التكامل The Integration

يقال للدالة $\mathrm{F}(x)$ أنها عكس مشتقة الدالة $f(x)$ في الفترة J ، اذا كان لكل x في J

$$\mathrm{d}\big(\mathrm{F}(x)\big)=f(x)\,\mathrm{d}x$$

يطلق على عملية أيجاد عكس المشتقة لدالة معطاة بـــ عكس التفاضل anti–differentiation

ويستعمل الرمز $\int$ للتعبير عن عملية عكس التفاضل. لذلك عندما تكون

$$\mathrm{d}\big(\mathrm{F}(x)\big)=f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{أي} \qquad \mathrm{F}'(x)=f(x)$$

نكتب

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{F}(x)+\mathrm{C}$$

أي

$$\int \mathrm{d}\big(\mathrm{F}(x)\big)=\mathrm{F}(x)+\mathrm{C}$$

حيث أن C أي ثابت أختياري (ثابت التكامل).

وقد سميت عملية عكس التفاضل بعملية التكامل غير المحدد، وأطلق على الرمز $\int$ رمز التكامل. ويكون مع هذا الرمز دائماً تفاضل المتغير المستقل، فأذا كانت f دالة للمتغير المستقل x ، فنكتب عملية التكامل غير المحدد بالشكل $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ وأن $\mathrm{d}x$ تدل على أن هذه العملية تجري بالنسبة للمتغير x . من ذلك نستنتج أن الرمز $\int \ldots\,\mathrm{d}x$ هو عكس الرمز $\frac{\mathrm{d}\ldots}{\mathrm{d}x}$

صيغ أساسية للتكامل

1) $\int \mathrm{d}x=x+\mathrm{C}$

2) $\int x^{\mathrm{m}}\,\mathrm{d}x=\frac{x^{\mathrm{m}+1}}{\mathrm{m}+1}+\mathrm{C} \qquad , \quad \mathrm{m}\neq -1$

3) $\int \mathrm{a}\,f(x)\,\mathrm{d}x=\mathrm{a}\int f(x)\,\mathrm{d}x$ حيث a ثابت

4) $\int\big(f(x)\pm \mathrm{g}(x)\big)\,\mathrm{d}x=\int f(x)\,\mathrm{d}x \pm \int \mathrm{g}(x)\,\mathrm{d}x$

5) $\int \big(f(x)\big)^{\mathrm{m}}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{(f(x))^{\mathrm{m}+1}}{\mathrm{m}+1}+\mathrm{C} \qquad , \quad \mathrm{m}\neq -1$

6) $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+\mathrm{C}$

7) $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x=\ln|f(x)|+\mathrm{C}$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I = \int (5\,x^6 - 2\,x^4 + 3\,x^2 - 6)\,\mathrm{d}x$$

الحل:

$$I = \int 5\,x^6\,\mathrm{d}x - \int 2\,x^4\,\mathrm{d}x + \int 3\,x^2\,\mathrm{d}x - \int 6\,\mathrm{d}x$$

$$= 5\int x^6\,\mathrm{d}x - 2\int x^4\,\mathrm{d}x + 3\int x^2\,\mathrm{d}x - 6\int \mathrm{d}x$$

$$= 5\,\frac{x^7}{7} - 2\,\frac{x^5}{5} + 3\,\frac{x^3}{3} - 6\,x + C$$

$$= 5\,\frac{x^7}{7} - 2\,\frac{x^5}{5} + x^3 - 6\,x + C$$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

الحل:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\,\sqrt{x} + C$$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I = \int \left(x^2 + \frac{3}{x}\right)\mathrm{d}x$$

الحل:

$$I = \int x^2\,\mathrm{d}x + 3\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + 3\ln|x| + C$$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I = \int \left(x^{\frac{1}{2}} - 3\,x^{\frac{2}{3}} + 5\,x^{\frac{-1}{2}}\right)\mathrm{d}x$$

الحل:

$$I = \int x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x - 3\int x^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}x + 5\int x^{\frac{-1}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + 10\,x^{\frac{1}{2}} + C$$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I=\int (x^2+2\,x-5)^3\cdot(x+1)\,\mathrm{d}x$$

