جامعة الموصل

كلية علوم الحاسوب والرياضيات

قسم بحوث العمليات والتقنيات الذكائية

مبادئ البرمجة الخطية / المرحلة الاولى

LINEAR PROGRAMMING

ملزمة رقم 4

الحالات الخاصة لمشاكل البرمجة الخطية

إعداد الدكتور

عدي عبدالرحمن العيدي

2021 م

حالات خاصة لمشاكل البرمجة الخطية

هناك حالات خاصة يمكن ان نلاحظها عند حل نموذج البرمجة الخطية والتي تعد حالات خاصة لحلول تلك النماذج وهي:

1. **تعدد الحلول المثلى**: $Multiple\ Optimal\ Solution$

من المفروض ان نحصل على حل أمثل واحد عند حل نموذج البرمجة الخطية, ولكن هناك حالة خاصة وهي حصولنا على أكثر من حل أمثل (أي تعدد الحلول المثلى), تحصل هذه الحالة عندما توازي احد القيود الهيكلية المحددة لمنطقة الحلول الممكنة دالة الهدف الخطية, ويمكن ملاحظة هذه الحالة مباشرة من النموذج عندما نجد ان معاملات احد القيود الهيكلية من مضاعفات معاملات دالة الهدف المناضرة لها عندها نتوقع حلول متعددة مثلى لهذا النموذج, وكما موضح في المثال الاتي:

مثال (3):

اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$MaxZ = 2X_1 + 4X_2$$

$$S.T.$$

$$5X_1 + X_2 \leq 400$$

$$4X_1 + 8X_2 \leq 480$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

نلاحظ ان معاملات القيد الثاني هي من مضاعفات معاملات دالة الهدف المناضرة لها, لذا نتوقع حصول حلول متعددة مثلى لهذه المشكلة . سوف نتبع طريقة الرسم البياني لحل هذا النموذج:

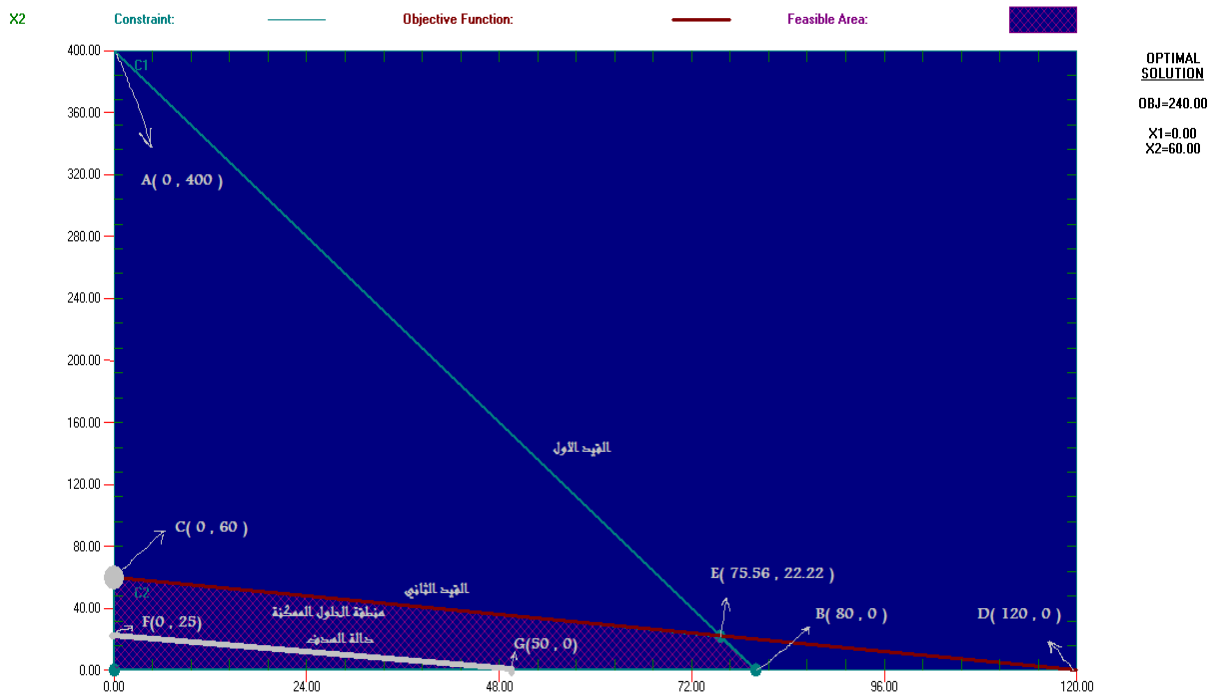
نحدد نقاط القيود:

