الدالة الاسية Exponential Function

تعريف: الدالة الاسية ذات الأساس a تكتب بالصيغة

$$f(x) = a^{x} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

حيث أن a عدد حقيقي اكبر من الصفر ($a > 0$).

المجال (أو المنطلق) للدالة الاسية هو جميع الاعداد الحقيقية، أي أن $D_f = (-\infty, \infty)$.

أمثلة:

$$f(x) = 4^{x} \quad , \quad f(x) = 7^{-x} \quad , \quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$$

بعض خصائص الدالة الاسية:

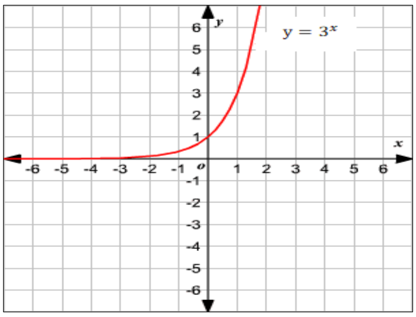
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^{m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^{m}$
- أذا كان $a > 0$ ، فان $a^{x} > 0$ لأي عدد حقيقي x .
- $a^{x+y} = a^{x} \cdot a^{y}$
- $a^{x-y} = \frac{a^{x}}{a^{y}}$
- $a^{0} = 1$
- أذا كان $a > 1$ ، فان a^{x} دالة متزايدة.
- أذا كان $0 < a < 1$ ، فان a^{x} دالة متناقصة.
- a^{x} دالة مستمرة لأي عدد حقيقي x .
- أذا كان $a = 1$ ، فان $a^{x} = 1$ لكل x .

مثال: مثّل كل دالة بيانيًا. ووضح المجال والمدى ومواضع تزايد أو تناقص الدالة.

$$f(x) = 3^{x} \quad , \quad g(x) = 2^{-x} \quad , \quad h(x) = 5^{-x} \quad , \quad u(x) = 4^{x}$$

الحل: الدالة $f(x) = 3^{x}$

$$D_f = (-\infty, \infty) \quad , \quad R_f = (0, \infty)$$

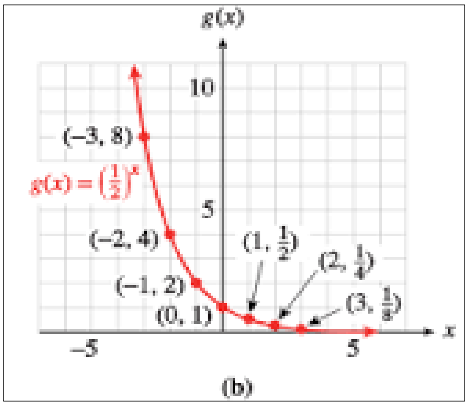


x	-4	-2	-1	0	2	4	6
$f(x)$	0.01	0.11	0.33	1	9	81	729

الدالة متزايدة في جميع الاعداد الحقيقية، أي أن فترة التزايد $(-\infty,\infty)$.

أما الدالة $g(x) = 2^{-x}$

$$D_g = (-\infty,\infty) \qquad , \qquad R_g = (0,\infty)$$



x	-6	-4	-2	0	2	4	6
$g(x)$	64	16	4	1	0.25	0.06	0.02

الدالة متناقصة في جميع الاعداد الحقيقية، أي أن فترة التناقص $(-\infty,\infty)$.

تفاضل وتكامل الدالة الاسية

لتكن u دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x ، فان:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot \frac{du}{dx}}$$

$$\boxed{\int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C \qquad , \quad a > 0 \,, a \neq 1}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ ، أذا كانت $\quad y = 8 \times 2^{(3x^2+4x+5)}$

الحل: لاحظ أن الأساس هنا $a = 2$

$$\frac{dy}{dx} = 8 \times 2^{(3x^2+4x+5)} \cdot \ln 2 \cdot (6x+4)$$
$$= (48x+32) \cdot 2^{(3x^2+4x+5)} \cdot \ln 2$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ ، أذا كانت $y = x^2\ 3^x$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot (3^x \cdot \ln 3) + 3^x \cdot (2x) = x\ 3^x (x\ \ln 3 + 2)$$

