تطبيقات التكامل المحدد

هناك تطبيقات كثيرة للتكامل المحدد، فهو يستعمل في أيجاد مساحة منطقة بين مخططين، أيجاد حجوم الأجسام الدورانية، والمساحات السطحية للأجسام الدورانية، وأيجاد المسافة المقطوعة لجسم يتحرك بتعجيل في فترة زمنية معينة، وأيجاد الشغل، ومركز الثقل، وتطبيقات فيزيائية وهندسية وأحصائية كثيرة.

حساب المساحة باستعمال التكامل المحدد

لتكن $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة المغلقة $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$. اذا كانت $f(x) \geq 0$ على الفترة $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ ، فأن المساحة $\mathrm{A}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}$ المحصورة بين منحني الدالة ومحور السينات، والمستقيمين $x = \mathrm{a}$ و $x = \mathrm{b}$ تحسب كالاتي:

$$\mathrm{A}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)\ \mathrm{d}x$$

اذا كانت $f(x) \leq 0$ على الفترة $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ ، فأن المساحة $\mathrm{A}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}$ المحصورة بين منحني الدالة ومحور السينات، والمستقيمين $x = \mathrm{a}$ و $x = \mathrm{b}$ تحسب كالاتي:

$$\mathrm{A}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = \left|\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)\ \mathrm{d}x\right| \qquad \text{or} \qquad \mathrm{A}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = -\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} f(x)\ \mathrm{d}x$$

أذا وجد عدد c بين a و b أي أن $\mathrm{a} < \mathrm{c} < \mathrm{b}$ بحيث أن $f(x) \geq 0$ لكل x في الفترة $[\mathrm{a},\mathrm{c}]$ و $f(x) \leq 0$ لكل x في الفترة $[\mathrm{c},\mathrm{b}]$ ، فان المساحة $\mathrm{A}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}$ المحصورة بين منحني الدالة ومحور السينات، والمستقيمين $x = \mathrm{a}$ و $x = \mathrm{b}$ تحسب كالاتي:

$$\mathrm{A}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{c}} f(x)\ \mathrm{d}x + \left|\int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}} f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

أذا وجد عدد c بين a و b أي أن $\mathrm{a} < \mathrm{c} < \mathrm{b}$ بحيث أن $f(x) \leq 0$ لكل x في الفترة $[\mathrm{a},\mathrm{c}]$ و $f(x) \geq 0$ لكل x في الفترة $[\mathrm{c},\mathrm{b}]$ ، فان المساحة $\mathrm{A}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}}$ المحصورة بين منحني الدالة ومحور السينات، والمستقيمين $x = \mathrm{a}$ و $x = \mathrm{b}$ تحسب كالاتي:

$$\mathrm{A}_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = \left|\int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{c}} f(x)\ \mathrm{d}x\right| + \int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

مثال: جد مساحة المنطقة المحدودة بمخطط الدالة $f(x) = x^2 - 5$ ، محور السينات والمستقيمين $x = -1$, $x = 2$.

الحل: بما أن $f(x) < 0$ لكل x في الفترة المغلقة $[-1, 2]$ ، فأن المنطقة المطلوب أيجاد مساحتها تقع تحت محور السينات. أذاً

$$A_{-1}^{2} = -\int_{-1}^{2} f(x)\ dx = -\int_{-1}^{2} (x^2 - 5)\ dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 5x\right) \Big|_{-1}^{2}$$

$$= -\left(\left(\frac{2^3}{3} - 5(2)\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - 5(-1)\right)\right) = -\left(\frac{8}{3} - 10 + \frac{1}{3} - 5\right)$$

$$= -(-12) = 12$$

مثال: جد المساحة الكلية المحصورة بين مخطط الدالة $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ ومحور السينات.

الحل: نحتاج لأيجاد نقاط تقاطع منحني الدالة مع محور السينات. يتقاطع المنحني مع محور السينات اذا كان $f(x) = 0$. نضع $f(x) = 0$ ونوجد قيم x .

