الدوال متعددة المتغيرات　Functions of Several Variables

توجد الكثير من الكميات التي تَعتمد في قيمتها على كمية أو كميات أخرى مثل تلك الكميات تسمى متغيرات معتمدة (أو متغيرات تابعة) dependent variables ، بينما الكميات التي تُعتمد عليها تسمى متغيرات مستقلة independent variables .

تسمى الدالة بمتغير واحد اذا كان عدد المتغيرات المستقلة فيها واحد.

تسمى الدالة بمتغيرين اذا كان عدد المتغيرات المستقلة فيها أثنين.

تسمى الدالة بثلاث متغيرات اذا كان عدد المتغيرات المستقلة فيها ثلاثة.

.... وهكذا ....

تسمى الدالة بـــ n من المتغيرات اذا كان عدد المتغيرات المستقلة فيها n .

الدوال ذات المتغير المستقل الواحد مثل: $y = f(x)$

مثال: مساحة المربع A كمية تعتمد على طول ضلعه x . وحيث أن لكل قيمة لــ x توجد قيمة وحيدة لــ A ، لذلك فأن A دالة متغيرها المستقل x ونعبر عن ذلك بالشكل:

$$A = f(x) = x^2$$

مثال: مساحة الدائرة A هي متغير تابع (دالة) في المتغير المستقل r (نصف قطر الدائرة).

$$A = f(\mathrm{r}) = \pi \mathrm{r}^2$$

الدوال ذات متغيرين مستقلين مثل: $z = f(x, y)$

مثال: مساحة المستطيل A هي دالة بمتغيرين مستقلين x و y (بعدي المستطيل). حيث

$$A = f(x, \mathrm{y}) = x\,\mathrm{y}$$

أي أن A متغير معتمد (تابع) وحيد القيمة في المتغيرين المستقلين x و y .

مثال: حجم الغاز v يتناسب طردياً مع درجة حرارته المطلقة t وعكسياً مع ضغطه p .

أي أن v دالة في المتغيرين المستقلين t و p :

$$\mathrm{v} = \mathrm{k}\,\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{p}} \quad ; \quad \mathrm{k} \text{ is constant.}$$

الدوال ذات ثلاث متغيرات مستقلة مثل: $u = f(x, y, z)$

دوال ذات ثلاث متغيرات مستقلة x, y, z . منطلق هذه الدوال هو مجموعة الاعداد المرتبة ثلاثياً (x, y, z) والتي هي مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$. ويرمز لقيم f بالرمز $f(x, y, z)$ التي تقرن العدد المرتب ثلاثياً (x, y, z) بعدد وحيد u.

مثال: حجم متوازي المستطيلات u هو دالة (متغير تابع وحيد القيمة) في ثلاث متغيرات مستقلة هي أبعاد متوازي المستطيلات: الطول x والعرض y والارتفاع z .

$$\mathrm{u} = f(x, \mathrm{y}, \mathrm{z}) = x\ \mathrm{y}\ \mathrm{z}$$

الدوال في n من المتغيرات المستقلة مثل: $\mathrm{u} = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\mathrm{n}})$

يمكن تعميم التعريف السابق للدالة u في المتغيرات المستقلة $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\mathrm{n}}$ وعددها n اذا وجدت قاعدة تقرن بكل عدد مرتب نونياً على الصورة $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{\mathrm{n}})$ عدد وحيد u . ومنطلق هذه الدالة يكون مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$.

سوف نهتم في دراستنا هذه على الدوال ذات المتغيرين المستقلين.

الدوال في متغيرين Functions of two variables

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, \mathrm{y}) : x \in \mathbb{R}, \mathrm{y} \in \mathbb{R}\}$$

تعريف الدالة الحقيقية في متغيرين:

لتكن D مجموعة من الأزواج المرتبة (أي أن $\mathrm{D} \subseteq \mathbb{R}^2$). تسمى $f(x, \mathrm{y})$ دالة في متغيرين أذا كانت f تقرن (أي تعين) لكل زوج مرتب (x, y) في D عدد حقيقي واحد فقط $f(x, \mathrm{y})$. تسمى المجموعة D منطلق (أو مجال) الدالة f ، أي أن $\mathrm{D}_f = \mathrm{D}$. ومجموعة القيم التي تأخذها الدالة f تسمى مدى الدالة f ، أي أن $\mathrm{R}_f = \{f(x, \mathrm{y}) : (x, \mathrm{y}) \in \mathrm{D}\}$.

