



جامعة الموصل

كلية علوم الحاسوب والرياضيات

قسم بحوث العمليات و التقنيات الذكائية

مبادئ البرمجة الخطية / المثلثة الأولى

LINEAR PROGRAMMING

برمجة خطية

محاضرة ٢

الصيغة العامة للبرمجة الخطية

(الصيغة القانونية - الصيغة القياسية)

إعداد الدكتور

علي عبد الله حمن العيدلي

م ٢٠٢١

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

(٤) الصيغة العامة للبرمجة الخطية:

ومما تقدم في المثالين السابقين في المحاضرة السابقة يمكن تحديد الصيغة العامة للبرمجة الخطية. حيث يمكن وضع صيغة ثابتة تتضمن دالة الهدف والتي يرمز لها بالرمز Z او X والقيود التي من الممكن أن تأخذ شكل ($\leq, =, \geq$) والمعارف عليه هو أن جميع المتغيرات x_j . المطلوب إتخاذ القرار بشأنها تكون غير سالبة لأنها متغيرات تتصل بالواقع لذلك تصبح النتائج السالبة كميات غير حقيقة.

وعليه تكون الصيغة العامة للبرمجة الخطية كالتالي:

$$\text{دالة الهدف } Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

subject. To:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n (\leq, =, \geq) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n (\leq, =, \geq) b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n (\geq, =, \leq) b_m \end{array} \right\} \text{القيود}$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0 \quad \text{قيد عدم السالبة}$$

حيث أن c_j , a_{ij} , b_j ثوابت تحدد قيد الدراسة.

$$i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, n$$

x_j : المتغيرات المطلوب إتخاذ القرار بشأنها.

b_i : تمثل كمية الموارد المحدودة المطلوب تخصيصها لتحديد هدف معين.

a_{ij} : تمثل كمية الموارد المحدودة من نوع (j) والمطلوب تخصيصها لكل وحدة واحدة من النشاط أو

الفعالية أو المنتج (j)

c_j : تمثل الربح أو الكلفة.

يمكن اختصار هذه الصيغة كما يلي:

$$\max \text{ or } \min Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Sub. To

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j (\leq, =, \geq) b_i$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad x_j \geq 0$$

أو يمكن اختصارها بشكل مصفوفات ومتغيرات أيضاً.

وكما يلي:

max or min $Z = CX$

sub. To

$AX(\leq, =, \geq)B$

$X \geq 0$

حيث أن:

$C = (C_1 \ C_2 \ \dots \ C_n)$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

نظراً لاختلاف صيغ البرمجة الخطية فمن الضروري تعديل هذه الصيغ لتحديد إنموذج حل مناسب والذي سنتطرق إليه لاحقاً. توجد صفتان مناسبة لإنموذج البرمجة الخطية هي الصيغة القانونية

Standard form والصيغة القياسية او المعيارية *Cononical form*

الصيغة القانونية

(١,٤,١) الصيغة القانونية *Cononical form*

في هذه الصيغة تكون القيود دائمًا بصيغة الأصغر أو يساوي (\leq) إذا كانت دالة الهدف تعظيم \max و تكون القيود دائمًا بصيغة الأكبر أو اليساوي (\geq) إذا كانت دالة الهدف \min وكما يلي:

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Sub. To

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad x_j \geq 0$$

$$\min Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

Sub. To

$$\min Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j \geq b_i$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad x_j \geq 0$$

وبالإمكان وضع أي صيغة للبرمجة الخطية بالشكل القانوني أو العام بإستخدام عملية التحويل كما يلي:

$\text{minimize}(Z) = \text{maximize}(-Z)$ والعكس صحيح

$\text{maximize}(Z) = \text{minimize}(-Z)$

مثال (١,٣): حول إنموذج البرمجة الخطية إلى الصيغة القانونية:

$$\max Z = 6x_1 + 10x_2$$

s.t

$$2x_1 - 4x_2 \geq 12$$

$$3x_1 + 6x_2 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

sol:

$$-\min Z = -6x_1 - 10x_2$$

$$2x_1 - 4x_2 \geq 12$$

$$3x_1 + 6x_2 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

٢. تحويل صيغة المتباينة (\leq) إلى صيغة (\geq) بضرب طرفي المعادلة بـ والعكس صحيح:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1 \quad * (-1)$$

$$= -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \leq -b_1$$

مثال (١,٤): حول الانموذج الآتي إلى الصيغة القانونية.