مثال: جد $\frac{dy}{dt}$ ، أذا كانت $y = 4^{t^4}$

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = 4^{t^4} \cdot \ln 4 \cdot (4t^3)$$

مثال: جد $\frac{dy}{dt}$ ، أذا كانت $y = 4^t \cdot\ 2^{t^2}$

الحل:

$$y = 4^t \cdot\ 2^{t^2} = 2^{2t} \cdot\ 2^{t^2} = 2^{2t+t^2}$$
$$\frac{dy}{dt} = 2^{2t+t^2} \cdot \ln 2 \cdot (2 + 2t)$$

مثال: أحسب التكامل الاتي: $\int 7^{2x+3}\, dx$

الحل: مشتقة الاس 2. أذاً بالضرب والقسمة على 2

$$\frac{1}{2}\int 2\,(7^{2x+3})\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{7^{2x+3}}{\ln 7} + C = \frac{7^{2x+3}}{2\ln 7} + C = \frac{7^{2x+3}}{\ln 7^2} + C = \frac{7^{2x+3}}{\ln 49} + C$$

مثال: جد قيمة التكامل الاتي: $\int_0^1 \frac{3^x+4^x}{5^x}\, dx$

الحل:

$$\int_0^1 \frac{3^x + 4^x}{5^x}\,dx = \int_0^1 \left(\frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x}\right)dx = \int_0^1 \left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x\right\}dx$$

$$= \left\{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln(3/5)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^x}{\ln(4/5)}\right\}\Bigg|_0^1$$

$$= \left\{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{(1)}}{\ln(3/5)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{(1)}}{\ln(4/5)}\right\} - \left\{\frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{(0)}}{\ln(3/5)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{(0)}}{\ln(4/5)}\right\}$$

$$= \left\{ \frac{\frac{3}{5}}{\ln(3/5)} + \frac{\frac{4}{5}}{\ln(4/5)} \right\} - \left\{ \frac{1}{\ln(3/5)} + \frac{1}{\ln(4/5)} \right\}$$

$$= \frac{\frac{3}{5} - 1}{\ln(3/5)} + \frac{\frac{4}{5} - 1}{\ln(4/5)}$$

$$= \frac{-2/5}{\ln(3/5)} + \frac{-1/5}{\ln(4/5)} .$$

الدالة الاسية الطبيعية $y = e^x$ Natural Exponential Function

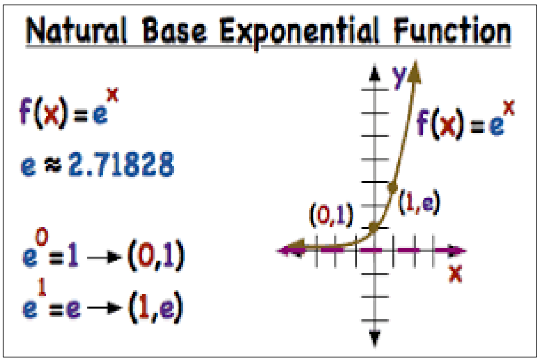
يعرف العدد e كالاتي:

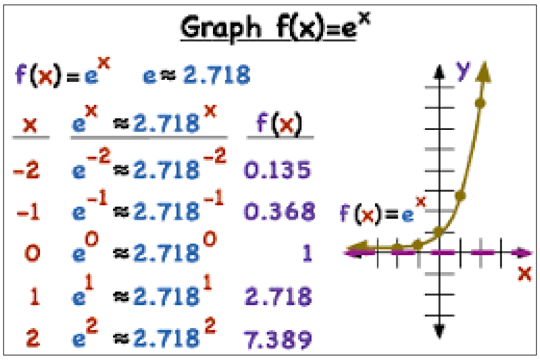
$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

فالعدد e هو أحد أهم الاعداد في الرياضيات وهو عدد غير نسبي ويمكن حساب قيمته مقربة الى أي عدد من المراتب العشرية وبأكثر من طريقة واحدة. وقيمة e التي حسبت هي

$e = 2.718281828459045 \ldots$

الدالة التي تأخذ الصيغة $y = e^x$ تسمى بالدالة الاسية الطبيعية لأن أساسها e ولها خصائص الدوال الاسية الأخرى.





