عمليات جبرية على الدوال Algebraic Operations on Functions

أذا كانت f و g دالتين، فأن:

$(\mathrm{k}f)(x) = \mathrm{k}\,f(x)$ لكل $x \in \mathrm{D}_f$ حيث أن k عدد حقيقي.

$(f \pm \mathrm{g})(x) = f(x) \pm \mathrm{g}(x)$ لكل $x \in \mathrm{D}_f \cap \mathrm{D}_\mathrm{g}$

$(f \cdot \mathrm{g})(x) = f(x) \cdot \mathrm{g}(x)$ لكل $x \in \mathrm{D}_f \cap \mathrm{D}_\mathrm{g}$

$\left(\frac{f}{\mathrm{g}}\right)(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)}$ لكل $x \in \mathrm{D}_f \cap \mathrm{D}_\mathrm{g}$ بشرط أن $\mathrm{g}(x) \neq 0$.

مثال: لتكن $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ و $\mathrm{g}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$ و $\mathrm{g}(x) = x + 2$ ، فأن

$(f + \mathrm{g})(x) = f(x) + \mathrm{g}(x) = x^2 + x + 2$.

$(f - \mathrm{g})(x) = f(x) - \mathrm{g}(x) = x^2 - (x + 2) = x^2 - x - 2$.

$(f \cdot \mathrm{g})(x) = f(x) \cdot \mathrm{g}(x) = x^2(x + 2) = x^3 + 2x^2$.

$\left(\frac{f}{\mathrm{g}}\right)(x) = \frac{f(x)}{\mathrm{g}(x)} = \frac{x^2}{x+2} \quad , \quad x \neq -2$.

مثال: أذا كان $f(x) = 5x - 2 \quad , \quad \mathrm{g}(x) = 2x^2 + 4x - 3$ ، فأوجد كل مما يأتي:

$(f + \mathrm{g})(x)$

$(f - \mathrm{g})(x)$

$(f \cdot \mathrm{g})(x)$

$\left(\frac{f}{\mathrm{g}}\right)(x)$

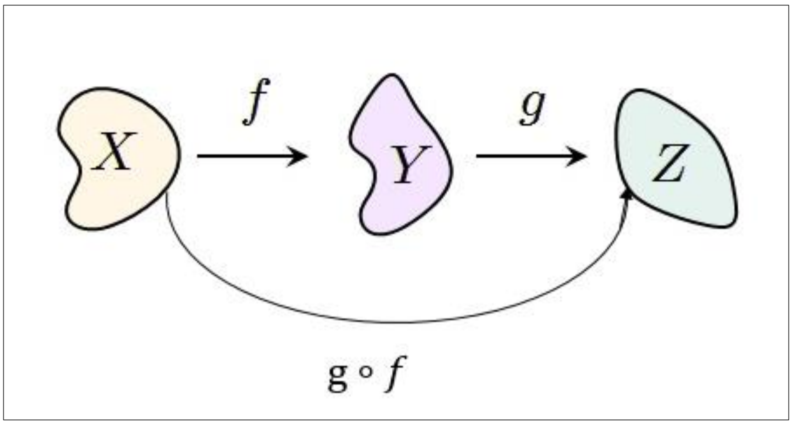
حل هذا المثال يترك تمرين (واجب).

تركيب الدوال **Composition of Functions**

لتكن $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ و $\mathrm{g} : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ دالتين. فأن تركيب f مع g هو دالة $\mathrm{g} \circ f$ منطلقها X ومستقرها Z ، وتعرف بالشكل:

$$(\mathrm{g} \circ f)(x) = \mathrm{g}(f(x)), \quad x \in \mathrm{X}, \qquad f(x) \in \mathrm{Y}$$

حيث أن $\circ$ هو رمز تركيب دالتين.



مثال: أذا كان $f(x) = x^2 , \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ و $\mathrm{g}(x) = 2\,x + 3 , \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ فأن:

$$(\mathrm{g} \circ f)(x) = \mathrm{g}(f(x)) = \mathrm{g}(x^2) = 2\,x^2 + 3$$
$$(f \circ \mathrm{g})(x) = f(\mathrm{g}(x)) = f(2\,x + 3) = (2\,x + 3)^2$$

مثال: أذا كان $f(x) = 2\,x , \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ و $\mathrm{g}(x) = \sqrt{x - 2} , \ \forall\, x \in [2, \infty)$