الحل: بالضرب والقسمة على 2

$$I=\frac{1}{2}\int (x^2+2\,x-5)^3\cdot(2\,x+2)\,\mathrm{d}x$$

$$I=\frac{1}{2}\frac{(x^2+2\,x-5)^4}{4}+C=\frac{1}{8}((x^2+2\,x-5)^4)+C$$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I=\int (3\,x^2-9\,x+1)^{1/2}\cdot(2\,x-3)\,\mathrm{d}x$$

الحل: بالضرب والقسمة على 3

$$I=\frac{1}{3}\int (3\,x^2-9\,x+1)^{1/2}\cdot(6\,x-9)\,\mathrm{d}x$$

$$I=\frac{1}{3}\frac{(3\,x^2-9\,x+1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{9}\,(3\,x^2-9\,x+1)^{\frac{3}{2}}+C$$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I=\int \frac{4\,x^3+5}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

الحل:

$$I=\int\left(\frac{4\,x^3}{x^2}+\frac{5}{x^2}\right)\mathrm{d}x=4\int x\,\mathrm{d}x+5\int\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$=4\,\frac{x^2}{2}+5\,\frac{x^{-1}}{-1}+C=2\,x^2-\frac{5}{x}+C$$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I=\int (2\,x^3-6)^4\cdot(6\,x^2)\,\mathrm{d}x$$

الحل:

$$I=\frac{(2\,x^3-6)^5}{5}+C$$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I = \int \sqrt{x^3 + 3\,x + 1} \cdot (x^2 + 1)\, dx$$

الحل: بالضرب والقسمة على 3

$$I = \frac{1}{3}\int (x^3 + 3\,x + 1)^{\frac{1}{2}} \cdot (3x^2 + 3)\, dx$$

$$I = \frac{1}{3}\,\frac{(x^3 + 3\,x + 1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{3}\,\frac{(x^3 + 3\,x + 1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= \frac{2}{9}(x^3 + 3\,x + 1)^{\frac{3}{2}} + C$$

مثال: جد ناتج التكامل

$$I = \int \frac{2\,x^3 + 1}{x^4 + 2\,x + 1}\, dx$$

الحل: بتطبيق القاعدة 7 ، نضرب ونقسم على 2

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{2 \cdot (2\,x^3 + 1)}{x^4 + 2\,x + 1}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{4\,x^3 + 2}{x^4 + 2\,x + 1}\, dx$$

الان، القاعدة 7 جاهزة للتطبيق، وعليه

$$I = \frac{1}{2}\ln|x^4 + 2\,x + 1| + C$$

الواجب : أحسب التكاملات الاتية:

$$\int \left(\frac{2}{x^2} - \frac{4}{x^3}\right) dx$$

$$\int \frac{2 - t}{t^3}\, dt$$

$$\int 3\,x \cdot \sqrt{1 - 2\,x^2}\, dx$$

$$\int \frac{(1 + x)^2}{\sqrt{x}}\, dx$$

$$\int x^2 \cdot \sqrt[3]{5 - 2\,x^3}\, dx$$

$$\int \frac{(y + 1)}{\sqrt{y^2 + 2y + 7}}\, dy$$

التكامل المحدد The Definite Integral

مبرهنة (المبرهنة الأساسية لحساب التفاضل والتكامل)

لتكن f دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ ، ولتكن F دالة بحيث أن لكل x في $[a,b]$ ، $F'(x) = f(x)$ ، فأن

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - F(a)$$

مبرهنة *: أذا كانت f دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[a,b]$ ، فأن f قابلة للتكامل على الفترة $[a,b]$. أي أن التكامل المحدد $\int_a^b f(x)\,dx$ موجود.

ملاحظات:

- يطلق على $f(x)$ الدالة المكاملة (integrand) ، وعلى a الحد الأدنى وعلى b الحد الأعلى للتكامل المحدد $\int_a^b f(x)\,dx$.
- أذا كان التكامل المحدد $\int_a^b f(x)\,dx$ موجوداً فأن قيمته تكون وحيدة.
- أن عكس **المبرهنة** * غير صحيح دائماً، فهناك دوال قابلة للتكامل على $[a,b]$ ولكنها غير مستمرة عليها.

