طريقة السمبلكس SimpleX

وتسمى ايضاً الجدول المبسط أو جدول (X) وتعتبر طريقة عامة لتحليل البرامج الخطية رياضياً وهي طريقة ذات كفاءة عالية في إيجاد الحلول والتي طورها عالم الرياضيات الأمريكي $(Dantzig)$ عام 1947 تبدأ هذه الطريقة بحل معين يعرف عنه بأنه مقبول وأساســـــي، ثم نستمر بإسلوب تكراري دوري من إختبار هذا الحل إلى أن نحصل على الحل الأمثل.

ويمكم إستخدام هذه الطريقة مهما كـان عدد المتغيرات في المشكلة حيث يتم إختبار المتغيرات ذات التاثير الأساسي على كل من دالة الهدف والقيود ويهمل المتغيرات الأخرى التي ليس لها تأثير.

1. إستخراج الحل الأساسي الأولي من الصيغة العامة.
2. تطوير الحل الأولي إن أمكن بواسطة إيجاد حل أساسي آخر بقيمة دالة هدف أفضل.
3. نستمر بإيجاد الحلول الممكنة الأساسية إلى أن نحصل على حل لا يمكن تطويره فيكون هو الحل الأمثل.

فإذا كان إنموذج البرمجة الخطية بالصيغة التالية:

$$max\, Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots\cdots + c_nx_n$$

$subject.To$:

$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots\cdots + a_{1n}\, x_n \le b_1$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots\cdots + a_{2n}\, x_n \le b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \cdots\cdots + a_{mn}\, x_n \le bm$$
$$x_1, x_1, \cdots\cdots, x_n \ge 0$$

يمكن تحويله إلى الصيغة القياسية بإضافة متغير مكمل إلى الطرف الأيسر من كل متباينة ونرمز له بــالرمز (S_i) وكما يأتي:

$$max\, Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + \; c_nx_n + 0s_1 + 0s_2 + \cdots 0s_m$$
$$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \cdots + a_{1n}\, x_n + s_1 = b_1$$
$$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \cdots + a_{2n}\, x_n + s_2 = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \cdots + a_{mn}\, x_n + s_m = bm$$

ومن المعلوم أن أي حل أســــــــــاسي أولي $(basic\ feasible\ solution)$ يبدأ من نقطة الأصل أي عندما تكون المتغيرات $(x_1 = x_2 = \cdots x_n = 0)$ وهذا ينتج:

$s_1 = b_1$

$s_2 = b_2$

$\vdots$

$s_m = b_m$

ويطلق على المتغيرات $(x_1, x_2 \dots x_n)$ بالمتغيرات غير الأساسية ةعلى المتغيرات $(s_1, s_2 \dots s_m)$ بالمتغيرات الأساسية وتنظم في جدول السمبلكس بالشكل الأتي:

c_j / $B.V.$	C_1	C_2	$\cdots\cdots$	c_n	0	0	$\cdots\cdots$	0	sol
	x_1	x_2	$\cdots\cdots$	x_n	s_1	s_2	$\cdots\cdots$	s_m	b_j
$0\ s_1$	a_{11}	a_{12}	$\cdots\cdots$	a_{1n}	1	0	$\cdots\cdots$	0	b_1
$0\ s_2$	a_{21}	a_{22}	$\cdots\cdots$	a_{2n}	0	1	$\cdots\cdots$	0	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots\cdots$				$\cdots\cdots$		$\vdots$
$0\ a_{m1}$	a_{m1}	a_{m2}	$\cdots\cdots$	a_{mn}	0	0	$\cdots\cdots$	1	b_m
$Z_j - C_j$	$-C_1$	$-C_2$	$\cdots\cdots$	$-C_n$	0	0	$\cdots\cdots$	0	0

وبعد وضع مشكلة البرمجة الخطية في جدول السمبلكس أعلاه نجري عليها عمليات محورية تكرارية للوصول إلى الحل الأمثل كما سيتم توضيحها في المثال الاتي:

مثال $(13-1)$ أوجد حل إنموذج البرمجة الخطية الآتية بإستخذام طريقة السمبلكس:

$max\, Z = 9x_1 + 7x_2$

$s.t$

$10x_1 + 5x_2 \leq 50$

$6x_1 + 6x_2 \leq 36$

$4x_1 + 18x_2 \leq 81$

$x_1, x_2 \geq 0$

الحل:

1. نحول المتباينات إلى معادلات خطية (الشكل القياسي) بإضافة متغيرات مكملة (راكدة) slack variable وكذلك إضافتها إلى دالة الهدف بمعامل صفري كالأتي:

$max\, Z = 9x_1 + 7x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

$10x_1 + 5x_2 + s_1 = 50$

$6x_1 + 6x_2 + s_2 = 36$

$4x_1 + 18x_2 + 0s_3 = 81$

$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0$

2. نرتب دالة الهدف والقيود في جدول السمبلكس وكما موضح أدناه:

B.V. \ c_j	9 (متغير داخل ↓)	7	0	0	0	sol
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_j
$0\ s_1 \xleftarrow{\text{متغير خارج}}$	$\boxed{10}$ العنصر المحوري	5	1	0	0	50
$0\ s_2$	6	6	0	1	0	36
$0\ s_3$	4	18	0	0	1	81
$Z - C_j$	-9	-7	0	0	0	0

3. الحل الأساسي الأولي المقبول عندما $(x_1 = x_2 = 0)$ هو

$$(s_1 = 50, \quad s_2 = 36, \quad s_3 = 81, \quad Z = 0)$$

بمعنى عدم الإنتاج بصورة نهائية أو الموارد المتوفرة غير مستخدمة في العملية الإنتاجية.