فأن:

$$(\mathrm{g} \circ f)(x) = \mathrm{g}(f(x)) = \mathrm{g}(2\,x) = \sqrt{(2x) - 2} = \sqrt{2x - 2}$$

$$(f \circ \mathrm{g})(x) = f(\mathrm{g}(x)) = f(\sqrt{x - 2}) = 2(\sqrt{x - 2}) = 2\sqrt{x - 2}$$

مثال: أذا كان $f(x) = 2x + 1 , \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ و $\mathrm{g}(x) = 3\,x , \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ فأن:

$$(\mathrm{g} \circ f)(x) = \mathrm{g}(f(x)) = \mathrm{g}(2x + 1) = 3(2x + 1) = 6x + 3$$

$$(f \circ \mathrm{g})(x) = f(\mathrm{g}(x)) = f(3x) = 2(3x) + 1 = 6x + 1$$

مثال: أذا كان $f(x) = 3x - 4 , \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ و $\mathrm{g}(x) = x^2 + 6 , \ \forall\, x \in \mathbb{R}$ فأن:

$$(\mathrm{g} \circ f)(x) = 9x^2 - 24x + 22$$

$$(f \circ \mathrm{g})(x) = 3x^2 + 14$$

واضح أن $\mathrm{g} \circ f \neq f \circ \mathrm{g}$.

مثال: لتكن $f(x)=\frac{1}{2-x}$ حيث أن $x\in\mathbb{R}-\{2\}$. أحسب $(f\circ f)(3)$

الحل: نحسب

$$(f\circ f)(x)=f\big(f(x)\big)=f\left(\frac{1}{2-x}\right)=\frac{1}{2-\frac{1}{2-x}}$$

ولأيجاد $(f\circ f)(3)$ نعوض عن كل x بـــ 3 في الدالة الناتجة، أي أن

$$(f\circ f)(3)=\frac{1}{2-\frac{1}{2-3}}=\frac{1}{2-\frac{1}{-1}}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}$$

مثال: لتكن $f(x)=2x+1$ و $\mathrm{g}(x)=\frac{x+3}{2}$. أحسب $(\mathrm{g}\circ f)(5)$, $(f\circ \mathrm{g})(5)$

الحل:

$$(f\circ \mathrm{g})(x)=f\big(\mathrm{g}(x)\big)=f\left(\frac{x+3}{2}\right)=2\left(\frac{x+3}{2}\right)+1=x+4$$

أذاً

$$(f\circ \mathrm{g})(5)=5+4=9.$$

ولايجاد $(\mathrm{g}\circ f)(5)$

$$(\mathrm{g}\circ f)(x)=\mathrm{g}\big(f(x)\big)=\mathrm{g}(2\mathrm{x}+1)=\frac{2x+1+3}{2}=\frac{2x+4}{2}=x+2$$

أذاً

$$(\mathrm{g}\circ f)(5)=5+2=7.$$

مبرهنة:

- أذا كان كل من f و g دالة متباينة فأن $\mathrm{g}\circ f$ دالة متباينة أيضاً.
- أذا كان كل من f و g دالة شاملة فأن $\mathrm{g}\circ f$ دالة شاملة أيضاً.
- أذا كان كل من f و g دالة متقابلة فأن $\mathrm{g}\circ f$ دالة متقابلة أيضاً.

ملاحظة: يكون منطلق (أو مجال) الدالة التي تم تركيبها هو المجموعة الاتية:

- $D_{g\circ f} = \{x : x \in D_f, f(x) \in D_g\}$

أي أن منطلق $g \circ f$ هو منطلق الدالة الناتجة من التركيب مع أستبعاد قيم x من هذه المجموعة التي تجعل الدالة f غير معرفة (ان وجدت).

- $D_{f\circ g} = \{x : x \in D_g, g(x) \in D_f\}$

أما في حالة $f \circ g$ فيكون المنطلق هو منطلق الدالة الناتجة من هذا التركيب مع أستبعاد قيم x من هذه المجموعة التي تجعل الدالة g غير معرفة (ان وجدت).

