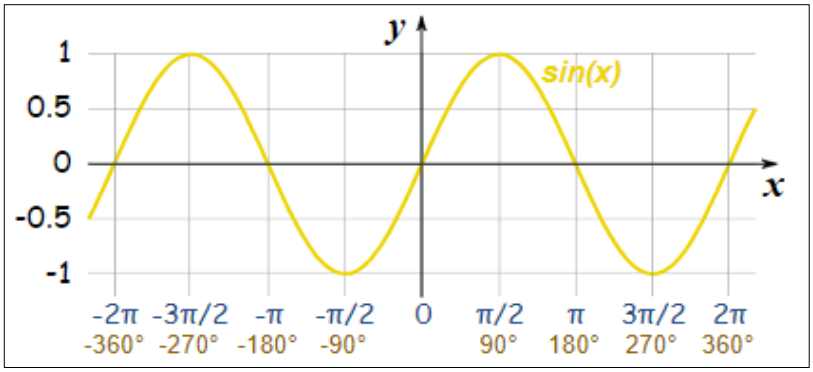
الدوال المثلثية Trigonometric Functions

دالة الجيب $y(x) = \sin x$: هي الدالة

$\sin: \mathbb{R} \to [-1, 1]$

x	$y(x) = \sin x$
$-\pi$	$\sin(-\pi) = 0$
$-\frac{\pi}{2}$	$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$
0	$\sin(0) = 0$
$\frac{\pi}{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
π	$\sin(\pi) = 0$

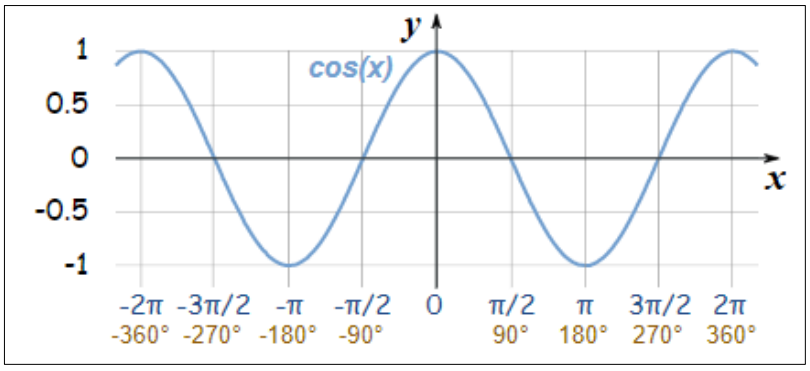


- دالة $\sin x$ هي دالة فردية، أي أن $\sin(-x) = -\sin(x)$
- دالة $\sin x$ هي دالة دورية مقدار دورتها 2π ، أي أن $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- المنطلق (أو المجال) هو مجموعة الاعداد الحقيقية $D_y = \mathbb{R}$ والمدى هو $R_y = [-1, 1]$.

دالة جيب تمام $y(x) = \cos x$: هي الدالة

$\cos: \mathbb{R} \to [-1, 1]$

x	$y(x) = \cos x$
$-\pi$	$\cos(-\pi) = -1$
$-\frac{\pi}{2}$	$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$
0	$\cos(0) = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
π	$\cos(\pi) = -1$

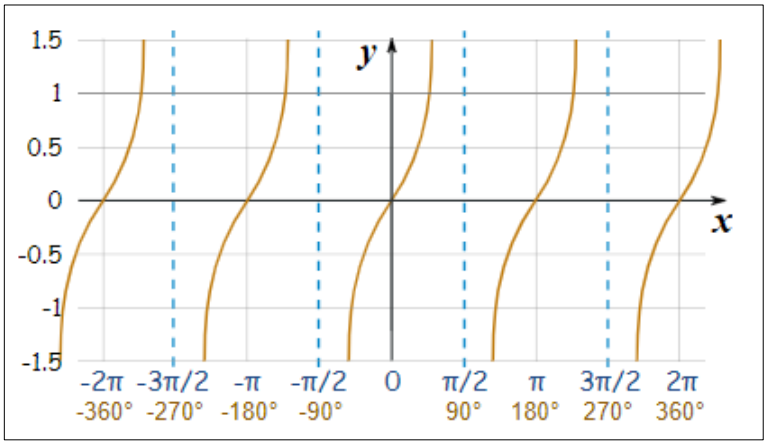


- دالة $\cos x$ هي دالة زوجية، أي أن $\cos(-x) = \cos(x)$.
- دالة $\cos x$ هي دالة دورية مقدار دورتها 2π ، أي أن $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- المنطلق (أو المجال) هو مجموعة الاعداد الحقيقية $D_y = \mathbb{R}$ والمدى هو $R_y = [-1, 1]$

دالة الظل:

$$y(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \cos x \neq 0$$

x	$y(x) = \tan x$
$-\pi$	$\tan(-\pi) = 0$
$-\frac{\pi}{4}$	$\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -1$
0	$\tan(0) = 0$
$\frac{\pi}{4}$	$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
π	$\tan(\pi) = 0$
2π	$\tan(2\pi) = 0$



