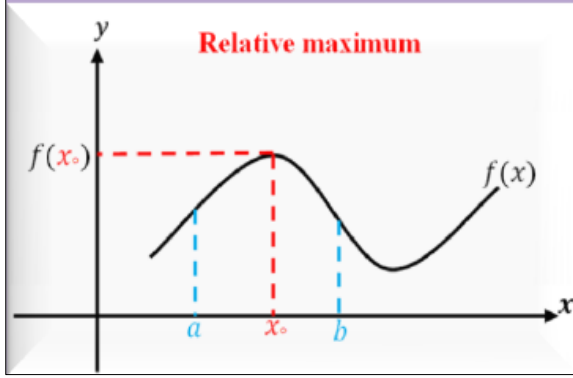


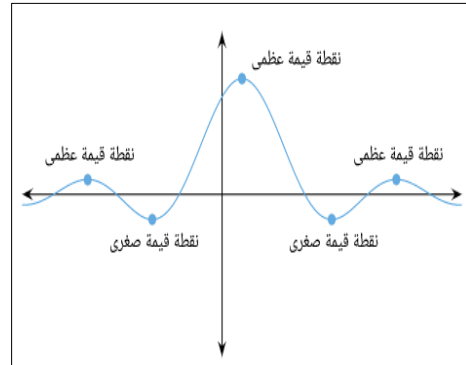
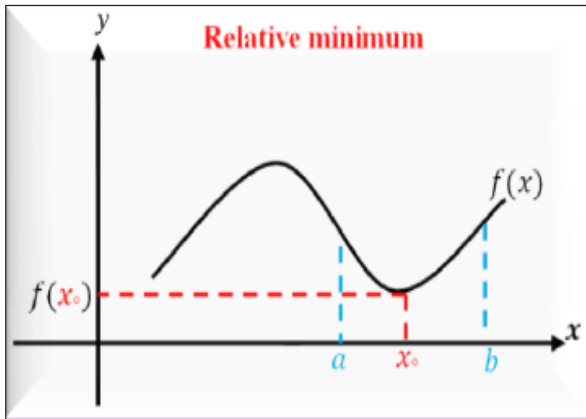
Maximum and minimum values القيم العظمى والصغرى

تعريف:

يقال أن للدالة f قيمة عظمى نسبية (أو محلية) relative (local) maximum value عند $x = x_0$ ، إذا وجدت فترة مفتوحة (a, b) في منطلق f تحتوي على x_0 ، بحيث أن $f(x_0) \geq f(x) \quad \forall x \in (a, b)$ وتسمى $(x_0, f(x_0))$ أحداثيات نقطة القيمة العظمى النسبية للدالة.



كما يقال أن للدالة f قيمة صغرى نسبية (أو محلية) relative (local) minimum value عند $x = x_0$ ، إذا وجدت فترة مفتوحة (a, b) في منطلق f تحتوي على x_0 ، بحيث أن $f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in (a, b)$ وتسمى $(x_0, f(x_0))$ أحداثيات نقطة القيمة الصغرى النسبية للدالة.



- ملاحظة-1: تسمى القيم العظمى النسبية والقيم الصغرى النسبية قيم قصوى نسبية للدالة وتسمى نقاط القيم العظمى والصغرى النسبية بالنقاط القصوى النسبية للدالة.
- ملاحظة-2: كل نقطة قصوى نسبية هي نقطة حرجة للدالة والعكس غير صحيح دائماً.
- ملاحظة-3: يمكن تصنيف النقاط الحرجة الى نقاط قيم عظمى نسبية، أو نقاط قيم صغرى نسبية، أو نقاط انقلاب.

تصنيف النقاط الحرجة باستعمال المشتقة الأولى

- أ- نجد المشتقة الأولى $f'(x)$ ، ومنها نحصل على الأعداد الحرجة للدالة.
- ب- ندرس إشارة المشتقة الأولى عن يمين ويسار الأعداد الحرجة c ويكون لدينا الحالات الآتية:
- إذا تغيرت إشارة المشتقة من السالب الى الموجب حول العدد الحرج c فإنه يوجد قيمة صغرى نسبية هي $f(c)$ وأحداثيات نقطة القيمة الصغرى النسبية هي $(c, f(c))$.
 - إذا تغيرت إشارة المشتقة من الموجب الى السالب حول العدد الحرج c فإنه يوجد قيمة عظمى نسبية هي $f(c)$ وأحداثيات نقطة القيمة العظمى النسبية هي $(c, f(c))$.
 - إذا لم تتغير إشارة المشتقة حول النقطة الحرجة c فإن $f(c)$ ليست قيمة قصوى نسبية للدالة f .