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$$

$$\Longrightarrow x^2(x-3) - (x-3) = 0 \Longrightarrow (x^2 - 1)(x-3) = 0$$

$$\Longrightarrow (x+1)(x-1)(x-3) = 0 \Longrightarrow x = -1, 1, 3$$

وعليه فأن مخطط الدالة يقطع محور السينات عند -1 , 1 , 3 .

نلاحظ ان $f(x) \geq 0$ في الفترة $[-1, 1]$ ، وان $f(x) \leq 0$ في الفترة $[1, 3]$. أي أن المنطقة الأولى R_1 تقع فوق محور السينات وتكون مساحتها A_{-1}^{1} معطاة بـــ

$$A_{-1}^{1} = \int_{-1}^{1} (x^3 - 3x^2 - x + 3)\ dx$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{3}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + 3\,x \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \left(\frac{1^4}{4} - \frac{3}{3}1^3 - \frac{1^2}{2} + 3\,(1)\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{3}{3}(-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + 3\,(-1)\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right) - \left(\frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} - 3\right) = 4$$

والمنطقة الثانية R_2 تقع تحت محور السينات وتكون مساحتها A_1^3

$$A_1^3 = -\int_1^3 f(x)\ dx = -\int_1^3 (x^3 - 3x^2 - x + 3)\ dx$$

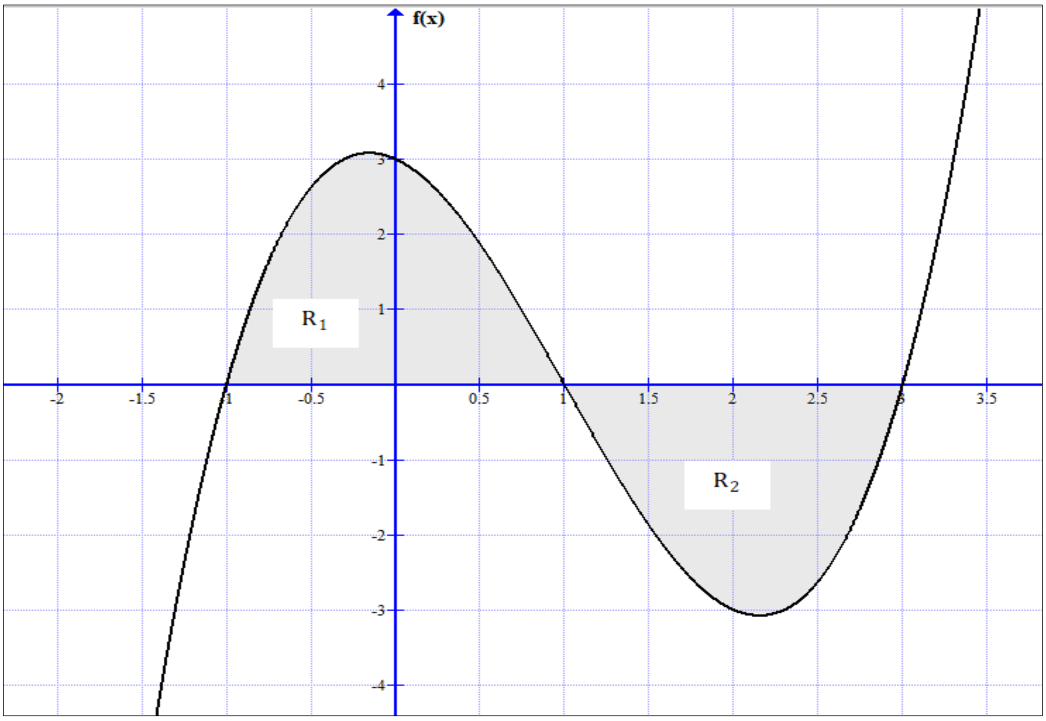
$$= -\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{3}x^3 - \frac{x^2}{2} + 3\,x\right)\Big|_1^3$$

$$= -\left(\left(\frac{3^4}{4} - \frac{3}{3}3^3 - \frac{3^2}{2} + 3\,(3)\right) - \left(\frac{1^4}{4} - \frac{3}{3}1^3 - \frac{1^2}{2} + 3\,(1)\right)\right)$$

$$= -\left(\left(\frac{81}{4} - 27 - \frac{9}{2} + 9\right) - \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\ \right)\right) = -(-4) = 4$$