4. إختبار صف الأرباح النسبية $Z - C_j$ إذا كان أكبر أو يساوي صفر فإن الحل المتوفر هو الحل الأمثل وإذا كان $Z - C_j$ أصغر أو يساوي صفر نستمر بالحل.

5. تحديد المتغير الداخل والخارج في جدول السمبلكس

المتغير الداخل: بما أن المشكلة تعظيم فأننا نبحث عن أكبر قيمة بالسالب في دالة الهدف (في صف الأرباح النسبية) وأن اكبر قيمة في السالب هي (-9) التي تمثل معامل (x_1) لذلك فإن (x_1) سيكون المتغير الداخل إلى الحل (لأن المتغير (x_1) هو الذي يضيف أقصى ربح للمنتج عند إختياره ويسمى عمود (x_1) في الجدول بالعمود المحوري.

المتغير الخارج: يتم تقسيم الثابت (الطرف الأيمن) على العناصر المناظرة له في العمود المحوري للقيود عدا صف دالة الهدف وكالأتي:

$$\left(\frac{50}{10}, \frac{36}{10}, \frac{81}{4}\right)$$

وإن اقل نسبة بين النسب هي $(\frac{50}{10} = 5)$ الذي يناظر الصف (s_1) والذي سيكون المتغير الخارج والصف (s_1) يسمى بالصف المحوري وتقاطع العمود المحوري مع الصف المحوري عند العنصر (10) يسمى العنصر المحوري.

تكملة المثال في الصفحة القادمة.

$B.V.$ \ c_j	9	$\downarrow$ 7	0	0	0	sol
	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b_j
$9\ x_1$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	0	0	5
$\leftarrow 0\ s_2$	0	3	$\frac{-6}{10}$	1	0	6
$0\ s_3$	0	16	$\frac{-4}{10}$	0	1	61
$\boldsymbol{Z-C_j}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\frac{-5}{2}}$	$\boldsymbol{\frac{9}{10}}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{45}$
$9\ x_1$	1	0	$\frac{2}{10}$	$\frac{-1}{6}$	0	4
$7\ x_2$	0	1	$\frac{-2}{10}$	$\frac{1}{3}$	0	2
$0\ s_3$	0	0	$\frac{-22}{10}$	$\frac{-16}{3}$	1	29
$\boldsymbol{Z-C_j}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\boldsymbol{\frac{4}{10}}$	$\boldsymbol{\frac{5}{6}}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{50}$

بما أن $\left(\boldsymbol{Z-C_j}\right)$ أكبر أو تساوي صفر والحالة (max) إذا الحل في الجدول الأخير هو الحل الأمثل أي:

$$x_1 = 4, \qquad x_2 = 2, \qquad Z = 50$$

6. لإيجاد معادلة (x_1) (المتغير الداخل) في المرحلة الثانية في جدول السمبلكس فإننا نقسم الصف المحوري على العنصر المحوري وكالاتي:

$$\begin{pmatrix} \frac{10}{10} & \frac{5}{10} & \frac{1}{10} & \frac{0}{10} & \frac{0}{10} & \frac{50}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

أصبح لدينا عنصر محوري جديد قيمته (1) صحيح لتسهيل العملية الحسابية.

7. لإيجاد قيمة معادلة (s_2) الجديدة فإننا نقوم بـ ضرب معادلة (x_1) الجديدة بالعنصر المقابل للعنصر المحوري في معادلة (s_2) ونطرحها من صف (s_2) الأصلي وكالاتي:

$$new\ s_2 - row = current\ s_2 - row - (6) * new\ x_1 - row$$

$$= (6 \quad 6 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 36) - (6) * \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{10} & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 3 & \frac{-6}{10} & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