تفاضل الدالة الاسية الطبيعية

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = e^{-x^2}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2} \cdot (-2x) = -2xe^{-2x}$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = e^{3x}\sin(2x)$

الحل:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= e^{3x}\cdot(2\cos(2x)) + \sin(2x)\cdot(3e^{3x}) \\ &= 2e^{3x}\cos(2x) + 3e^{3x}\sin(2x)\end{aligned}$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = -5\, e^{\sin x}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -5\, e^{\sin x}\cdot(\cos x) = -5\cos x \cdot e^{\sin x}$$

تكامل الدالة الاسية الطبيعية

$$\int e^{u}\, du = e^{u} + C$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int x\, e^{x^2}\, dx$

الحل: بالضرب والقسمة على 2

$$\frac{1}{2}\int 2x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int \frac{dx}{e^{x}+1}$

الحل: نضرب البسط والمقام بـــ e^{-x} فنحصل على

$$\int \frac{dx}{e^{x}+1} = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = -\ln(1+e^{-x}) + C$$

الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

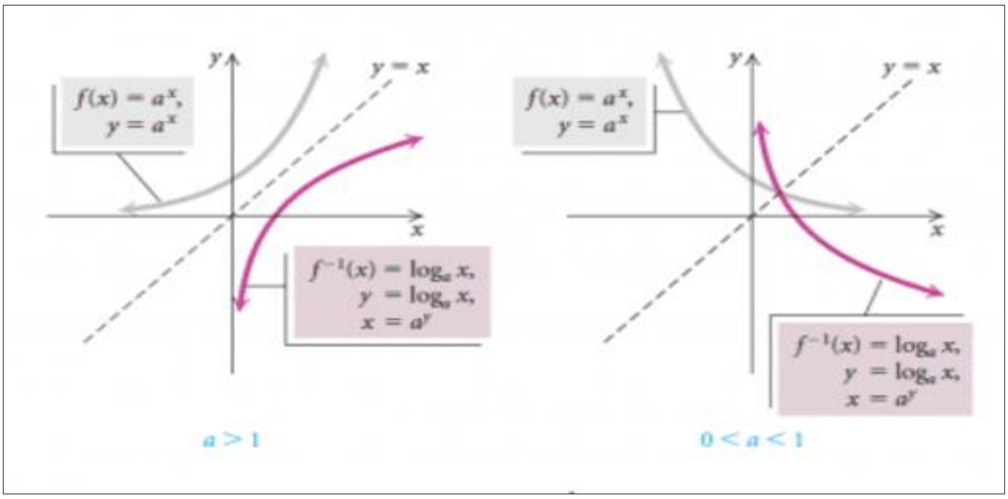
يطلق على معكوس $f(x) = a^{x}$ دالة لوغاريتمية بالأساس a ، ويرمز لها بـــ $\log_a x$. هذا يعني أنه اذا كانت

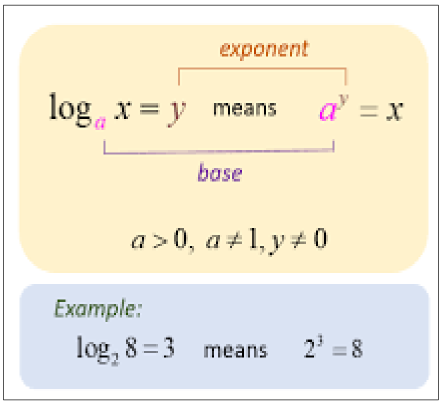
$$f(x) = a^{x} \quad , \quad a > 0 \,, \qquad a \neq 1$$

فأن

$$f^{-1}(x) = \log_a x$$

كما يظهر التمثيل البياني لهاتين الدالتين. لاحظ أن التمثيلات البيانية تمثل انعكاسات لبعضها البعض في المستقيم $y = x$. منطلق دالة اللوغاريتم هو الاعداد الحقيقية الموجبة.





الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$a > 0$ و $a \neq 1$ و x, y أعداد موجبة، فان:

1) $\log_{\mathrm{a}}(x\mathrm{y}) = \log_{\mathrm{a}}(x) + \log_{\mathrm{a}}(\mathrm{y})$

2) $\log_{\mathrm{a}}\left(\frac{x}{\mathrm{y}}\right) = \log_{\mathrm{a}}(x) - \log_{\mathrm{a}}(\mathrm{y})$

3) $\log_{\mathrm{a}}(1) = 0$

4) $\log_{\mathrm{a}}\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_{\mathrm{a}}(x)$

5) $\log_{\mathrm{a}}(\mathrm{a}) = 1$

6) $\log_{\mathrm{a}}(x^{\mathrm{r}}) = \mathrm{r} \cdot \log_{\mathrm{a}}(x)$ where $\mathrm{r} \in \mathbb{R}$

7) $\mathrm{a}^{\log_{\mathrm{a}}(x)} = x$

8) $\log_{\mathrm{a}}(\mathrm{b}) = \frac{1}{\log_{\mathrm{b}}(\mathrm{a})}$

9) $\log_{\mathrm{a}}(\mathrm{a}^{x}) = x$

مثال: أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يأتي.

$$\log_3(81) \quad , \quad \log_5(\sqrt{5}) \quad , \quad \log_7\left(\frac{1}{49}\right) \quad , \quad \log_2(2)$$

$$\log_8(512) \quad , \quad \log_4(4^{3.2}) \quad , \quad \log_2\left(\frac{1}{32}\right) \quad , \quad \log_{16}(\sqrt{2})$$

الحل: لأيجاد $\log_3(81)$ نفرض أن

$\log_3(81) = \mathrm{y}$

$3^{\mathrm{y}} = 81$ نكتب بصيغة اسية

$3^{\mathrm{y}} = 3^4$

$y = 4$ خاصية المساواة في الأسس

$\log_3(81) = 4$ ولهذا فأن

لأيجاد $\log_5(\sqrt{5})$ نفرض أن

$\log_5(\sqrt{5}) = \mathrm{y}$

$5^{\mathrm{y}} = \sqrt{5}$ نكتب بصيغة اسية

$5^{\mathrm{y}} = 5^{\frac{1}{2}}$

$y = \frac{1}{2}$ خاصية المساواة في الأسس

$\log_5(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$ ولهذا فأن

تفاضل الدالة اللوغاريتمية

أذا كانت $\mathrm{y} = \log_a(\mathrm{u})$ حيث $a \neq 1 , a > 0$ و u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x

فأن:

$$\boxed{\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{du}} \cdot \frac{\mathrm{du}}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{u}'}{\mathrm{u}} \cdot \frac{1}{\ln a}}$$

مثال: أذا كانت $\mathrm{y} = \log_3(3x^2 - 5)$ جد $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}$

الحل:

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x} = \frac{6x}{3x^2 - 5} \cdot \frac{1}{\ln 3}$$

مثال: أذا كانت $y = \log_8(7x^2 + 4)$ جد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{14x}{7x^2 + 4} \cdot \frac{1}{\ln 8}$$

مثال: أذا كانت $y = \log_3 \sqrt{x^2 + 1}$ جد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}(x^2 + 1)^{\frac{-1}{2}}(2x)}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\ln 3} = \frac{x}{x^2 + 1} \cdot \frac{1}{\ln 3}$$

مثال: أذا كانت $f(x) = a^x$ و $g(x) = \log_a x$ ، اوجد $(f \circ g)_{(x)}$ ، $(g \circ f)_{(x)}$

$$(f \circ g)_{(x)} = f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$

$$(g \circ f)_{(x)} = g(f(x)) = g(a^x) = \log_a(a^x) = x \cdot \log_a(a) = x \cdot 1 = x$$