تصنيف النقاط الحرجة باستعمال المشتقة الثانية

- يمكننا في كثير من الأحيان استعمال المشتقة الثانية للدالة لأجل اختبار وجود القيم القصوى النسبية ومعرفة نوعها. وطريقة الاختبار بالمشتقة الثانية كالآتي:
- ليكن c عدد حرج للدالة f وأن $f''(c)$ موجودة عندئذ
- (1) إذا كانت $f''(c) > 0$ ، فإن للدالة قيمة صغرى نسبية عند c .
 - (2) إذا كانت $f''(c) < 0$ ، فإن للدالة قيمة عظمى نسبية عند c .

مثال: جد نقاط القيم القصوى النسبية، وحدد نوعها، للدالة:

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

الحل: بتطبيق الخطوات (استعمال المشتقة الأولى)

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2 \quad \text{العدد الحرج}$$

نختار العدد 2.1 عن يمين العدد الحرج والعدد 1.9 عن يساره ونختبر إشارة المشتقة

$$f'(1.9) = 2(1.9) - 4 = -0.2 < 0$$

$$f'(2.1) = 2(2.1) - 4 = 0.2 > 0$$

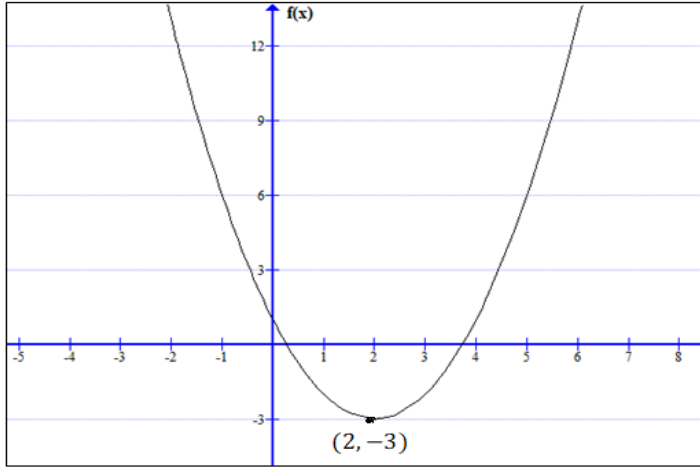
بما أن إشارة المشتقة تتغير من السالب الى الموجب حول العدد الحرج $x = 2$ ، فإن للدالة

قيمة صغرى نسبية عندما $x = 2$. ولما كان

$$f(2) = 2^2 - 4(2) + 1 = 4 - 8 + 1 = -3$$

فأن القيمة الصغرى النسبية للدالة هي -3 وتكون في النقطة $(2, -3)$.

لاحظ أن $f(2) = -3$ هي في الحقيقة قيمة صغرى مطلقة للدالة لان الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, 2)$ ومنتزعة على الفترة $(2, \infty)$. وعليه، فإن أحداثيات القيمة الصغرى المطلقة للدالة هي $(2, -3)$.



مثال: جد نقاط القيم العظمى والصغرى النسبية وأدرس تزايد وتناقص الدالة $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

الحل: الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة وقابلة للاشتقاق في كل نقطة في \mathbb{R} . أي أن منطق الدالة هو جميع الأعداد الحقيقية.

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \quad \text{الأعداد الحرجة}$$

والان نعين إشارة المشتقة $f'(x)$ ، لاحظ أن إشارة المشتقة تتحدد من إشارة البسط لأن إشارة المقام موجبة لكل $x \in \mathbb{R}$.

| | | | |
|---------------|----------|--------------|---------|
| | $x < -1$ | $-1 < x < 1$ | $x > 1$ |
| إشارة $f'(x)$ | سالبة | موجبة | سالبة |

بما أن إشارة المشتقة تتغير من السالب الى الموجب حول العدد الحرج $x = -1$ ، فإن للدالة قيمة صغرى نسبية عندما $x = -1$. وبما أن