أيجاد المنطلق:

توجد ثلاث دوال أساسية معروفة المنطلق وهذه الدوال هي: دوال متعددات الحدود، الدوال الكسرية والدوال الجذرية.

دوال متعددات الحدود (أو كثيرات الحدود): Polynomial Functions

دالة متعددة الحدود في متغيرين مستقلين هي دالة تتكون من حدود، كل حد عبارة عن ثابت حقيقي مضروب في المتغيرين المستقلين. المتغيران المستقلان مرفوعان لأسس صحيحة غير سالبة (الأس موجب أو صفر). هذه الدالة منطلقها $\mathbb{R}^2$.

مثال:

$f(x,y) = 2xy + 4y^2$
$f(x,y) = 5x^2 + 7y$
$f(x,y) = x^{10}y + 12x^2y^7 + 3$
$f(x,y) = x^3y + x^2 + x$

كل هذه الدوال متعددات حدود منطلقها $\mathbb{R}^2$.

Example: let $z = f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 7$

1. Find the domain and range of f.
2. Compute $f(0,0)$, $f(-1,2)$, $f(3,5)$, $f(0,-1)$

Solution:

1. The function f is polynomial, hence its domain is
$D_f = \{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$.

To find the range:

Since $2x^2 + y^2 \geq 0 \Longrightarrow 2x^2 + y^2 + 7 \geq 7 \Longrightarrow f(x,y) \geq 7$

$R_f = \{f(x,y): f(x,y) \in \mathbb{R}, f(x,y) \geq 7\} = [7, \infty)$.

2. $f(0,0) = 2(0)^2 + (0)^2 + 7 = 7$

$f(-1,2) = 2(-1)^2 + (2)^2 + 7 = 13$

$f(3,5) = 2(3)^2 + (5)^2 + 7 = 50$

$f(0,-1) = 2(0)^2 + (-1)^2 + 7 = 8$.

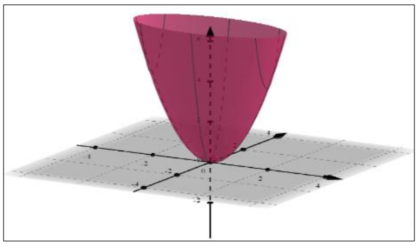
مثال: حدد المنطلق والمدى للدالة $f(x,y) = x^2 + 5y^2$

الحل: واضح أن منطلق هذه الدالة هو $\mathbb{R}^2$ لأن الدالة متعددة حدود. وبما أن

$f(x,y) = x^2 + 5y^2 \geq 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$

فان مدى هذه الدالة يكون جميع الأعداد الحقيقية غير السالبة . أي أن

$R_f = \mathbb{R}_{\geq 0} = \{f(x,y) \in \mathbb{R}: f(x,y) \geq 0\}$



الدوال الكسرية : هي التي تتكون من بسط ومقام وكلاً من البسط والمقام عبارة عن دوال متعددات حدود. هذه الدوال منطلقها $\mathbb{R}^2$ ما عدا أصفار المقام (أي ما عدا جميع الأزواج المرتبة التي تجعل المقام يساوي الصفر). ونكتب المنطلق على الصورة:

$\mathbb{R}^2 - \{\text{zeros}\}$ or $\mathbb{R}^2 \backslash \{\text{zeros}\}$

مثال:

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y}{x^2 - 1}$$

لتحديد المنطلق نضع

$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow (x-1) \cdot (x+1) = 0 \Longrightarrow x = 1 \text{ or } x = -1$

$D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(-1, y), (1, y)\}$ or

$D_f = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - 1 \neq 0\}$

or $D_f = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \neq \pm 1\}$

مثال: $f(x, y) = \frac{1}{x+y}$

$D_f = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y \neq 0\}$

or $D_f = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, y \neq -x\}$

مثال:

$$f(x, y) = \frac{13 + x}{y - 1}$$

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(x, 1)\}$ or $D_f = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, y - 1 \neq 0\}$

or $D_f = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 1\}$

مثال:

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2}$$

$D_f = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ or $D_f = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 \neq 0\}$

or $D_f = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x, y) \neq (0,0)\}$

Example: $f(x, y) = \frac{x}{y}$

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(x, 0)\}$ or $D_f = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2, y \neq 0\}$

Example: $f(x,\mathrm{y}) = \frac{5x+\mathrm{y}^2-3}{x-\mathrm{y}}$

$\mathrm{D}_f = \{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2, x - y \neq 0\}$

or $\mathrm{D}_f = \{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2, y \neq x\}$