- دالة $\tan x$ هي دالة فردية، أي أن $\tan(-x) = -\tan(x)$
- دالة $\tan x$ هي دالة دورية مقدار دورتها π ، أي أن $\tan(x + \pi) = \tan(x)$
- منطلق دالة $\tan x$ هو جميع الاعداد الحقيقة ما عدا القيم التي تكون عندها $\cos x = 0$ ، أي ان $D_y = \left\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \; ; \quad n = 0, \mp1, \mp2, \mp3, \ldots\ldots\right\}$

أما المدى فهو جميع الاعداد الحقيقية $R_y = \mathbb{R}$

دالة ظل التمام:

$$y(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad \sin x \neq 0$$

- دالة $\cot x$ هي دالة فردية، أي أن $\cot(-x) = -\cot(x)$
- دالة $\cot x$ هي دالة دورية مقدار دورتها π ، أي أن $\cot(x + \pi) = \cot(x)$
- منطلق دالة $\cot x$ هو جميع الاعداد الحقيقة ما عدا القيم التي تكون عندها $\sin x = 0$ ، أي ان $D_y = \{x : x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi \, , \quad n = 0, \mp1, \mp2, \mp3, \ldots\ldots\}$

أما المدى فهو جميع الاعداد الحقيقية $R_y = \mathbb{R}$

دالة القاطع:

$$y(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad , \quad \cos x \neq 0$$

- دالة $\sec x$ هي دالة زوجية، أي أن $\sec(-x) = \sec(x)$
- دالة $\sec x$ هي دالة دورية مقدار دورتها 2π ، أي أن $\sec(x + 2\pi) = \sec(x)$
- منطلق دالة $\sec x$ هو جميع الاعداد الحقيقة ما عدا القيم التي تكون عندها $\cos x = 0$ ، أي ان $D_y = \left\{x: x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \, ; \quad n = 0, \mp1, \mp2, \mp3, \ldots\ldots\right\}$

أما المدى فهو جميع الاعداد الحقيقية $R_y = \mathbb{R}$

دالة قاطع التمام:

$$y(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x} \quad , \quad \sin x \neq 0$$

- دالة $\csc x$ هي دالة فردية، أي أن $\csc(-x) = -\csc(x)$
- دالة $\csc x$ هي دالة دورية مقدار دورتها 2π ، أي أن $\csc(x + 2\pi) = \csc(x)$
- منطلق دالة $\csc x$ هو جميع الاعداد الحقيقة ما عدا القيم التي تكون عندها $\sin x = 0$ ، أي ان $D_y = \{x: x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi \, , \quad n = 0, \mp1, \mp2, \mp3, \ldots\ldots\}$

أما المدى فهو جميع الاعداد الحقيقية $R_y = \mathbb{R}$.

غايات بعض الدوال المشهورة:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{\ln x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1 \quad , \quad \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2.718$$

بعض القوانين (المتطابقات):

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sec^2\alpha = 1 + \tan^2\alpha$$

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$

تفاضل الدوال المثلثية

1	$y = \sin x$	$\frac{dy}{dx} = \cos x$
2	$y = \cos x$	$\frac{dy}{dx} = -\sin x$
3	$y = \tan x$	$\frac{dy}{dx} = \sec^2 x$
4	$y = \cot x$	$\frac{dy}{dx} = -\csc^2 x$
5	$y = \sec x$	$\frac{dy}{dx} = \sec x \ \tan x$
6	$y = \csc x$	$\frac{dy}{dx} = -\csc x \ \cot x$

مثال: لتكن $y = \sin(2x^3 - 3)$ ، فأن

$$y' = \frac{dy}{dx} = \cos(2x^3 - 3)\cdot(6\,x^2) = 6\,x^2\cos(2x^3 - 3)$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = \cos(2\theta^3 - 3\theta^{-2})$.

الحل:

$$y' = \frac{dy}{d\theta} = -\sin(2\theta^3 - 3\theta^{-2})\cdot(6\,\theta^2 + 6\theta^{-3})$$
$$= -(6\,\theta^2 + 6\theta^{-3})\cdot\sin(2\theta^3 - 3\theta^{-2})$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = \tan(x^{-2})$.

الحل:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sec^2(x^{-2}) \cdot (-2x^{-3}) = -2x^{-3} \cdot \sec^2(x^{-2})$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = \cot(3x)$.

الحل:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\csc^2(3x) \cdot (3) = -3 \cdot \csc^2(3x)$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = \sec(\theta^2)$.

الحل:

$$y' = \frac{dy}{d\theta} = \sec(\theta^2) \cdot \tan(\theta^2) \cdot (2\theta) = 2\theta \cdot \sec(\theta^2) \cdot \tan(\theta^2)$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = \csc(x^3)$.

الحل:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\csc(x^3) \cdot \cot(x^3) \cdot (3x^2) = -3x^2 \csc(x^3) \cdot \cot(x^3)$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = \csc(2x^5 - 3)$.