$$f(-1) = \frac{-1}{1 + (-1)^2} = \frac{-1}{2}$$

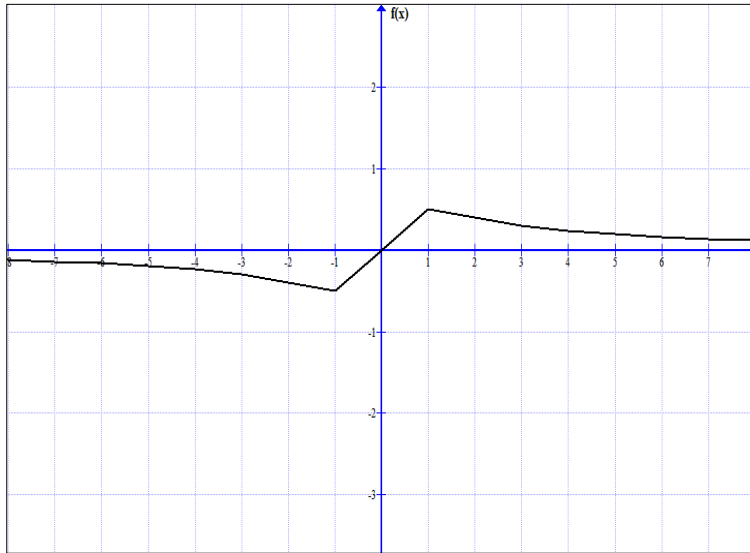
فأن القيمة الصغرى النسبية للدالة هي $\frac{-1}{2}$ وتكون في النقطة $(-1, \frac{-1}{2})$.

وبما أن إشارة المشتقة تتغير من الموجب الى السالب حول العدد الحرج $x = 1$ ، فإن للدالة قيمة عظمى نسبية عندما $x = 1$. وبما أن

$$f(1) = \frac{1}{1 + (1)^2} = \frac{1}{2}$$

فأن القيمة العظمى النسبية للدالة هي $\frac{1}{2}$ وتكون في النقطة $(1, \frac{1}{2})$.

نلاحظ من الجدول أن $f'(x)$ سالبة في الفترتين $(-\infty, -1)$ ، $(1, \infty)$ ، وموجبة في الفترة $(-1, 1)$. وعليه، فإن الدالة متناقصة على الفترتين $(-\infty, -1)$ ، $(1, \infty)$ ومنتزعة على الفترة $(-1, 1)$.



مثال: جد نقاط القيم القصوى النسبية، وبين نوعها، للدالة $f(x) = x^3 - x$

الحل: منطلق الدالة هو \mathbb{R} .

$$f'(x) = 3x^2 - 1$$

$$3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{أعداد حرجة}$$

بأستعمال المشتقة الثانية:

$$f''(x) = 6x$$

عندما $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ تكون

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 6 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{6}{\sqrt{3}} > 0$$

لذلك، للدالة قيمة صغرى نسبية عند $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

وعندما $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ تكون

$$f''\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = 6 \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{-6}{\sqrt{3}} < 0$$

لذلك، للدالة قيمة عظمى نسبية عند $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$

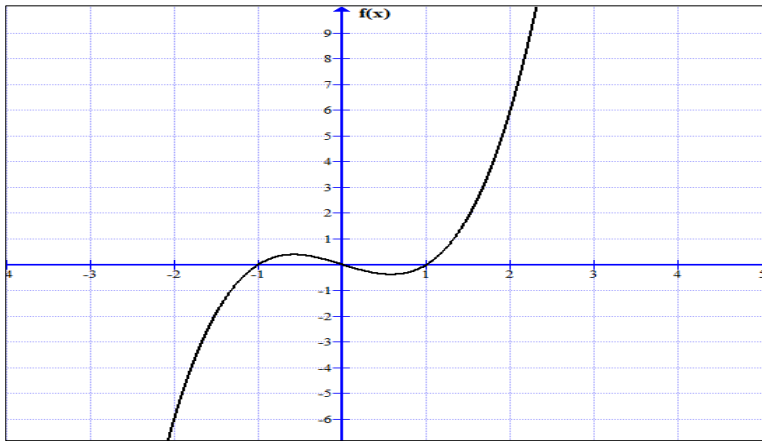
ولأيجاد أحداثيات نقاط القيم القصوى النسبية، نجد قيمة الدالة العظمى والصغرى النسبية وذلك بالتعويض في الدالة المعطاة:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{9}$$

$$f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3 - \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = \left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)^3 + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$$

وعندئذ تكون أحداثيات نقطة القيمة الصغرى النسبية هي $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{-2\sqrt{3}}{9}\right)$ وأحداثيات نقطة القيمة

العظمى النسبية هي $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$



مثال: جد نقاط القيم القصوى النسبية وبين نوعها $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