أذاً $g = f^{-1}$

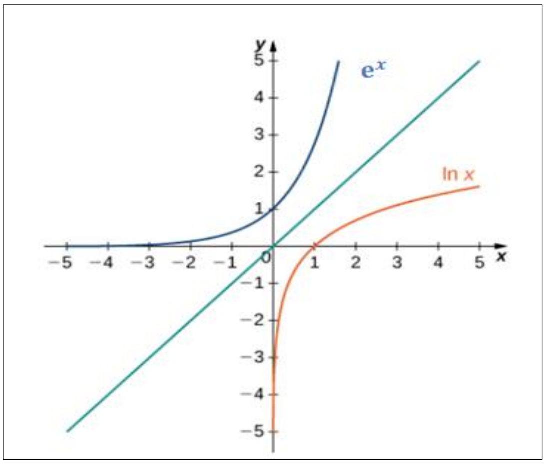
دالة اللوغاريتم الاعتيادي The Common logarithm Function

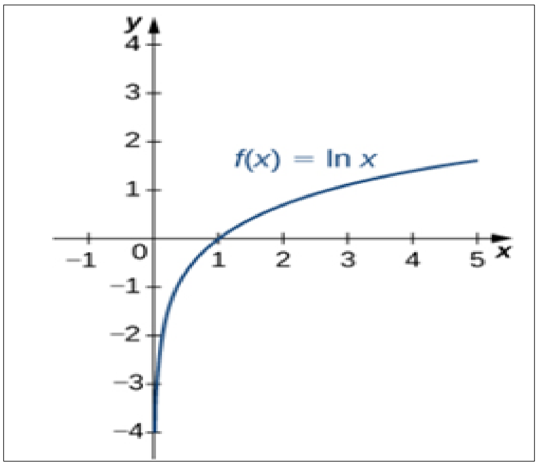
أذا كان الأساس $a = 10$ ، فأن $\log_{10}(x)$ يسمى اللوغاريتم الاعتيادي (أو الشائع) وغالباً ما يكون مكتوباً بدون الأساس $\log(x)$. أن دالة اللوغاريتم الاعتيادي $y = \log(x)$ هي معكوس الدالة الاسية $y = 10^x$ ، ولذلك $y = \log(x)$ فقط في حالة $10^y = x$ لكل $x > 0$. تنطبق خصائص اللوغاريتمات أيضاً على اللوغاريتمات الاعتيادية.

دالة اللوغاريتم الطبيعي The Natural logarithm Function

عندما يكون أساس اللوغاريتم e ، فأن اللوغاريتم $\log_e(x)$ يسمى اللوغاريتم الطبيعي، ويكتب $\ln x$. أي أن $\ln x = \log_e(x)$.

$$\boxed{e^{\ln x} = x \text{ for } x > 0 \quad \text{and} \quad \ln(e^x) = x \text{ for all } x}$$





أن دالة اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x$ مستمرة ومتزايدة في الفترة المفتوحة $(0, \infty)$. وأن

$$\lim_{x\to\infty}(\ln x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0}(\ln x) = -\infty$$

وأستناداً الى التعريف فأن $y = \ln x$ دالة متقابلة منطلقها $\mathbb{R}^+$ ومداها $\mathbb{R}$.

مثال: عبر عن $\ln 4.5$ بدلالة $a_1 = \ln 2$ و $a_2 = \ln 3$.

$$\ln 4.5 = \ln\frac{9}{2} = \ln 9 - \ln 2 = \ln 3^2 - \ln 2 = 2\ln 3 - \ln 2 = 2a_2 - a_1$$

تفاضل اللوغاريتم الطبيعي $\ln x$

أذا كانت $y = \ln u$ و u دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x ، فأن:

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \frac{1}{\ln x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x\cdot 0 - 1\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = 7\ln(4x)$

$$\frac{dy}{dx} = 7\cdot\left(\frac{1}{4x}\right)\cdot 4 = \frac{7}{x}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \ln(\tan x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x = \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \csc x\cdot\sec x$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y = (\ln(3x+1))^{3/2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(\ln(3x+1))^{1/2}\left(\frac{1}{3x+1}\right)(3) = \frac{9}{2}\frac{\sqrt{\ln(3x+1)}}{3x+1}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \ln(\sin x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$