مثال: أذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = 3\,x - 1$ فجد كل مما يأتي:

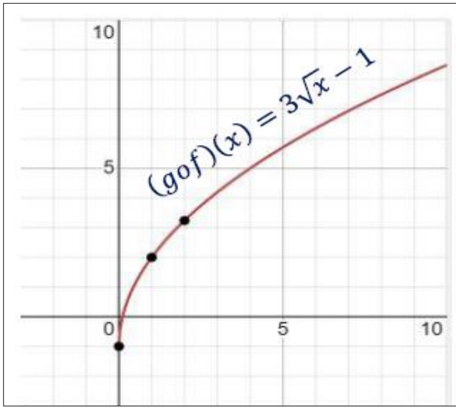
$g \circ f \quad , \quad f \circ g \quad , \quad D_{g\circ f} \quad , \quad D_{f\circ g}$

الحل:

$$(g \circ f)_{(x)} = g\big(f(x)\big) = g\big(\sqrt{x}\big) = 3\,\sqrt{x} - 1$$

$$D_{g\circ f} = \{x : x \in \mathbb{R}, 0 \le x < \infty\} = [0, \infty)$$

لاحظ أن مجال الدالة الناتجة من التركيب لا يحتوي على قيم x التي تجعل الدالة f غير معرفة.



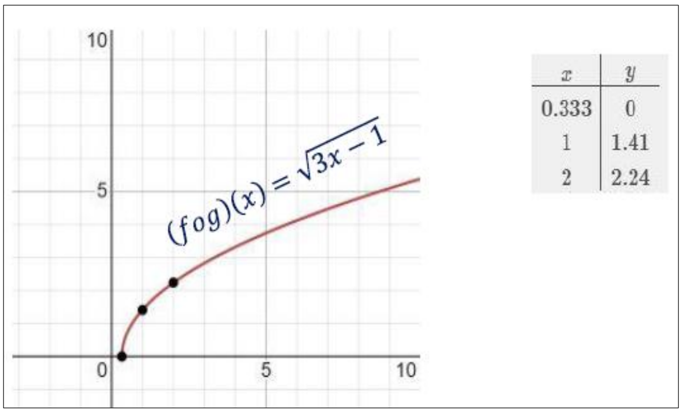
x	y
0	-1
1	2
2	3.24

$$(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big) = f(3\,x - 1) = \sqrt{3\,x - 1}$$

لأيجاد منطلق هذه الدالة نضع

$$3\,x - 1 \ge 0 \Rightarrow 3x \ge 1 \Rightarrow x \ge \frac{1}{3}$$

$$D_{f\circ g} = \left\{x : x \in \mathbb{R}, \tfrac{1}{3} \le x < \infty\right\} = [\tfrac{1}{3}, \infty).$$



مثال: أذا كانت $f(x)=\frac{5}{x-1}$ و $g(x)=\frac{4}{3x-2}$ ، فجد كل مما يأتي:

$g\circ f \quad , \quad f\circ g \quad , \quad D_{g\circ f} \quad , \quad D_{f\circ g}$

الحل: لايجاد $f\circ g$

$$(f\circ g)(x)=f\big(g(x)\big)=f\left(\frac{4}{3x-2}\right)=\frac{5}{\frac{4}{3x-2}-1}=\frac{5(3x-2)}{4-1(3x-2)}$$

$$=\frac{5(3x-2)}{4-3x+2}=\frac{5(3x-2)}{6-3x}$$

لأيجاد منطلق الدالة الناتجة نضع

$6-3x=0 \Longrightarrow x=2$

اذاً عندما $x=2$ تكون الدالة $f\circ g$ غير معرفة. والان نبحث عن قيم x التي تجعل الدالة g غير معرفة. واضح ان الدالة g تكون غير معرفة عندما $x=\frac{2}{3}$. وعليه فأن منطلق الدالة $f\circ g$ يكون جميع الاعداد الحقيقية ما عدا $x=\frac{2}{3}$ و $x=2$. أي أن:

$D_{f\circ g}=\left\{x: x\in\mathbb{R}, x\neq\frac{2}{3}, x\neq 2\right\}$ or $D_{f\circ g}=\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{2}{3},2\right\}$ or

$D_{f\circ g}=\mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3},2\right\}$ or $D_{f\circ g}=\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup\left(\frac{2}{3},2\right)\cup(2,\infty)$

أيجاد $g\circ f$, $D_{g\circ f}$ يترك تمرين (واجب).

مثال: أذا كانت $f(x)=\sqrt{x+2}$ و $g(x)=\sqrt{3-x}$ ، فأن:

$$(f\circ g)(x)=\sqrt{\sqrt{3-x}+2}$$

$D_{f\circ g}=(-\infty,3]$.

الدالة العكسية Inverse Function

اذا كانت $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ دالة فأن العلاقة العكسية $f^{-1}: \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ قد تحقق شروط الدالة أو لا تحققها. كذلك أذا كانت $f^{-1}: \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ دالة فليس من الضروري أن تكون $f: \mathrm{D} \to \mathrm{C}$ دالة.