الحل:

$$f'(x) = x^2 - x - 2$$

$$x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2) \cdot (x + 1) = 0 \Rightarrow x = 2, x = -1$$

$$f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 - \frac{1}{2}(2)^2 - 2(2) + 2 = \frac{-4}{3}$$

$$f(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 - \frac{1}{2}(-1)^2 - 2(-1) + 2 = \frac{19}{6}$$

$$f''(x) = 2x - 1$$

عندما $x = 2$ ، فإن

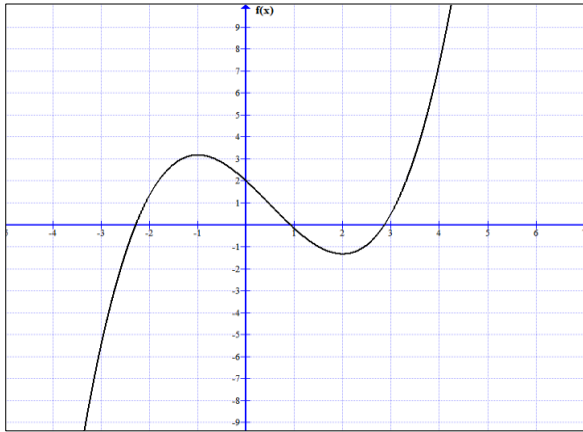
$$f''(2) = 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3 > 0$$

وعليه، فإن للدالة قيمة صغيرة نسبية عند $x = 2$ ، وأحداثياتها هي $(2, \frac{-4}{3})$

عندما $x = -1$ ، فإن

$$f''(-1) = 2(-1) - 1 = -2 - 1 = -3 < 0$$

وعليه، فإن للدالة قيمة عظمى نسبية عند $x = -1$ ، وأحداثياتها هي $(-1, \frac{19}{6})$.



مثال: جد جميع النقاط الحرجة، وبين نوعها، وجد فترات التزايد والتناقص للدالة

$$f(x) = x^{4/3} - 4x^{1/3}$$

الحل:

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{1/3} - 4\left(\frac{1}{3}\right)x^{-2/3} = \frac{4}{3}x^{-2/3}(x - 1) = \frac{4(x - 1)}{3x^{2/3}}$$

المشتقة غير معرفة عندما $x = 0$ وفي حالة

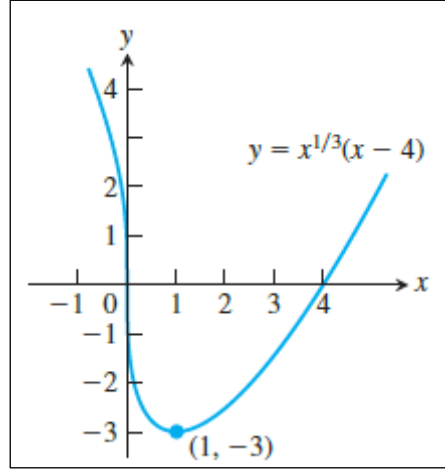
$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{4(x - 1)}{3x^{2/3}} = 0 \Rightarrow 4(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$$

وبذلك يكون لدينا عدان حرجان هما: $x = 1$ و $x = 0$.

بالنسبة لفترات التزايد والتناقص لدينا ثلاث فترات $(-\infty, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, \infty)$.

| Interval | $x < 0$ | $0 < x < 1$ | $x > 1$ |
|-----------------|------------|-------------|------------|
| Sign of f' | - | - | + |
| Behavior of f | decreasing | decreasing | increasing |

وبذلك فإن الدالة متناقصة على الفترتين $(-\infty, 0)$ ، $(0, 1)$ ، ومتزايدة على الفترة $(1, \infty)$.



بالنسبة للقيم القصوى النسبية للدالة: بما أن إشارة المشتقة لم تتغير عند $x = 0$ ، فليس للدالة قيمة عظمى او صغرى هناك. وبما أن إشارة المشتقة تتغير من السالب الى الموجب عند $x = 1$ ، فإن للدالة قيمة صغرى نسبية وهي

$$f(1) = f(x) = 1^{4/3} - 4(1)^{1/3} = 1 - 4 = -3$$

وهي ايضاً قيمة صغرى مطلقة للدالة لان الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, 1)$ ومتزايدة على الفترة $(1, \infty)$. وعليه، فإن أحداثيات القيمة الصغرى المطلقة للدالة هي: $(1, -3)$.

الواجب: جد فترات تزايد وفترات تناقص ونقاط القيم القصوى النسبية للدوال (أن وجدت)

$$f(x) = x^2 + \frac{16}{x^2}$$

$$f(x) = \frac{x}{x+1}$$

$$f(x) = x^2 - 4$$

$$f(x) = x - x^3$$

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$