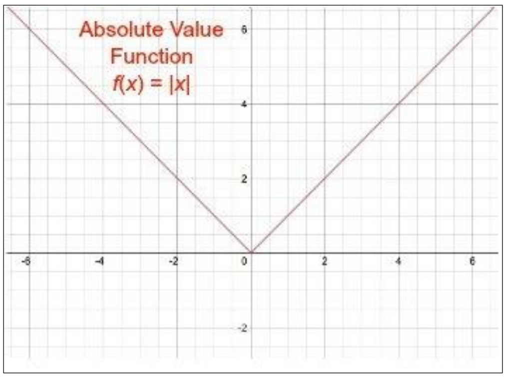
$f(x) = x^3 - x^2 - 1$

تعريف: دالة القيمة المطلقة The absolute value function

هي الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ بحيث أن لكل $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) = |x|$. أي أن

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x\,, & x \geq 0 \text{ عندما} \\ -x\,, & x < 0 \text{ عندما} \end{cases}$$

واضح أن مدى دالة القيمة المطلقة هو مجموعة الاعداد الحقيقية غير السالبة $[0, \infty)$.



خواص القيمة المطلقة

ليكن x ، y عددان حقيقيان فأن:

1) $|x| \geq 0$
2) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
3) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{y}$
4) $|x + y| \leq |x| + |y|$
5) $|x| \leq y \Leftrightarrow -y \leq x \leq y$
6) $|x| \geq \mathrm{y} \Rightarrow x \geq \mathrm{y} \quad \text{or} \quad x \leq -\mathrm{y}$

مثال: اذا كان $x = -3$, $\mathrm{y} = 2$ فجد كل مما يأتي:

$|x|, |y|, |x+y|, |x|+|y|, |x-y|, |x|-|y|$

الحل:

$|x| = |-3| = 3 \qquad , \qquad |y| = |2| = 2$

$|x+y| = |-3+2| = |-1| = 1$

$|x|+|y| = |-3|+|2| = 3+2 = 5$

$|x-y| = |-3-2| = |-5| = 5$

$|x|-|y| = |-3|-|2| = 3-2 = 1$

مثال: جد مجموعة الحل للمتاينات الاتية

$|2x-4| \leq 8 \qquad , \qquad |2x-4| \geq 8$

الحل:

$|2x-4| \leq 8 \Rightarrow -8 \leq 2x-4 \leq 8 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 12$

$\Rightarrow -2 \leq x \leq 6$

وعليه فأن مجموعة الحل هي: $x \in [-2, 6]$

$|2x-4| \geq 8$

$\Rightarrow 2x-4 \leq -8$	or	$\Rightarrow 2x-4 \geq 8$
$\Rightarrow 2x \leq -8+4$		$\Rightarrow 2x \geq 8+4$
$\Rightarrow 2x \leq -4$		$\Rightarrow 2x \geq 12$
$\Rightarrow \frac{2x}{2} \leq \frac{-4}{2}$		$\Rightarrow \frac{2x}{2} \geq \frac{12}{2}$
$\Rightarrow x \leq -2$		$\Rightarrow x \geq 6$
$\Rightarrow x \in (-\infty, -2]$		$\Rightarrow x \in [6, \infty)$

مجموعة الحل هي: $x \in (-\infty, -2] \cup [6, \infty)$

تعريف: دالة أكبر عدد صحيح (أو دالة الصحيح الأعظم) greatest integer function

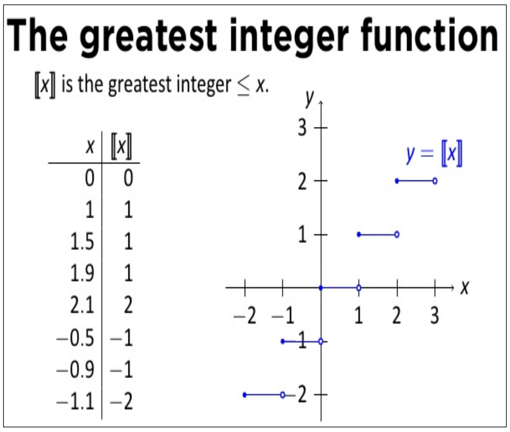
دالة أكبر عدد صحيح هي الدالة $f: X \to \mathbb{R}$ بحيث أن لكل $x \in X$

