المشتقات الجزئية Partial Derivatives

تعريف:

لتكن $f(x,y)$ دالة معرفة في المنطقة $D \subseteq \mathbb{R}^2$. تعرف المشتقتان الجزئيتان كالاتي:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x, y) - f(x,y)}{\triangle x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f(x, y+\triangle y) - f(x,y)}{\triangle y}$$

وتعرف مشتقات الدالة في ثلاثة متغيرات أو أكثر بطريقة مشابهة.

أما المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة الاصلية (أو المشتقات الثانية) تعرف كالاتي:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f_x(x+\triangle x, y) - f_x(x,y)}{\triangle x}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f_y(x, y+\triangle y) - f_y(x,y)}{\triangle y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy} = \lim_{\triangle y \to 0} \frac{f_x(x, y+\triangle y) - f_x(x,y)}{\triangle y}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f_y(x+\triangle x, y) - f_y(x,y)}{\triangle x}$$

المشتقات الجزئية f_{xy} و f_{yx} تسمى مشتقات جزئية مختلطة.

مثال: اذا كانت $f(x,y) = xy^2 + x^2y + 3$ ، أوجد f_x و f_y بأستعمال التعريف.

الحل: لأيجاد $\frac{\partial f}{\partial x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x, y) - f(x,y)}{\triangle x}$$

$$f(x+\triangle x, y) = (x+\triangle x)y^2 + (x+\triangle x)^2\, y + 3$$

$$= xy^2 + \triangle\, xy^2 + x^2y + 2x \triangle\, xy + (\triangle\, x)^2\, y + 3$$

$$f(x+\triangle x, y) - f(x,y)$$

$$= xy^2 + \triangle\, xy^2 + x^2y + 2x \triangle\, xy + (\triangle\, x)^2\, y + 3 - xy^2 - x^2y - 3$$

$$= \triangle\, x\, y^2 + 2x \triangle\, x\, y + (\triangle\, x)^2\, y$$

$$=\triangle x\,(y^2+2xy+\triangle x\,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=f_x=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle x\,(y^2+2xy+\triangle x\,y)}{\triangle x}$$

$$=\lim_{\triangle x\to 0}(y^2+2xy+\triangle x\,y)$$

$$=y^2+2xy$$

ولأيجاد $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f_y=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{f(x,y+\triangle y)-f(x,y)}{\triangle y}$$

$$f(x,y+\triangle y)=x(y+\triangle y)^2+x^2(y+\triangle y)+3$$

$$=x(y^2+2y\ \triangle y+(\triangle y)^2)+x^2(y+\triangle y)+3$$

$$=xy^2+2xy\ \triangle y+x(\triangle y)^2+x^2y+x^2\triangle y+3$$

$$f(x,y+\triangle y)-f(x,y)$$

$$=xy^2+2xy\ \triangle y+x(\triangle y)^2+x^2y+x^2\triangle y+3-xy^2-x^2y-3$$

$$=2xy\ \triangle y+x(\triangle y)^2+x^2\triangle y$$

$$=\triangle y\,(2xy\ +x\triangle y+x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=f_y=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{\triangle y\,(2xy\ +x\triangle y+x^2)}{\triangle y}=\lim_{\triangle y\to 0}(2xy\ +x\triangle y+x^2)$$

$$=2xy\ +x^2$$

ملاحظة:

قواعد تفاضل حاصل ضرب دالتين، دالة الدالة، والدالة الكسرية تعتبر صحيحة في المشتقات الجزئية.

مثال: اذا كانت $f(x,y)=x\,y\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}$ ، أوجد f_x و f_y .