مثال: لتكن $\mathrm{A} = \{1, 2, 3\}$ و $\mathrm{B} = \{4, 5\}$ ولتكن $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ علاقة بحيث أن

$$f = \{(1, 4), (2, 4), (3, 5)\}$$

واضح أن العلاقة f تمثل دالة.

ولكن العلاقة العكسية $f^{-1}: \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ حيث أن

$$f^{-1} = \{(4, 1), (4, 2), (5, 3)\}$$

ليست دالة.

مثال: لتكن $\mathrm{A} = \{1\}$ و $\mathrm{B} = \{2,3\}$ ولتكن $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ علاقة بحيث أن

$$f = \{(1, 2), (1, 3)\}$$

واضح أن العلاقة f لا تمثل دالة.

ولكن العلاقة العكسية $f^{-1}: \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ حيث أن

$$f^{-1} = \{(2, 1), (3, 1)\}$$

تمثل دالة.

تعريف:

يقال أن الدالة $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ لها معكوس اذا كانت العلاقة $f^{-1}: \mathrm{B} \to \mathrm{A}$ دالة، وتسمى العلاقة f^{-1} بالدالة العكسية للدالة f .

مبرهنة: أذا كانت $f: \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ دالة متقابلة، فأن f^{-1} دالة متقابلة من B الى A .

من المبرهنة يتضح أنه حتى يكون للدالة معكوس فيجب أن تكون هذه الدالة متقابلة.

ملاحظة: أذا كان $y = f(x)$ ، فأن:

- $x = f^{-1}(y)$
- $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = x$

طريقة أيجاد معكوس الدالة الدالة نوضحها بالامثلة الاتية

مثال: جد الدالة العكسية للدالة $f(x) = 3x + 1$.

الحل:

الخطوة الأولى: ضع y بدلاً من $f(x)$ ، أي أن $\mathrm{y} = 3x + 1$

الخطوة الثانية: أوجد x بدلالة y ، أي أن $x = \frac{\mathrm{y}-1}{3}$

الخطوة الثالثة: ضع $f^{-1}(\mathrm{y}) = \frac{\mathrm{y}-1}{3}$

الخطوة الرابعة: أستبدل كل y بــ x لتحصل على الدالة العكسية، أي أن $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$

للتحقق من الحل، أوجد $f \circ f^{-1}$ و $f^{-1} \circ f$ ، كلاهما يجب أن يساوي الدالة الذاتية.

مثال: جد الدالة العكسية للدالة $f(x) = \sqrt{2x-3}$.

الحل: التعويض عن $f(x)$ بالمتغير y يعطينا $\mathrm{y} = \sqrt{2x-3}$.

وبالتربيع، نجد أن $\mathrm{y}^2 = 2x - 3$. لأيجاد x بدلالة y نجد أن

$$2x = \mathrm{y}^2 + 3 \Longrightarrow x = \frac{\mathrm{y}^2 + 3}{2}$$

والان نضع $f^{-1}(\mathrm{y}) = \frac{\mathrm{y}^2+3}{2}$

وبأستبدال كل y بــ x نحصل على الدالة العكسية

$$f^{-1}(x) = \frac{x^2+3}{2}$$

للتحقق من الحل:

$$(f^{-1} \circ f)_x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\sqrt{2x-3}\right) = \frac{\left(\sqrt{2x-3}\right)^2 + 3}{2} = x$$

كذلك لاحظ أن:

$$(f \circ f^{-1})_x = f(f^{-1}(x)) = \sqrt{2\left(\frac{x^2+3}{2}\right) - 3} = \sqrt{x^2} = x$$

مثال: لتكن $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^3$ لكل $x \in \mathbb{R}$. بما أن f دالة متقابلة،

فالدالة العكسية f^{-1} لها موجودة وأنها متقابلة، ومعرفة كالاتي:

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ، حيث $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ لكل $x \in \mathbb{R}$.

الواجب: أوجد معكوس كل دالة مما يأتي، ثم مثل الدالة ومعكوسها بيانياً على مستوى أحداثي واحد.

$f(x) = \frac{3x - 1}{x + 2}$, $f(x) = \frac{x + 6}{5}$, $f(x) = \frac{x + 5}{-3}$

$f(x) = \frac{1}{2}x + 3$, $f(x) = \frac{4x + 1}{5}$, $f(x) = x + 2$, $f(x) = 5x$

$f(x) = -2x + 1$