خواص التكامل المحدد

- أذا كانت $f(a)$ موجودة، فأن $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
- أذا كان $a > b$ ، والتكامل المحدد $\int_b^a f(x)\,dx$ موجوداً، فأن

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

- أذا كانت f و g دالتين قابلتي التكامل على الفترة المغلقة $[a,b]$ ، فأن

$$\int_{a}^{b} (f(x) + g(x))\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx + \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

- أذا كان k ثابتاً و f قابلة للتكامل على الفترة المغلقة $[a,b]$ ، فأن

$$\int_{a}^{b} k\,f(x)\,dx = k\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

- أذا كانت f دالة قابلة للتكامل على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، وأن $f(x) \geq 0$ لكل x في $[a, b]$ ، فأن

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \geq 0$$

- أذا كانت f و g دالتين قابلتي التكامل على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، وكان $f(x) \geq g(x)$ لكل x في $[a, b]$ ، فأن

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx \geq \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

- أذا كانت f مستمرة على فترة J تحتوي على $c\,,b\,,a$ بأي ترتيب، فأن

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{b} f(x)\,dx$$

- أذا كان k ثابتاً ما، فأن

$$\int_{a}^{b} k\,dx = k\,(b - 1)$$

مثال: أحسب ناتج التكامل المحدد $\int_{1}^{3}(3x^2 - 4x - 5)\,dx$

الحل:

$$\int_{1}^{3}(3x^2 - 4x - 5)\,dx = x^3 - 2x^2 - 5x\,\Big|_{1}^{3}$$

$$= \left(3^3 - 2(3^2) - 5(3)\right) - \left(1^3 - 2(1^2) - 5(1)\right) = 0$$

مثال: أحسب ناتج التكامل المحدد $\int_{-2}^{0}\frac{t}{\sqrt{1+2t^2}}\,dt$

الحل:

$$\int_{-2}^{0}\frac{t}{\sqrt{1+2t^2}}\,dt = \int_{-2}^{0} t \cdot (1 + 2t^2)^{\frac{-1}{2}}\,dt$$

$$\frac{1}{4}\int_{-2}^{0} 4\,\mathrm{t}\cdot(1+2\mathrm{t}^2)^{\frac{-1}{2}}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{4}\frac{(1+2\mathrm{t}^2)^{\frac{-1}{2}+1}}{\frac{-1}{2}+1}\Bigg|_{-2}^{0} = \frac{2}{4}\sqrt{1+2\mathrm{t}^2}\,\Bigg|_{-2}^{0}$$
$$= \frac{2}{4}\cdot\left(\sqrt{1+2(0)}-\sqrt{1+2\cdot(-2)^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1-\sqrt{9}\right) = -1$$

مثال: أحسب التكامل الاتي $\int_{-1}^{2}|x|\,\mathrm{d}x$

الحل: بما أن

$$|x| = \begin{cases} x \ , & x \geq 0 \\ -x \ , & x < 0 \end{cases}$$

فأن

$$\int_{-1}^{2}|x|\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}-x\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2}x\,\mathrm{d}x = \frac{-x^2}{2}\Bigg|_{-1}^{0} + \frac{x^2}{2}\Bigg|_{0}^{2}$$
$$= -\left(0-\left(\frac{(-1)^2}{2}\right)\right) + \left(\frac{2^2}{2}-0\right) = \frac{1}{2}+\frac{4}{2} = \frac{5}{2}$$

مبرهنة: لتكن الدالة f قابلة للتكامل على الفترة المغلقة $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ ، فأن

- أذا كانت f دالة زوجية، فأن

$$\int_{-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}} f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{\mathrm{a}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

- أذا كانت f دالة فردية، فأن

$$\int_{-\mathrm{a}}^{\mathrm{a}} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

مثال: جد ناتج التكامل $\int_{-2}^{2} x^2\,\mathrm{d}x$

الحل: بما أن الدالة $f(x) = x^2$ دالة زوجية، فأن

$$\int_{-2}^{2} x^2\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{2} x^2\,\mathrm{d}x = 2\frac{x^3}{3}\Bigg|_{0}^{2} = \frac{2}{3}(2^3-0) = \frac{2}{3}(8) = \frac{16}{3}$$

مثال: جد ناتج التكامل $\int_{-2}^{2} x^3\,\mathrm{d}x$

الحل: بما أن الدالة $f(x) = x^3$ دالة فردية، فأن $\int_{-2}^{2} x^3\,\mathrm{d}x = 0$

مثال: جد ناتج التكامل $\int_{-1}^{1}(x-x^3)\,\mathrm{d}x$

الحل: بما أن الدالة $f(x) = (x-x^3)$ دالة فردية، فأن $\int_{-1}^{1}(x-x^3)\,\mathrm{d}x = 0$