8. لإيجاد قيمة معادلة (s_3) الجديدة فإننا نقوم بـضرب معادلة (x_1) الجديدة بالعنصر المقابل للعنصر المحوري الجديد في معادلة (s_3) ونطرحها من صف (s_3) الأصلي وكالأتي:

$$new\ s_3 - row = current\ s_3 - row - (4) * new\ x_1 - row$$

$$= (4 \quad 18 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 81) - (4) * \left(1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{10} \quad 0 \quad 0 \quad 5\right)$$

$$= \left(0 \quad 16 \quad \frac{-4}{10} \quad 0 \quad 1 \quad 61\right)$$

9. لإيجاد قيمة معادلة $(Z - C_j)$ الجديدة فإننا نقوم بــــــ ضرب معادلة (x_1) الجديدة بالعنصر المقابل للعنصر المحوري الجديد في معادلة $(Z - C_j)$ ونطرحها من صف $(Z - C_j)$ الأصلي وكالاتي:

$$new\ Z - C_j\ row = current\ Z - C_j\ row - (-9) * new\ x_1 - row$$

$$= (-9 \quad -7 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) - (-9) * \left(1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{10} \quad 0 \quad 0 \quad 0\right)$$

$$\left(0 \quad \frac{-5}{2} \quad \frac{9}{10} \quad 0 \quad 0 \quad 45\right)$$

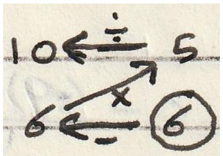
10. لما كان صف $(Z - C_j)$ مازال فيه قيم سالبة فأننا لم نصل إلى الحل الأمثل ولذلك نستمر بالحل بنفس الطريقة السابقة حتى تكون $(Z - C_j \geq 0)$

ملاحظة: يمكن إيجاد قيمة العناصر داخل جدول السمبلكس بالطريقة الأتية:

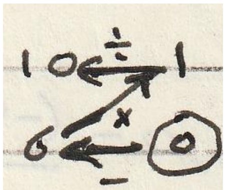
العنصر في الجدول الجديد = العنصر في الجدول السابق − $\dfrac{\text{العنصر المقابل له في العمود المحوري} * \text{العنصر المقابل له في الصف المحوري}}{\text{العنصر المحوري}}$

فإن العناصر الجديدة بالنسبة لصف (s_2) تكون:

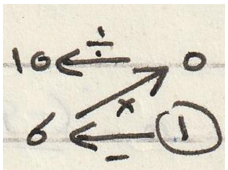
$$6 - \frac{(6)(5)}{10} = 3$$



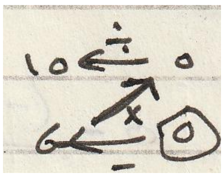
$$0 - \frac{(6)(1)}{10} = \frac{-6}{10}$$



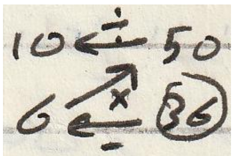
$$1 - \frac{(6)(0)}{10} = 1$$



$$0 - \frac{(6)(0)}{10} = 0$$

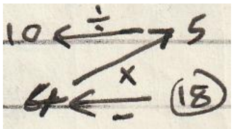


$$36 - \frac{(6)(50)}{10} = 6$$

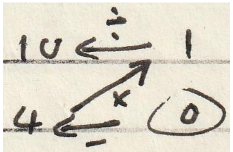


فإن العناصر الجديدة بالنسبة لصف (s_3) تكون:

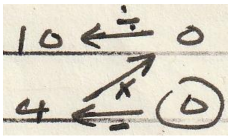
$$18-\frac{(4)(5)}{10}=16$$



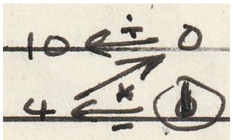
$$0-\frac{(4)(1)}{10}=-\frac{4}{10}$$



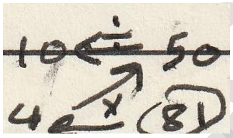
$$0-\frac{(4)(0)}{10}=0$$



$$1-\frac{(4)(0)}{10}=1$$

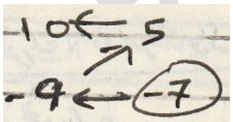


$$81-\frac{(4)(50)}{10}=61$$

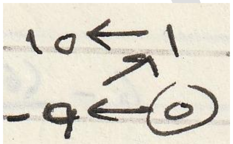


فإن العناصر الجديدة بالنسبة لصف $(Z-C_j)$ تكون:

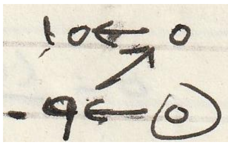
$$-7-\frac{(-9)(5)}{10}=\frac{-5}{2}$$



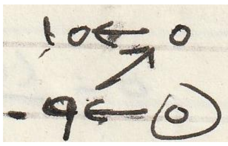
$$0-\frac{(-9)(1)}{10}=\frac{9}{10}$$



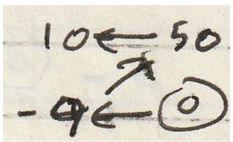
$$0-\frac{(-9)(0)}{10}=0$$



$$0-\frac{(-9)(0)}{10}=0$$



$$0-\frac{(-9)(50)}{10}=45$$



وبالنسبة للعناصر الجديدة التي تقع في العمود المحوري (عمود المتغير الداخل) يصبح العنصر المحوري واحد صحيح والعناصر التي أعلى وأسفل منه تصبح أصفار .

ملاحظة: عند تحديد المتغير الخارج لايمكن القسمة على قيم سالبة أو صفر.