Example: $f(x,\mathrm{y}) = \frac{5x+\mathrm{y}}{x^2+\mathrm{y}^2-3}$

$\mathrm{D}_f = \{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2, x^2 + \mathrm{y}^2 - 3 \neq 0\}$

or $\mathrm{D}_f = \{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2, x^2 + \mathrm{y}^2 \neq 3\}$

Example: $f(x,\mathrm{y}) = \frac{3x\mathrm{y}}{x^2+\mathrm{y}^2+3}$

لاحظ أن المقام $x^2 + \mathrm{y}^2 + 3 \neq 0$ لأي $(x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2$. وعليه فأن

$\mathrm{D}_f = \{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$

Example: $f(x,\mathrm{y}) = \frac{x-\mathrm{y}}{x^2-\mathrm{y}^2}$

بما أن

$x^2 - \mathrm{y}^2 = 0 \Longrightarrow \mathrm{y}^2 = x^2 \Longrightarrow \mathrm{y} = \pm x$

فأن منطلق الدالة هو جميع النقاط $(x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2$ في المستوي XY ما عدا تلك النقاط الواقعة على المستقيمين $\mathrm{y} = \pm x$. لذا

$\mathrm{D}_f = \{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{y} \neq \pm x\}$

الدوال الجذرية Root Functions:

هناك حالتان للدالة الجذرية، الأولى أذا كان أس الجذر فردي ففي هذه الحالة يكون المنطلق هو $\mathbb{R}^2$ ، اما اذا كان أس الجذر زوجي فأن المنطلق يكون جميع الأزواج المرتبة التي تجعل ما تحت الجذر غير سالب، أي أن $\text{domain} = \left\{(x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 : \text{تحت الجذر} \geq 0\right\}$.

مثال:

$f(x,\mathrm{y}) = \sqrt[3]{x+y}$

$f(x,\mathrm{y}) = \sqrt[5]{1-x\,y}$

$f(x,\mathrm{y}) = \sqrt[7]{y^2+5x+4}$

هذه الدوال منطلقها $\mathbb{R}^2$.

مثال: $f(x,\mathrm{y}) = \sqrt{y-x}$

الحل: نضع المقدار الموجود داخل الجذر أكبر أو يساوي صفر

$y - x \geq 0 \Rightarrow y \geq x$

$\mathrm{D}_f = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x\}$

مثال: $f(x, y) = \sqrt{y + x}$

الحل: $\mathrm{D}_f = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq -x\}$

مثال: $f(x, y) = \sqrt{y^2 - 5x + 6y}$

الحل: $\mathrm{D}_f = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 - 5x + 6y \geq 0\}$

مثال: حدد المنطلق والمدى للدالة $f(x, y) = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$. وأحسب قيمة كل من $f(1, -1)$, $f(0, 1)$

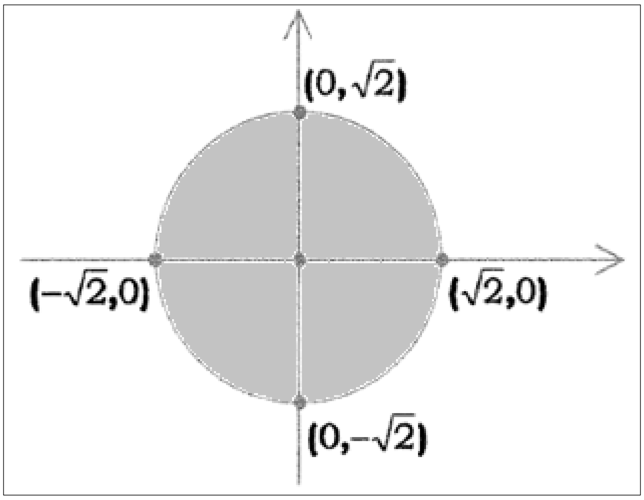
الحل: الدالة معرفة عندما يكون المقدار $2 - x^2 - y^2$ غير سالب، أي أن

$2 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow 2 - (x^2 + y^2) \geq 0 \Rightarrow -(x^2 + y^2) \geq -2$

وبالضرب في -1 نحصل على $(x^2 + y^2) \leq 2$

وعليه فأن منطلق هذه الدالة هو عبارة عن قرص مركزه نقطة الأصل ونصف قطره $\sqrt{2}$. أي أن