الحل:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\csc(2x^5 - 3) \cdot \cot(2x^5 - 3) \cdot (10x^4)$$
$$= -10\, x^4 \cdot \csc(2x^5 - 3) \cdot \cot(2x^5 - 3)$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = x \cdot \tan\left(\frac{1}{x}\right)$.

الحل:

$$y' = \frac{dy}{dx} = x \cdot \left(\sec^2\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)\right) + \tan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot 1$$
$$= \frac{-1}{x} \cdot \sec^2\left(\frac{1}{x}\right) + \tan\left(\frac{1}{x}\right)$$

الواجب: أحسب المشتقة لكل من الدوال الأتية:

$$y = \sin^5(3x^2) \quad , \quad y = \sec\left((2x+1)^{5/2}\right) \quad , \quad y = \frac{1}{x^2 \sin^3(x)}$$

$$y = (x^4 - \cot(x))^3 \quad , \quad y = \sqrt{1+\cos^2(x)} \quad , \quad y = (\sin(x) - \cos(x))^2$$

تكامل الدوال المثلثية

1	$\int \sin u \ du = -\cos u + C$
2	$\int \cos u \ du = \sin u + C$
3	$\int \tan u \ du = \ln\lvert\sec u\rvert + C$
4	$\int \cot u \ du = -\ln\lvert\csc u\rvert + C$
5	$\int \sec u \ du = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$
6	$\int \csc u \ du = \ln\lvert\csc u - \cot u\rvert + C$
7	$\int \sec^2 u \ du = \tan u + C$
8	$\int \csc^2 u \ du = -\cot u + C$
9	$\int \sec u \cdot \tan u \ du = \sec u + C$
10	$\int \csc u \cdot \cot u \ du = -\csc u + C$

مثال: جد ناتج التكامل $\int \cos(3x)\ \mathrm{d}x$

الحل: بالضرب والقسمة على 3 ، فأن

$$\frac{3}{3}\int \cos(3x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int 3\cdot\cos(3x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\sin(3x) + \mathrm{C}$$

مثال: جد ناتج التكامل $\int \tan^2(2x)\ \mathrm{d}x$

الحل: بأستعمال المتطابقة

$$\tan^2(2x) = \sec^2(2x) - 1$$
$$\int \tan^2(2x)\ \mathrm{d}x = \int (\sec^2(2x) - 1)\mathrm{d}x = \int \sec^2(2x)\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x$$
$$\frac{2}{2}\int \sec^2(2x)\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int 2\cdot\sec^2(2x)\,\mathrm{d}x - \int \mathrm{d}x$$
$$= \tfrac{1}{2}\tan(2x) - x + \mathrm{C}$$

مثال: جد ناتج التكامل $\int x\cdot\tan(2x^2+1)\ \mathrm{d}x$

الحل:

$$\int x\cdot\tan(2x^2+1)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int 4\,x\cdot\tan(2x^2+1)\ \mathrm{d}x$$
$$= \tfrac{1}{4}\ln|\sec(2x^2+1)| + \mathrm{C}$$

مثال: جد ناتج التكامل $\int \cot\left(7-\frac{x}{2}\right)\ \mathrm{d}x$

الحل:

$$\int \cot\left(7-\frac{x}{2}\right)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{(-1/2)}\int(-1/2)\cot\left(7-\frac{x}{2}\right)\ \mathrm{d}x$$
$$= \tfrac{1}{(-1/2)}\left(-\ln\left|\csc\left(7-\tfrac{x}{2}\right)\right|\right) + \mathrm{C}$$
$$= 2\ln\left|\csc\left(7-\tfrac{x}{2}\right)\right| + \mathrm{C}$$

مثال: جد ناتج التكامل $\int \frac{\cos(2x)}{\sin^3(2x)}\,\mathrm{d}x$

الحل:

$$\int \frac{\cos(2x)}{\sin^3(2x)}\,\mathrm{d}x = \int (\sin^{-3}(2x)) \cdot (\cos(2x)) \cdot \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin^{-3}(2x)) \cdot (2 \cdot \cos(2x)) \cdot \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^{-3+1}(2x)}{-3+1} + \mathrm{C}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^{-2}(2x)}{-2} + \mathrm{C} = \frac{-1}{4}\frac{1}{\sin^2(2x)} + \mathrm{C} = -\frac{1}{4}\csc^2(2x) + \mathrm{C}$$

مثال: أحسب التكاملات الاتية:

$$\int (\sin(3x+2) + \cos(2-3x))\,\mathrm{d}x \quad , \quad \int \sec^2(4x)\;\mathrm{d}x$$

$$\int x^2 \csc^2\left(3 - \frac{x^3}{3}\right)\,\mathrm{d}x \quad , \quad \int x^2 \csc(2x^3) \cdot \cot(2x^3)\;\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{3\sin\left(2-\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \quad , \quad \int \frac{\cos\left(3+5\ln(9x)\right)}{7x}\,\mathrm{d}x$$

$$\int \cos(6x) \cdot \cos(9 + 4\sin(6x))\;\mathrm{d}x \quad , \quad \int \frac{\tan\left(5 - \frac{4}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x^3}}\,\mathrm{d}x$$