$$f(x) = [\![x]\!]$$

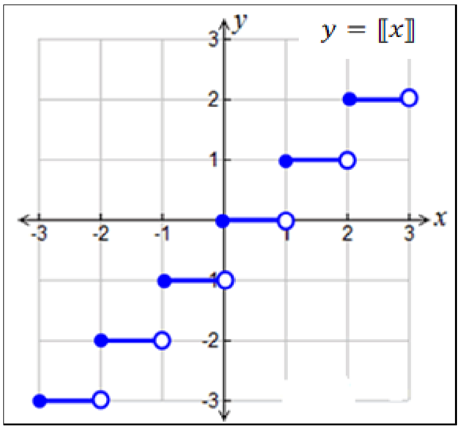
حيث أن $[\![x]\!]$ هو أكبر عدد صحيح لا يزيد على x . فمثلاً:

$$[\![-0.5]\!] = -1 \quad , \quad [\![-5]\!] = -5 \quad , \quad [\![7]\!] = 7, \quad [\![3.2]\!] = 3$$

$$[\![-5.5]\!] = -6 \quad , \quad [\![-1.6]\!] = -2 \quad , \quad [\![-2.1]\!] = -3 \; , \quad [\![1/3]\!] = 0$$



x	$[\![x]\!]$
0	0
1	1
1.5	1
1.9	1
2.1	2
−0.5	−1
−0.9	−1
−1.1	−2



واضح أنه أذا كان منطلق دالة أكبر عدد صحيح هو $\mathbb{R}$ فأن مداها هو مجموعة الاعداد الصحيحة Z .

تعريف: دالة متعددة الحدود polynomial function

يقال أن الدالة $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ متعددة حدود (أو كثيرة الحدود) من الدرجة n ، اذا كان لكل $x \in \mathbb{R}$ ،

$$f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_{n-2}\, x^{n-2} + \cdots a_1\, x + a_0$$

حيث ان n عدد صحيح غير سالب، وأن $a_n , a_{n-1} , a_{n-2} , \dots a_1 , a_0$ ، $a_n \neq 0$ ، أعداد حقيقية.

أذا كانت درجة متعددة الحدود صفراً، تكون عندئذ دالة ثابتة، وأذا كانت درجتها واحداً يطلق عليها دالة خطية. كما أن الدالة الذاتية هي دالة خطية.

ملاحظة: منطلق أي دالة متعددة الحدود هو مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

أمثلة:

$$f(x) = 7\,, \quad f(x) = -3\,, \quad f(x) = \sqrt{8}\,, \quad f(x) = \pi\,, \quad f(x) = \frac{e}{4}\,, \quad f(x) = \frac{1}{2}$$

الدوال السابقة متعددات حدود من الدرجة الصفرية وتسمى دوال ثابتة.

$f(x) = \mathrm{a}x + \mathrm{b}$, $f(x) = 2x - 3$, $f(x) = x - 1$, $f(x) = -3 + 4x$

الدوال السابقة متعددات حدود من الدرجة الاولى وتسمى دوال خطية.

$f(x) = \mathrm{a}\,x^2 + \mathrm{b}\,x + \mathrm{c}$, $f(x) = 2x^2 + \sqrt{5}\,x + 3$, $f(x) = \frac{2}{5}x^2 + 7$, $f(x) = x^2 - \sqrt{7}x$

الدوال السابقة متعددات حدود من الدرجة الثانية وتسمى دوال تربيعية.

$f(x) = \mathrm{a}x^3 + \mathrm{b}\,x^2 + \mathrm{c}\,x + \mathrm{d}$, $f(x) = 2x^3 + \sqrt{5}\,x^2 + 3x - 7$

$f(x) = \frac{3}{5} + 4x^3$, $f(x) = x^3 - \sqrt{7}x$

الدوال السابقة متعددات حدود من الدرجة الثالثة وتسمى دوال تكعيبية.

$f(x) = 3\,x^4 - 5\,x^2 + 7$ متعددة حدود من الدرجة الرابعة

$f(x) = x^7 + 3\,x^6 - 11x$ متعددة حدود من الدرجة السابعة

وهكذا ....