أذاً، فالمساحة الكلية هي:

$$A = A_{-1}^1 + A_1^3 = 8$$



مثال: جد مساحة المنطقة المحدودة بمخطط الدالة $f(x) = x^2$ ، محور السينات والمستقيمين $x = 3\ ,\ x = 1$.

مثال: جد مساحة المنطقة المحدودة بمخطط الدالة $f(x) = -x^2$ ، محور السينات والمستقيمين $x = 2\ ,\ x = -2$.

مثال: جد مساحة المنطقة المحدودة بمخطط الدالة $f(x) = -x^3$ ، محور السينات والمستقيمين $x = 2$, $x = -3$.

الحل: نلاحظ ان $f(x) \geq 0$ لكل x في الفترة المغلقة $[-3, 0]$. ونلاحظ أن $f(x) \leq 0$ لكل x في الفترة المغلقة $[0, 2]$. لذلك

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_{-3}^{0} + \mathrm{A}_{0}^{2}$$

$$\mathrm{A}_{-3}^{0} = \int_{-3}^{0} f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{-3}^{0} (-x^3)\ \mathrm{d}x = -\int_{-3}^{0} x^3\ \mathrm{d}x = -\frac{x^4}{4}\Big|_{-3}^{0}$$

$$= -\left(0 - \frac{-3^4}{4}\right) = \frac{81}{4}$$

$$\mathrm{A}_{0}^{2} = -\int_{0}^{2} (-x^3)\ \mathrm{d}x = \int_{0}^{2} x^3\ \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\Big|_{0}^{2} = \frac{2^4}{4} - 0 = 4$$

وعليه فأن

$$\mathrm{A} = \mathrm{A}_{-3}^{0} + \mathrm{A}_{0}^{2} = \frac{81}{4} + 4 = \frac{97}{4}$$

مثال: جد مساحة المنطقة المحدودة بمخطط الدالة $f(x) = x^2 - 6\,x + 8$ ومحور السينات

الحل: يتقاطع منحني الدالة مع المحور السيني أذا كان $f(x) = 0$. لأيجاد نقاط التقاطع نضع

$$f(x) = 0 \Longrightarrow x^2 - 6\,x + 8 = 0 \Longrightarrow (x-2)\cdot(x-4) = 0$$

$$\Longrightarrow x = 2 \quad \text{or} \quad x = 4$$

أذاً يقطع المنحني المحور السيني عند $x = 2$ و $x = 4$ وتكون هاتان القيمتان حدي التكامل.
وبما أن $f(x) \leq 0$ لكل x في الفترة المغلقة $[2, 4]$ ، فأن المنطقة المطلوب أيجاد مساحتها تقع تحت محور السينات. لذلك

$$\mathrm{A}_{2}^{4} = -\int_{2}^{4} (x^2 - 6\,x + 8)\ \mathrm{d}x = -\left(\frac{x^3}{3} - \frac{6\,x^2}{2} + 8\,x\right)\Big|_{2}^{4}$$

$$= -\left(\left(\frac{4^3}{3} - \frac{6\,(4)^2}{2} + 8\,(4)\right) - \left(\frac{2^3}{3} - \frac{6\,(2)^2}{2} + 8\,(2)\right)\right)$$

$$= -\left(\left(\frac{64}{3} - \frac{96}{2} + 32\right) - \left(\frac{8}{3} - \frac{24}{2} + 16\right)\right) = -\left(\frac{64-48}{3} - \frac{8+12}{3}\right)$$

$$= -\left(\frac{16}{3} - \frac{20}{3}\right) = -\left(\frac{-4}{3}\right) = \frac{4}{3}$$

مثال: جد مساحة المنطقة المحدودة بمخطط الدالة $f(x) = |2x-1|$ ، محور السينات والمستقيمين $x = 0$, $x = 2$.