القيد الأول $5x_1 + x_2 = 400$		النقطة
x_1	x_2	
0	400	A
80	0	B

القيد الثاني $4x_1 + 8x_2 = 480$		النقطة
x_1	x_2	
0	60	C
120	0	D

نرسم القيد الاول بتثبيت النقطتين $B(80, 0), A(0, 400)$

والقيد الثاني بتثبيت النقطتين $D(120, 0), C(0, 60)$ وكما مبين في الشكل الاتي:



شكل (6): الرسم البياني لقيود نموذج البرمجة الخطية ومنطقة الحلول الممكنة

من الشكل (6) نلاحظ ان منطقة الحلول الممكنة هي المحددة بالنقاط المتطرفة $(0\ ,C\ ,E\ ,B)$ علما ان النقطة $\boldsymbol{E}(75.56\ ,22.22)$ هي نقطة تقاطع القيدين الاول والثاني (تم الحصول على احداثياتها بحل معادلتي القيدين انياً ويترك ايجاد احداثياتها كتمرين للطالب). و لايجاد الحل الامثل نعوض احداثيات النقاط المتطرفة في دالة الهدف وكما مبين بالجدول الآتي:

النقاط المتطرفة	قيمة دالة الهدف $max\ Z\ =\ 2\ x_1\ +\ 4\ x_2$
$O(0\ ,0)$	$Z = 0$
$C(0\ ,60)$	$Z = 0 + 4 * (60) = 240$
$E(75.56\ ,22.22)$	$Z = 2 * 75.56 + 4 * (22.22) = 240$
$B(80\ ,0)$	$Z = 2 * 80 + 0 = 160$

من الجدول اعلاه نلاحظ ان اكبر قيمة لدالة الهدف هي (240) وهذه القيمة تحققها احداثيات النقطتين $\boldsymbol{C}(0\ ,60)$ و $\boldsymbol{E}(75.56\ ,22.22)$, وذلك يعني هناك أكثر من حل من بين الحلول الممكنة يحقق الحل الامثل, وفي الحقيقة كل نقطة تقع على قطعة المستقيم (CE) تُعطي نفس قيمة دالة الهدف وهي (240) والتي تمثل اكبر قيمة للهدف القيمة المثلى, وهذا ما توقعناه من ملاحظة ان معاملات القيد الثاني هي من مضاعفات معاملات دالة الهدف المناضرة لها, ويمكن ملاحظة ذلك برسم الخط المستقيم الذي يمثل دالة الهدف على افتراض أي قيمة للهدف محصورة بين (0) و (240) ولتكن مثلا $(Z = 100)$, أي رسم معادلة الخط المستقيم $(2x_1 + 4x_2 = 100)$ وكالاتي:

$2x_1 + 4_2 = 100$		النقطة
x_1	x_2	
0	400	F
80	0	G

ورسم الخط المستقيم الممثل لدالة الهدف عندما $(Z = 100)$ مبين في الشكل (6) , أذ نلاحظ ان قطعة المستقيم (FG) والتي تمثل دالة الهدف توازي قطعة المستقيم (CE) التي تمثل ذلك الجزء من القيد الثاني المحدد لمنطقة الحلول الممكنة.

ملاحظة يمكن للطالب ان يأخذ أي نقطة واقعة على قطعة المستقيم (CE) وتعويض احداثياتها في دالة الهدف ليتحقق من انها تساوي اكبر قيمة للهدف والتي تساوي (240)

2. الحلول غير المحدودة: $Unbounded\ Solutions$

قد نحصل عند حل مشكلات البرمجة الخطية على حلول ممكنة غير محدودة وهي حالة خاصة نادرة الحدوث في الحياة العملية, ونلاحظ هذه الحالة الخاصة في الرسم البياني عندما نحصل على منطقة حلول ممكنة غير محدودة وكما موضح بالمثال الاتي:

مثال (4):

اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$max\ Z = 10x_1 + 23x_2$$

$$S.T$$

$$3x_1 + 5x_2 \geq 75$$

$$X_2 \leq 12$$

$$x_1\ , x_2 \geq 0$$

الحل:

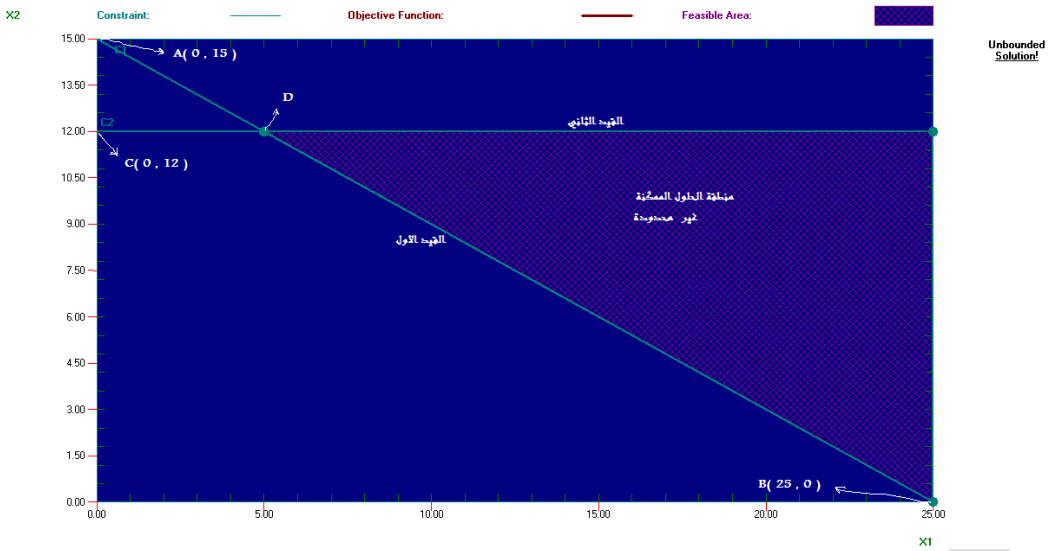
نرسم القيدين الاول والثاني ونحدد منطقة الحلول الممكنة:

القيد الأول $3x_1 + 5x_2 = 75$		النقطة
x_1	x_2	
0	15	A
25	0	B

القيد الاول يمثل بالمستقيم المار بالنقطتين $A(0\ ,15), B(80\ ,0)$.

اما القيد الثاني فيمثل بالمستقيم المار بالنقطة $C(0\ ,12)$ والموازي للمحور الافقي (x_1)

وكما مبين بالشكل الآتي:



شكل (7): الرسم البياني لقيدي النموذج ومنطقة الحلول الممكنة

نلاحظ من الشكل (7) ان منطقة الحلول الممكنة (المنطقة المشتركة بين القيدين) غير محدودة (مفتوحة) وعليه ليس للمشكلة حل امثل, أذ كلما ابتعدنا عن نقطة الاصل نحصل على حل يعطي قيمة اعلى لدالة الهدف.

3. عدم وجود حلول مقبولة: *No Feasible Solutions*

اذا كانت منطقة الحلول الممكنة الناتجة من تقاطع قيود نموذج البرمجة الخطية عبارة عن مجموعة خالية فاننا لن نحصل على حلول ممكنة لمشكلة البرمجة الخطية, بمعنى آخر ليس هناك حلول ممكنة لنموذج البرمجة الخطية في حالة عدم وجود منطقة مشتركة بين قيود النموذج وبالتالي ليس هناك حل امثل للمشكلة, كما موضح بالمثال الآتي:

مثال (5): اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي

$$min\ Z = 20x_1 + 15x_2$$

$$S.T.$$

$$5x_1 + 10x_2 \leq 25$$

$$5x_1 + 10x_2 \geq 50$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

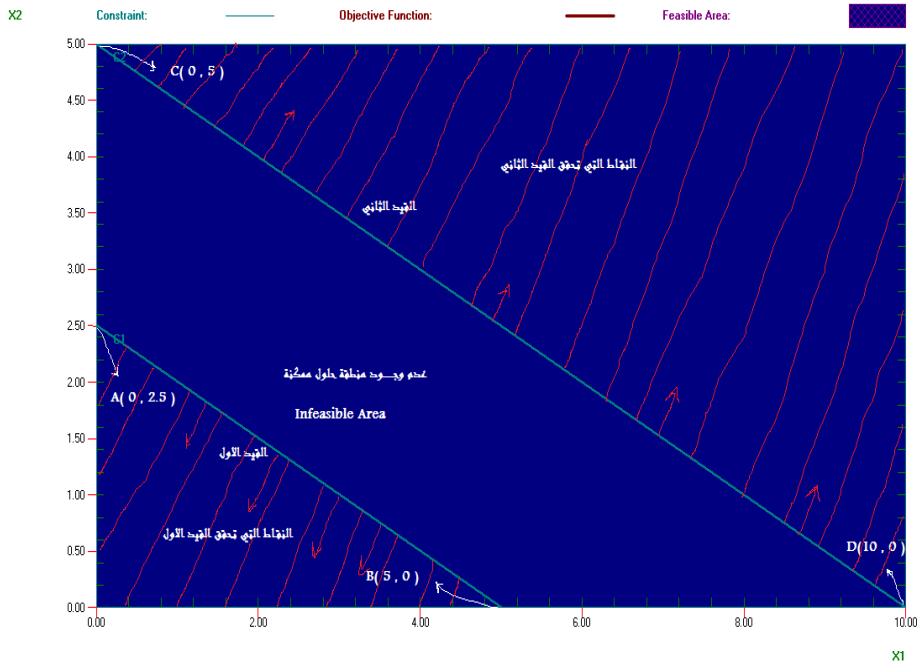
القيد الأول $5x_1 + 10x_2 = 25$		النقطة
x_1	x_2	
0	2.5	A
5	0	B

القيد الثاني $5x_1 + 10x_2 = 50$		النقطة
x_1	x_2	
0	5	C
10	0	D

القيد الاول يمثل بالمستقيم المار بالنقطتين $B(5\ ,0), A(0\ ,2.5)$

اما القيد الثاني فيمثل بالمستقيم المار بالنقطة $D(10\ ,0), C(0\ ,5)$

وكما مبين بالشكل التالي , اذ نلاحظ ان النقاط التي تحقق القيد الاول هي تلك النقاط التي تقع اسفل الخط المستقيم بالنقطتين $B(5\ ,0), A(0\ ,2.5)$ لأن القيد بهيئة متباينة أقل او تساوي, بينما النقاط التي تحقق القيد الثاني هي تلك النقاط التي تقع أعلى الخط المستقيم بالنقطتين $D(10\ ,0), C(0\ ,5)$ لأن القيد بهيئة متباينة أكبر او تساوي, لذا لاتوجد منطقة مشتركة بين القيدين وبالتالي ليس هناك منطقة حلول ممكنة مقبولة أي لاتوجد حلول ممكنة لهذا النموذج:



شكل (8): الرسم البياني لقيدي نموذج البرمجة الخطية والذي يبين عدم وجود منطقة حلول ممكنة.

4. الانحلال: $Degeneracy$

تحدث حالة الانحلال عندما يكون عدد متغيرات القرار التي تكون قيمتها اكبر من الصفر في الحل الامثل أقل من عدد قيود نموذج البرمجة الخطية. كما موضح بالمثال الاتي:

مثال(6):

اوجد الحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$max\ Z = 12x_1 + 8x_2$$

$$S.T.$$

$$4x_1 + 9x_2 \leq 1800$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 400$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

نرسم قيدي النموذج:

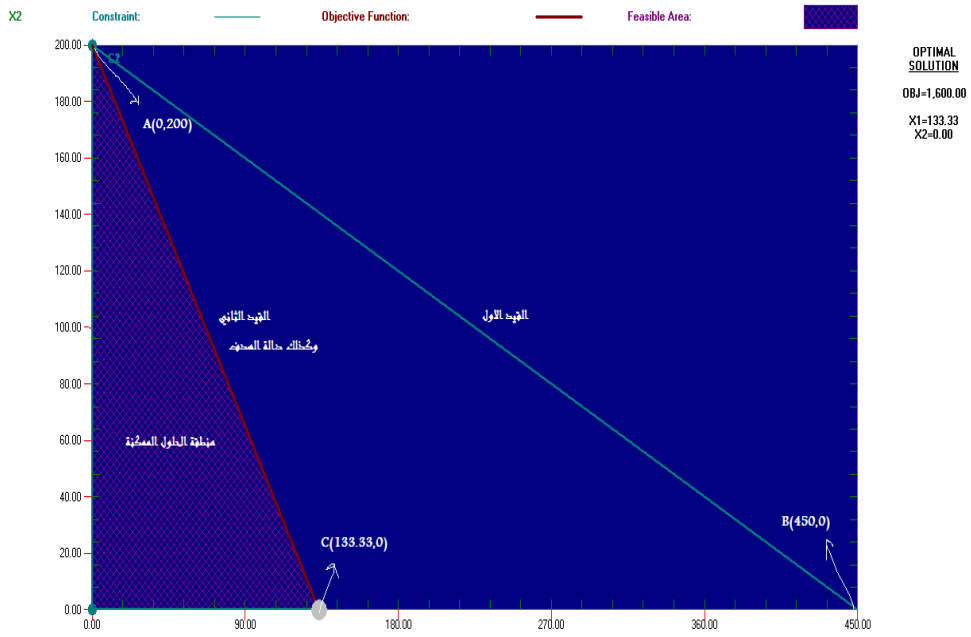
القيد الأول $4x_1 + 9x_2 = 1800$		النقطة
x_1	x_2	
0	200	A
450	0	B

القيد الثاني $3x_1 + 2x_2 = 400$		النقطة
x_1	x_2	
0	200	A
133.33	0	D

القيد الاول يمثل بالخط المستقيم المحدد بالنقطتين $B(450\ ,0), A(0\ ,200)$

القيد الثاني يمثل بالخط المستقيم المحدد بالنقطتين $D(133.33\ ,0), A(0\ ,200)$

نرسم القيدين ونحدد منطقة الحلول الممكنة وكما مبين بالشكل الاتي:



شكل (9): الرسم البياني لقيدي نموذج البرمجة الخطية ومنطقة الحلول الممكنة

نلاحظ من نموذج البرمجة الخطية ان معاملات القيد الثاني هي من مضاعفات معاملات دالة الهدف المناظرة لها مما نتوقع تعدد البياني الحلول المثلى, وهذا ما نلاحظه بالضبط من الرسم البياني للخط المستقيم (AC) الذي يمثل القيد الثاني واذي يمثل ايضا دالة الهدف عند القيمة العضمى للهدف والتي تساوي (1600) بمعنى اخر ان المستقيم الذي يمثل القيد الثاني ينطبق على المستقيم الذي يمثل دالة الهدف (المستقيم بالون الاحمر) او انهما متوازيان. وذلك يعني ان اي نقطة تقع على المستقيم AC تحقق احداثياتها أكبر قيمة لدالة الهدف والبالغة (1600), لنعوض النقاط المتطرفة المحيطة بمنطقة الحلول الممكنة وهي $(O\ ,A\ ,C)$ في دالة الهدف كما مبين في الجدول الآتي:

النقاط المتطرفة	قيمة دالة الهدف $max\ Z = 12x_1 + 8x_2$
$O(0,0)$	$Z = 0$
$A(0,200)$	$Z = 0 + 8 * 200 = 1600$
$C(133.33333,0)$	$Z = 12 * 133.33333 + 0 = 1600$

من الجدول اعلاه نلاحظ ان النقطتين $C(133.33333\ ,0), A(0\ ,200)$ تحققان نفس قيمة دالة الهدف والتي تمثل اكبر قيمه له (1600) وفي الحقيقة هناك اكثر من هاتين النقطتين تحقق نفس القيمة المثلى للهدف وتلك النقاط تقع على المستقيم (AC) بمعنى ان النموذج له حلول متعددة مثلى. من هذه الحلول المتعددة المثلى الحل المتمثل باحداثيات النقطة $A(0\ ,200)$ أي $(x_2 = 200), (x_1 = 0)$ يسمى بالحل المنحل لان لدينا متغير واحد فقط قيمته أكبر من الصفر بينما لدينا قيدين في النموذج (عدد متغيرات القرار التي هي اكبر من الصفر اقل من عدد القيود), وكذلك الحل الذي تمثله احداثيات النقطة $A(133.33333\ ,0)$ أي أن $(x_2 = 0), (x_1 = 133.33333)$ هذه المشكلة تعاني من حالتين خاصة وهي تعدد الحلول المثلى و الحلول المنحلة.