مثال: حدد ما أذا كانت الدوال الاتية تمثل متعددات الحدود أم لا. وأذكر درجتها ونوعها

$f(x) = \frac{x^{-2}}{5} + x^3 + 3$ ليست متعددة حدود لان أس المتغير عدد سالب

$f(x) = \sqrt{x} + x^2 + 5$ ليست متعددة حدود لان المتغير داخل جذر

$f(x) = x^{\sqrt{3}}$ ليست متعددة حدود لان أس المتغير عدد داخل جذر

$f(x) = \frac{1}{x^5+2} + x^2 + 6$ ليست متعددة حدود لان المتغير في المقام

$f(x) = x^{3/2} - 3x$ ليست متعددة حدود لان أس المتغير عدد كسري

$f(x) = x^5 - \sqrt{2}\,x^4 + 1$ متعددة حدود من الدرجة الخامسة

$f(x) = x^3 + 6$ متعددة حدود من الدرجة الثالثة وتسمى دالة تكعيبية

$f(x) = x - 1$ متعددة حدود من الدرجة الاولى وتسمى دالة خطية

مثال:

إذا كانت $f(x) = x + 3$ أوجد قيمة الدالة عند

$x = 0, x = 1, x = 2, x = -1, x = -2, x = -3$

قيمة $f(x)$ عند $x = 0$: $f(0) = 0 + 3 = 3$

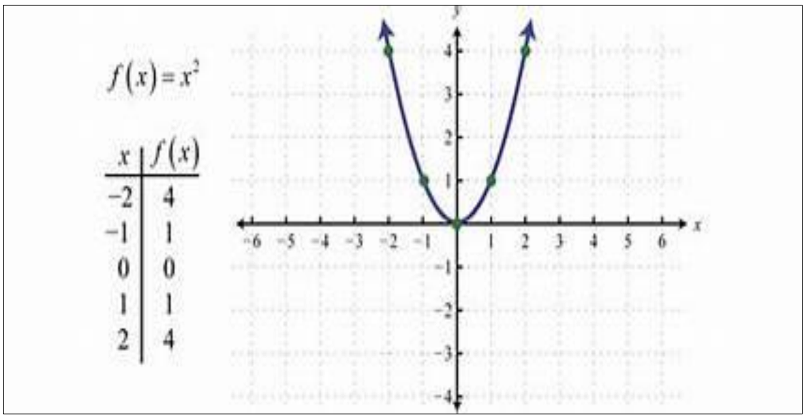
قيمة $f(x)$ عند $x = 1$: $f(1) = 1 + 3 = 4$

قيمة $f(x)$ عند $x = -2$: $f(-2) = -2 + 3 = 1$

قيمة $f(x)$ عند $x = -3$: $f(-3) = -3 + 3 = 0$

مثال: أرسم بيان الدالة $f(x) = x^2$ (أو $y = x^2$) .

الحل: هذه الدالة متعددة حدود من الدرجة الثانية (دالة تربيعية) لذلك منطلقها هو مجموعة كل الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وأن مدى هذه الدالة هو مجموعة الاعداد الحقيقية غير السالبة، أي أن المدى هو الفترة $[0, \infty)$ ، وعليه، اذا كانت (x, y) نقطة على بيان هذه الدالة فأن $(-x, y)$ نقطة واقعة أيضاً على بيان الدالة. هذه الخاصية تعرف بخاصية التناظر (symmetric) بالنسبة لمحور y.



تعريف: الدالة النسبية (الكسرية) rational function

يقال أن الدالة $f: X \to \mathbb{R}$ نسبية أذا كان، لكل $x \in X$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} ,$$

حيث أن كلاً من $g(x)$, $h(x)$ متعددة حدود، وأن $h(x) \neq 0$ لكل $x \in X$.

أي أن الدالة النسبية هي دالة بسطها ومقامها دوال متعددات الحدود.