الحل:

$$f_x=x\,y\cdot\left(\mathrm{e}^{x^2+y^2}\cdot(2x)\right)+\mathrm{e}^{x^2+y^2}\cdot(y)=2x^2y\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}+y\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}$$

$$=(2x^2+1)y\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}$$

$$f_y=x\,y\cdot\left(\mathrm{e}^{x^2+y^2}\cdot(2y)\right)+\mathrm{e}^{x^2+y^2}\cdot(x)=2xy^2\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}+x\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}$$

$$=(2y^2\ +1)x\,\mathrm{e}^{x^2+y^2}$$

مثال: اذا كانت $f(x,y) = e^{\sin(y/x)}$ ، أوجد f_x و f_y حيث $x \neq 0$.

الحل:

$$f_x = e^{\sin(y/x)} \cdot \cos(y/x) \cdot \left(\frac{-y}{x^2}\right)$$
$$= \frac{-y}{x^2} \cdot \cos(y/x) \cdot e^{\sin(y/x)}$$

$$f_y = e^{\sin(y/x)} \cdot \cos(y/x) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= \frac{1}{x} \cdot \cos(y/x) \cdot e^{\sin(y/x)}$$

مثال: اذا كانت $f(x,y) = xy^4 - 2x^2y^5 + 4x^6 - 3y^2$. جد كلاً من $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ و $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$. ماذا تلاحظ في هذا المثال؟.

الحل: نوجد أولاً $\frac{\partial f}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial y}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = y^4 - 4xy^5 + 24x^5$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = f_y = 4xy^3 - 10x^2y^4 - 6y$$

الان

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = f_{xy} = 4y^3 - 20xy^4 = 4y^3(1 - 5\,x\,y)$$
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx} = 4y^3 - 20xy^4 = 4y^3(1 - 5\,x\,y)$$

نلاحظ في هذا المثال أن

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

مثال: اذا كانت $f(x,y)=\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$. جد f_x و f_y وبين منطلق كل منهما.

الحل:

$$f_x=\frac{(x^2+y^2)\cdot(3x^2y-y^3)-(x^3y-xy^3)\cdot(2x)}{(x^2+y^2)^2}$$
$$=\frac{3x^4y-x^2y^3+3x^2y^3-y^5-2x^4y+2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$=\frac{x^4y+4x^2y^3-y^5}{(x^2+y^2)^2}$$

واضح أن منطلق f_x هو

$$\mathrm{D}_{f_x}=\mathbb{R}^{\mathbf{2}}\setminus\{(0,0)\}$$

وبطريقة مشابهة نجد أن

$$f_y=\frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

كذلك منطلق f_y هو

$$\mathrm{D}_{f_\mathrm{y}}=\mathbb{R}^{\mathbf{2}}\setminus\{(0,0)\}$$

مثال: جد كل المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة $f(x,y)=3x^2+y^2$

الحل: المطلوب إيجاد $f_{xx}\ ,\ f_{\mathrm{yy}}\ ,\ f_{xy}\ ,\ f_{yx}$

$$f_x=6x\quad,\quad f_{xx}=6\quad,\quad f_{xy}=0$$
$$f_\mathrm{y}=2\mathrm{y}\quad,\quad f_{\mathrm{yy}}=2\quad,\quad f_{yx}=0$$

مثال: اذا كانت $f(x,y)=x\cos(x\mathrm{y})\,\mathrm{e}^{xy}+\sin\mathrm{y}$. جد f_x و f_y

مثال: اذا كانت $f(x,y)=\mathrm{y}\cos(x\mathrm{y})\,\mathrm{e}^{xy}+\sin x$. جد f_x و f_y

مثال: اذا كانت $f(x,y)=(x-\mathrm{y})\sin(x+\mathrm{y})$. جد f_x و f_y

مثال: اذا كانت $f(x,y)=\mathrm{y}\cos^6(x^2)$. جد f_x و f_y

مثال: جد كل المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية للدالة $f(x,y)=\sin(xy^2)+\ln\left(\frac{x}{y}\right)$

المطلوب إيجاد: $f_{xx}\ ,\ f_{\mathrm{yy}}\ ,\ f_{xy}\ ,\ f_{yx}$