$\mathrm{D}_f = \{(x, y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$



أما مدى هذه الدالة يكون الفترة المغلقة $[0, \sqrt{2}]$. أي أن $\mathrm{R}_f = [0, \sqrt{2}]$

$f(0, 1) = \sqrt{2 - 0^2 - 1^2} = \sqrt{2 - 1} = \sqrt{1} = 1$

$f(1, -1) = \sqrt{2 - 1^2 - (-1)^2} = \sqrt{2 - 1 - 1} = \sqrt{2 - 2} = \sqrt{0} = 0$

Example: Find the domain of $f(x,\mathrm{y}) = \sqrt{\mathrm{y} - x}$

$\mathrm{D}_f = \{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{y} - x \geq 0\}$ or

$\mathrm{D}_f = \{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{y} \geq x\}$

Example: Find the domain of $f(x,\mathrm{y}) = \sqrt{x^2 + \mathrm{y}^2}$

بما أن المقدار $x^2 + \mathrm{y}^2$ أكبر أو يساوي صفر لأي $(x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2$ ، وعليه فأن المنطلق هو $\mathbb{R}^2$. أي أن $\mathrm{D}_f = \{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2\} = \mathbb{R}^2$.

Example: Find the domain of $f(x,\mathrm{y}) = \sqrt{x^2 + \mathrm{y}^2 - 1}$

$\mathrm{D}_f = \{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2, x^2 + \mathrm{y}^2 - 1 \geq 0\}$

أيجاد المنطلق لدوال تحتوي في حدودها على دوال مثلثية أو دوال لوغاريتمية أو دوال أسية... الخ. نوضحها بالامثلة الاتية:

مثال: عين المنطلق للدالة $f(x,\mathrm{y}) = x\,y^2 - \sin(x\,y) + \ln(x^2 + y^2 - 3)$.

الحل: $f(x,\mathrm{y})$ معرفة أذا وفقط اذا كان $x^2 + y^2 - 3 > 0$ لأن دالة اللوغاريتم معرفة على القيم الموجبة فقط. أي أن $x^2 + y^2 > 3$

$\mathrm{D}_f = \{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 3\}$.

مثال: عين المنطلق للدالة $f(x,\mathrm{y}) = \ln(x^2 + y^2 - 2x - 4y - 8)$.

الحل: $f(x,\mathrm{y})$ معرفة أذا وفقط اذا كان $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 8 > 0$. أي أن

$x^2 + y^2 - 2x - 4y > 8$

$\mathrm{D}_f = \{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 2x - 4y > 8\}$.

مثال: عين المنطلق للدالة $f(x,\mathrm{y}) = \sin(x^2 + y^2) + \sqrt{x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15}$

الحل: $f(x,\mathrm{y})$ معرفة أذا وفقط اذا كان $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 \geq 0$. أي أن

$x^2 + y^2 - 4x + 2y \geq 15$

$\mathrm{D}_f = \{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x + 2y \geq 15\}$.

مثال: عين المنطلق للدالة $f(x,\mathrm{y}) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{15 - 2y + 4x - x^2 - y^2}}$

الحل: $f(x,\mathrm{y})$ معرفة أذا وفقط اذا كان $15 - 2y + 4x - x^2 - y^2 > 0$. أي أن

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 < 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 - 4x + 2y < 15$

$\mathrm{D}_f = \{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 4x + 2y < 15\}$.

Example: Find the domain of $\quad f(x,\mathrm{y})=\frac{\sin(x\mathrm{y})}{\sqrt{4+x^2+\mathrm{y}^2}}$

بما أن $\sin(x\mathrm{y})$ معرفة لجميع $(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2$ وأن $4+x^2+\mathrm{y}^2>0$ لأي $(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2$

فأن $\mathrm{D}_f=\{(x,\mathrm{y}):(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2\}=\mathbb{R}^2$

Example: Find the domain of $\quad f(x,\mathrm{y})=\mathrm{e}^{5x-\mathrm{y}^2+1}$

$\mathrm{D}_f=\{(x,\mathrm{y}):(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2\}=\mathbb{R}^2$

Example: Find the domain of $\quad f(x,\mathrm{y})=\mathrm{e}^{x\mathrm{y}}+\ln(x\mathrm{y})$

الدالة $\mathrm{e}^{x\mathrm{y}}$ معرفة لجميع $(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2$. أما دالة الوغاريتم $\ln(x\mathrm{y})$ فهي معرفة فقط للقيم الموجبة، أي أن هذه الدالة معرفة عندما $x\mathrm{y}>0$. وعليه فأن

$\mathrm{D}_f=\{(x,\mathrm{y}):(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2, x\mathrm{y}>0\}$

Example: Find the domain of $\quad f(x,\mathrm{y})=\frac{\ln x}{x-5}$

الدالة $\ln x$ معرفة عندما $x>0$ ولاحظ أن مقام الدالة f يصبح صفراً عندما $x=5$.