الحل: من تعريف الحد المطلق، نجد أن

$$|2x-1| = \begin{cases} 2x-1 & (2x-1) \geq 0 \\ -(2x-1) & (2x-1) < 0 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 2x-1 & , \quad x \geq 1/2 \\ -(2x-1) & , \quad x < 1/2 \end{cases}$$

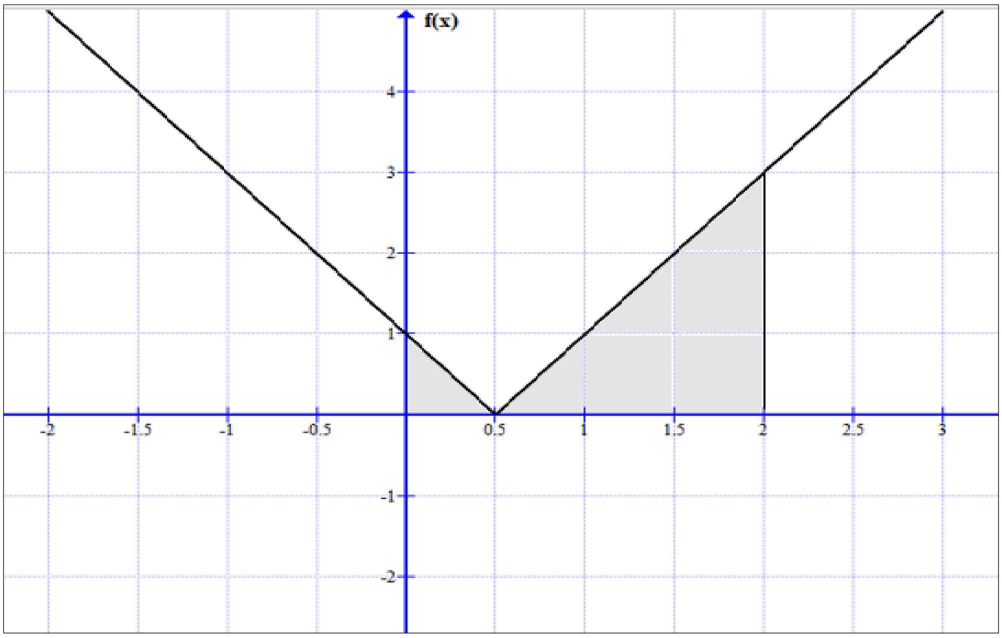
المساحة المطلوبة تحسب كالاتي:

$$A_0^2 = \int_0^2 |2x-1| \; dx = \int_0^{\frac{1}{2}} -(2x-1)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1)\, dx$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} (-2x+1)\, dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1)\, dx = \frac{-2x^2}{2} + x \,\Big|_0^{1/2} + \frac{2x^2}{2} - x \,\Big|_{1/2}^{2}$$

$$= -x^2 + x \,\Big|_0^{1/2} + x^2 - x \,\Big|_{1/2}^{2}$$

$$= \left(\left(-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\right) - (0)\right) + \left((4-2) - \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{4} = \frac{5}{2}$$



مثال: جد مساحة المنطقة المحدودة بمخطط الدالة $f(x) = x^2 + 3\,x$ ومحور السينات .

الحل: نحاول أيجاد نقاط تقاطع المنحني مع محور السينات، وذلك بوضع $f(x) = 0$.

$$f(x) = 0 \Longrightarrow\ x^2 + 3\,x = 0 \Longrightarrow x(x+3) = 0$$

وهذا يؤدي الى أن $x = 0$ أو $x = -3$. بما أن $f(x) \le 0$ لكل x في الفترة $[-3, 0]$ فأن

$$A_{-3}^{0} = -\int_{-3}^{0} (x^2 + 3\,x)\ dx = -\left(\frac{x^3}{3} + \frac{3\,x^2}{2}\right) \Big|_{-3}^{0}$$

$$= -\left((0) - \left(\frac{(-3)^3}{3} + \frac{3(-3)^2}{2}\right)\right) = -\left(0 - \left(\frac{-27}{3} + \frac{27}{2}\right)\right)$$

$$= -\left(\frac{27}{3} - \frac{27}{2}\right) = -\left(\frac{54-81}{6}\right) = -\left(\frac{-27}{6}\right) = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