منطلق الدالة النسبية مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ما عدا قيم x التي تجعل المقام صفراً. أي أن المنطلق هو

$X \subseteq \mathbb{R} - \{x : x \in \mathbb{R}, h(x) = 0\}$ or $X \subseteq \mathbb{R} \setminus \{ x : x \in \mathbb{R}, h(x) = 0 \}$

لإيجاد منطلق الدالة النسبية (أو الكسرية) نتبع الخطوات الاتية:

- نساوي المقام بالصفر
- نحلل المقام اذا أحتجنا لذلك
- نوجد قيم x التي تجعل المقام= صفر
- المنطلق هو $\mathbb{R} - \{\text{أصفار المقام}\}$

مثال: كل من الدوال الاتية نسبية (أو كسرية):

$$f(x) = \frac{3x}{x^2 + 4\,x + 5} \quad , \qquad \mathrm{D}_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

$$f(x) = \frac{2\,x^2 + 1}{x - 2} \quad , \qquad \mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$f(x) = \frac{x^3 - 3}{x^2 - 1} \quad , \qquad \mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x - 3}{x^3 - 1} \quad , \qquad \mathrm{D}_f = \mathbb{R} - \{\,1\}$$

تعريف: الدالة الجذرية root function

تسمى الدالة $f(x) = \sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{g}(x)}$ دالة جذرية بحيث $\mathrm{g}(x)$ متعددة حدود وأن $\mathrm{n} \in \mathrm{N}\,, \mathrm{n} \geq 2$.

منطلق هذه الدالة هو:

- جميع قيم x بحيث $\mathrm{g}(x) \geq 0$ عندما يكون n عدد زوجي.
- جميع الاعداد الحقيقية $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ عندما يكون n عدد فردي.

مثال: الدالة $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{x+2}} - x + 3$ **لا تمثل** دالة جذرية.

مثال: الدالة $f(x) = \sqrt{x + 3}$ تمثل دالة جذرية. لايجاد منطلقها نضع

$$x + 3 \geq 0 \Longrightarrow x \geq -3$$

منطلق هذه الدالة هو:

$$\mathrm{D}_f = \{x : x \in \mathbb{R}\,, x \geq -3\} = [-3, \infty)$$

مثال: الدالة $f(x) = \sqrt{x - 5}$ تمثل دالة جذرية. لايجاد منطلقها نضع

$$x - 5 \geq 0 \Longrightarrow x \geq 5$$

منطلق هذه الدالة هو:

$$\mathrm{D}_f = \{x : x \in \mathbb{R}\,, x \geq 5\} = [5, \infty)$$

مثال: الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x + 6}$ تمثل دالة جذرية.

منطلق هذه الدالة هو جميع الاعداد الحقيقية لان أس الجذر عدد فردي

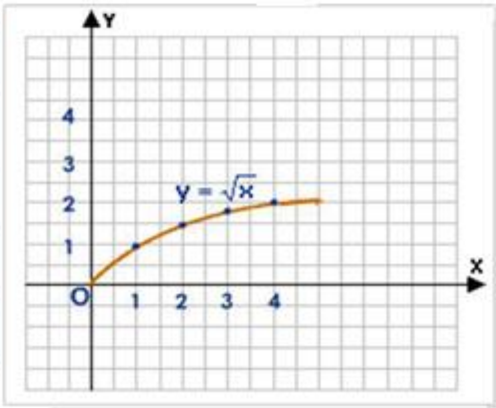
$$\mathrm{D}_f = \mathbb{R} = (-\infty, \infty)$$

مثال: أرسم بيان الدالة $f(x) = \sqrt{x}$.

Domain: $\{\{x: x \in \mathbb{R}, x \geq 0\} = [0, \infty)\}$

Range: $\{\{y: y \in \mathbb{R}, y \geq 0\} = [0, \infty)\}$

x	y
0	0
1	1
4	2
9	3



مثال: جد المنطلق والمدى للدالة $f(x) = \sqrt{x+2}$ ، ثم أرسم المخطط البياني لها.

الحل: أن منطلق هذه الدالة هو المجموعة

$$D_f = \{x: x \in \mathbb{R}, x \geq -2\} = [-2, \infty)$$

وأن مداها هو مجموعة الاعداد الحقيقية غير السالبة. أي أن المدى هو

$$R_f = [0, \infty)$$

x	$\sqrt{x+2}$
−2	0
−1	1
0	1.4142136
1	1.7320508
2	2