وعليه فان منطلق الدالة f يكون جميع النقاط ما عدا $x\le 0$ و $x=5$. أي أن

$\mathrm{D}_f=\{(x,\mathrm{y}):(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2, x>0, x\neq 5\}$

مثال: حدد المنطلق للدالة $\quad f(x,\mathrm{y})=\frac{\ln(9-x^2-y^2)}{\sqrt{x^2+\mathrm{y}^2-4}}$

الحل:

$\mathrm{D}_f=\{(x,\mathrm{y}):(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2, 9-x^2-y^2>0, x^2+\mathrm{y}^2-4>0\}$

مثال: حدد المنطلق للدالة $\quad f(x,\mathrm{y})=\cos(x\mathrm{y})$

الحل:

$\mathrm{D}_f=\{(x,\mathrm{y}):(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2\}=\mathbb{R}^2$

مثال: حدد المنطلق للدالة $\quad f(x,\mathrm{y})=\tan(x+\mathrm{y})$

الحل: الدالة غير معرفة عندما $x+\mathrm{y}=\frac{\pi}{2}+\mathrm{n}\pi$ حيث أن n عدد صحيح. لذلك

$$\mathrm{D}_f=\left\{(x,\mathrm{y}):(x,\mathrm{y})\in\mathbb{R}^2, x+\mathrm{y}\neq\frac{\pi}{2}+\mathrm{n}\pi\,,\mathrm{n}\in\mathrm{Z}\right\}$$

مثال: $f(x,\mathrm{y}) = \sqrt{\frac{1+x}{1-y}}$

الحل: لأيجاد المنطلق نستبعد جميع النقاط التي تجعل المقام صفر وكذلك النقاط التي يكون فيها الجذر سالب. أي أن

$$\mathrm{D}_f = \left\{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 1, \frac{1+x}{1-y} \geq 0\right\}$$

مثال: حدد المنطلق والمدى للدالة $f(x,\mathrm{y}) = \frac{\sqrt{x^2+y^2-4}}{x-2y}$.

الحل: الجذر التربيعي يكون معرفاً عندما $x^2 + y^2 - 4 \geq 0$ ، أي أن $x^2 + y^2 \geq 4$ وهذه تمثل جميع النقاط الواقعة على الدائرة $x^2 + y^2 = 4$ وخارجها. كذلك الدالة معرفة عندما يكون المقدار $x - 2y \neq 0$ او $y \neq \frac{x}{2}$. وهكذا فان المنطلق يكون

$$\mathrm{D}_f = \left\{(x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4 , y \neq \frac{x}{2}\right\}$$

ولأيجاد مدى الدالة f نلاحظ بأن البسط يكون أما صفر أو أي عدد حقيقي موجب، ولكن المقام يمكن أن يكون أي عدد حقيقي سالب او موجب. وهكذا $f(x,\mathrm{y})$ يمكن أن تكون أي قيمة حقيقية، أي أن المدى هو جميع الاعداد الحقيقية. $\mathrm{R}_f = \mathbb{R}$.

Example: Find the domain of $f(x,\mathrm{y}) = \frac{3x-\mathrm{y}}{\sqrt{4-x^2-\mathrm{y}^2}}$

المنطلق هو جميع النقاط $(x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2$ ما عدا النقاط التي تجعل المقام صفر. أي أن:

$$\mathrm{D}_f = \{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2, 4 - x^2 - \mathrm{y}^2 > 0\}$$

Example: Find the domain of $f(x,\mathrm{y}) = \frac{\sqrt{3x^2+4\mathrm{y}^2-12}}{x+\mathrm{y}}$

بالنسبة للمقام نضع

$$x + \mathrm{y} \neq 0 \Longrightarrow \mathrm{y} \neq x$$

بالنسبة للبسط نضع

$$3x^2 + 4\mathrm{y}^2 - 12 \geq 0$$

وعليه فأن:

$$\mathrm{D}_f = \{(x,\mathrm{y}) : (x,\mathrm{y}) \in \mathbb{R}^2, \quad 3x^2 + 4\mathrm{y}^2 - 12 \geq 0, \quad \mathrm{y} \neq x\}$$