مثال: جد مساحة المنطقة المحدودة بمخطط الدالة $f(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$ ، محور السينات والمستقيمين $x = 1$, $x = 2$. الجواب: $A = \frac{3}{20}$.

المساحة بين منحنيين The Area Between Two curves

لتكن f ، g دالتين مستمرتين على الفترة المغلقة $[a, b]$ ، بحيث أن $f(x) \ge g(x)$ لكل x في $[a, b]$ ، أي، أن مخطط $f(x)$ يقع فوق مخطط $g(x)$ في الفترة $[a, b]$. فأن مساحة المنطقة المحدودة بالمخططين لــ $f(x)$ ، $g(x)$ والمستقيمين $x = a$ ، $x = b$ هي:

$$A = \int_{a}^{b} (f(x) - g(x))\, dx$$

ملاحظة:

في حالة $g(x) \ge f(x)$ ، فأن المساحة في التعريف أعلاه تحسب كالاتي:

$$A = \int_{a}^{b} (g(x) - f(x))\, dx$$

مثال: جد مساحة المنطقة المحدودة بمخطط الدالة $f(x) = x^2 + 4$ والمستقيمات

$x = 1$, $x = -1$, $y = 4x$

الحل: بما أن $x^2 + 4 \ge 4x$ لكل x في $[-1, 1]$ ، فأن

$$A = \int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))\, dx = \int_{-1}^{1} (x^2 + 4 - 4x)\, dx = \frac{x^3}{3} + 4x - \frac{4}{2}x^2 \Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{x^3}{3} + 4x - 2x^2 \Big|_{-1}^{1}$$
$$= \left(\frac{1^3}{3} + 4(1) - 2(1^2)\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} + 4(-1) - 2((-1)^2)\right)$$
$$= \left(\frac{1}{3} + 4 - 2\right) - \left(\frac{-1}{3} - 4 - 2\right) = \frac{1+6}{3} - \left(\frac{-1-18}{3}\right) = \frac{7}{3} - \left(\frac{-19}{3}\right)$$
$$= \frac{7}{3} + \frac{19}{3} = \frac{26}{3}$$

مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y = x^2$ والمستقيم $y = 2x$.

الحل: نوجد أولاً نقطتي تقاطع المنحني مع المستقيم، وذلك بحل معادلتيهما انياً

$y = x^2 \quad , \quad y = 2x$

$x^2 = 2x$

$x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

أي أن $x = 0$ أو $x = 2$. وبذلك، تكون $a = 0$ و $b = 2$. نلاحظ أن $2x \geq x^2$ لكل x في الفترة $[0, 2]$. وبذلك، فأن

$$A = \int_0^2 (2x - x^2)\,dx = \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = \left(2^2 - \frac{2^3}{3}\right) - (0-0) = \frac{4}{3}$$

مثال: جد المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين $y = x^3$ و $y = \sqrt{x}$.