$$\min Z = 10x_1 + 2x_2$$

s.t

$$11x_1 + 6x_2 \geq 50$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 8 \quad * (-1)$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

sol:

$$\min Z = 10x_1 + 2x_2$$

$$11x_1 + 6x_2 \geq 50$$

$$-4x_1 - 5x_2 \geq -8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

٣. تحويل صيغة المساواة في القيود إلى متباينتين متعاكستين بإتجاه أي إحدهما (\geq) والأخر (\leq) كما يلي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

مثال (١,٥): حول إنموذج البرمجة الخطية الآتي إلى الصيغة القانونية:

$$\max Z = 5x_1 + 3x_2$$

s. To

$$6x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$4x_1 + x_2 = 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

sol:

$$6x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$4x_1 + x_2 \geq 16 \quad * (-1)$$

$$4x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\max Z = 5x_1 + 3x_2$$

s. To

$$6x_1 + 2x_2 \leq 10$$

$$-4x_1 - x_2 \leq -16$$

$$4x_1 + x_2 \leq 16$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

٤. تحويل المتغير غير المقيد بإشارة (أي إن إشارته غير محددة فيما إذا كانت موجبة أو سالبة أو

أصغر) ، وذلك بالفرق بين متغيرين تكون إشارة كل منهما مقيدة (أي غير سالبة) مثال (إذا كان

المتغير x_1 غير مقيد بإشارة فإنه يكافي:

$$x_1 = (x_1 - \hat{x}_1) , x_1 \geq 0 , \hat{x}_1 \geq 0$$

مثال (١,٦): حول الأنماذج الآتي إلى الصيغة القانونية:

$$\min Z = 6x_1 + 3x_2$$

s. To

$$x_1 + 5x_2 \geq 6$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 10$$

$x_1 \geq 0$, x_2 unves in sign

الحل:

$$\text{let } x_2 = x'_2 - \hat{x}'_2, x'_2 \geq 0, \hat{x}'_2 \geq 0$$

$$\min Z = 6x_1 + 3(x'_2 - \hat{x}'_2)$$

s. to

$$x_1 + 5(x'_2 - \hat{x}'_2) \geq 6$$

$$4x_1 + 3(x'_2 - \hat{x}'_2) \geq 10$$

$$x_1, x'_2, \hat{x}'_2 \geq 0$$

$$\min Z = 6x_1 + 3x'_2 - 3\hat{x}'_2$$

S. to

$$x_1 + 5x'_2 - 3\hat{x}'_2 \geq 6$$

$$4x_1 + 3x'_2 - 3\hat{x}'_2 \geq 10$$

$$x_1, x'_2, \hat{x}'_2 \geq 0$$

الصيغة القياسية أو المعيارية

(١,٤,٢) الصيغة القياسية أو المعيارية standard from

تعتمد هذه الصيغة في تحليل البرامج الخطية بالطرق التي سوف نتطرق لها لاحقاً ويترشط في هذه الصيغة أن تكون القيود على شكل معادلات (=) سواء كانت دالة الهدف **max or min**. حيث يمكن تحويل قيود المتباينات إلى مساواة (معادلات) وذلك بإضافة أو بطرح متغيرات وهمية ($s_i \geq 0$) **slack variable** إلى الطرف الأيسر من كل قيد. وهذه المتغيرات تضاف للقيود من نوع (\leq) أصغر أو يساوي وتطرح من القيود من نوع (\geq) أكبر أو يساوي. ويضاف لها متغير وهي **artificial variable** ويرمز له (**R**) وكما يلي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$$

$$\rightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + s_1 = b_1$$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$$

$$\rightarrow a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - s_1 = b_1$$

مثال (١,٧): حول إنموذج الآتي إلى الشكل القياسي:

$$\max Z = 7x_1 + 3x_2$$

S. t

$$2x_1 + 5x_2 \leq 4$$

$$x_1 - 2x_2 \geq 10$$

$$3x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

sol:

$$\max Z = 7x_1 + 3x_2$$

S. T

$$2x_1 + 5x_2 + s_1 = 4$$

$$x_1 - 2x_2 - s_2 + R_1 = 10$$

$$3x_1 + x_2 + s_3 = 2$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, R_1 \geq 0$$

وسيتم توضيح الصيغة القياسية لاحقاً بشكل مفصل في طريقة السمبلكس