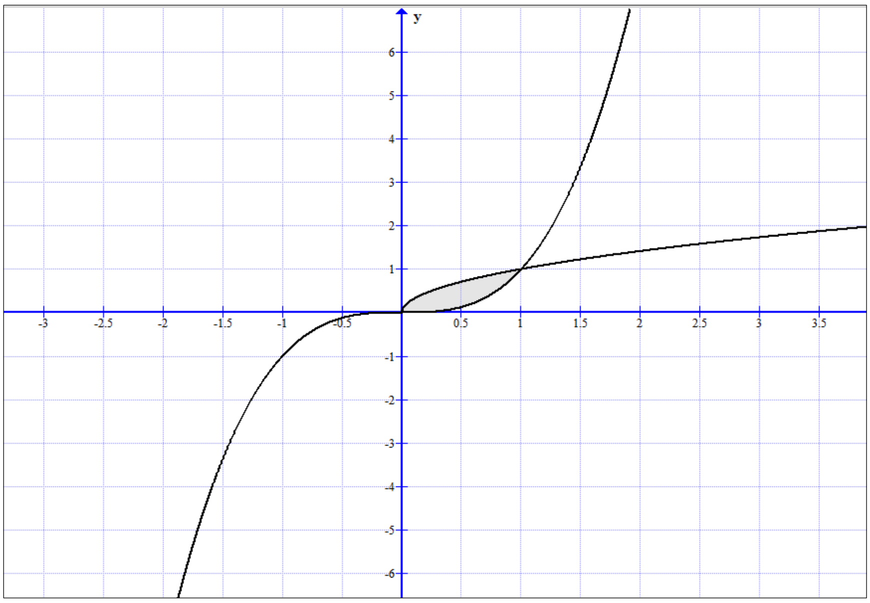
الحل: نوجد أولاً نقطتي تقاطع المنحنيين $y = x^3$ و $y = \sqrt{x}$.

$$x^3 = \sqrt{x} \Longrightarrow x^6 = x \Longrightarrow x^6 - x = 0 \Longrightarrow x(x^5 - 1) = 0$$

Either $x = 0$ or $x = 1$

نلاحظ أن $\sqrt{x} \geq x^3$ لكل x في الفترة $[0, 1]$. وبذلك، فأن

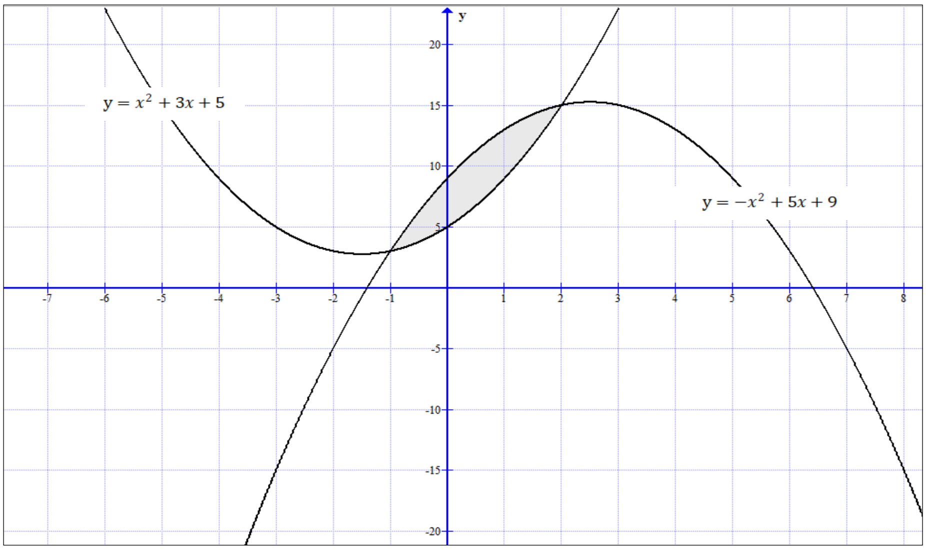
$$A = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3\right)dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{x^4}{4}\Big|_0^1$$
$$\left(\frac{2}{3}(1)^{3/2} - \frac{1^4}{4}\right) - (0-0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{4} = \frac{8-3}{12} = \frac{5}{12}$$



مثال: جد المساحة المحصورة بين منحنيي الدالتين

$y = x^2 + 3x + 5$ و $y = -x^2 + 5x + 9$.

الحل: $A = 9$



مثال: جد مساحة المنطقة المحصورة بين منحنيي الدالتين

$y = -x^2 - 4$ و $y = -8$

$y = 2 - x^2$ و $y = -x$

$y = x^3 + 3$ و $y = 4x + 3$