بسم الله الرحمن الرحيم

طريقة (M) الكبيرة

تستخدم هذه الطريقة عندما تكون القيود بصيغة المساواة أو بصيغة الأكبر أو يساوي $(\geq)$ وفي هذه الحالة يصعب تطبيق طريقة السمبلكس الإعتيادية حيث إذا أردنا تحويل الإنموذج إلى الصيغة القياسية فإن ذلك يتطلب طرح متغير وهمي (S) من القيد الذي من نوع $(\geq)$ كما أسلفنا سابقاً، وعند إيجاد الحل الأولي المقبول $(S \cdot B \cdot F)$ نبعد تعويض قيم (x_j) بالصفر فإننا نحصل على قيم سالبة للمتغير الوهمي (S) وهذا مخالف لشرط عدم السالبية الذي يجب توفره لحل إنموذج البرمجة الخطية، لذلك نقوم بإضافة متغيرات إصطناعية إلى القيود من نوع $(\geq)$ بعد طرح المتغير الوهمي منها وكذلك إضافة المتغيرات الإصطناعية إلى القيود من نوع $(=)$ ونرمز لهذه المتغيرات الإصطناعية بالرمز (R)

إن دخول المتغيرات الإصطناعية إلى دالة الهدف يكون مع معامل مقداره M بحيث M تمثل عدد كبير جداً لكي نضفي عدم دخول المتغيرات الإصطناعية تدخل في دالة الهدف بإشارة سالبة إذا كانت دالة الهدف تعظيم وإشارة موجبة وإذا كانت دالة الهدف تقليل فـ عليه يتم إستبعادها من دالة الهدف عندما تبدأ بالحل لأنها ذات معامل كبير جداً، ولهذا سُميت بطريقة (M) الكبيرة ولتوضيح ذلك ناخذ المثال الأتي:

مثال: أوجد حل إنموذج البرمجة الخطية الآتي بطريقة M الكبيرة:

$$min\, Z = 2x_1 + 3x_2$$

$$s.to$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 3x_2 \geq 20$$

$$x_1 + x_2 = 10$$

$$x_1\,, x_2 \geq 0$$

الحل: نحول الإنموذج إلى الشكل القياسي وكما يلي:

$$min\, Z = 2x_1 + 3x_2 + 0s_1 + MR_1 + MR_2$$

$$s.to$$

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + s_1 = 4$$

$$x_1 + 3x_2 - s_2 + R_1 = 20$$

$$x_1 + x_2 \qquad + R_2 = 10$$

$$x_1\,, x_2\,, s_1\,, s_2\,, R_1\,, R_2 \geq 10$$

الأن نضع المسألة في جدول السمبلكس وكما يأتي:

c_j		2	3	0	0	M	M	0
$B.V$		x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	sol
0	s_1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	0	0	0	4
M	R_1	1	**3**	0	-1	1	0	20
M	R_2	1	1	0	0	0	1	10
$Z-C_j$		$2M-2$	$4M-3$	0	$-M$	0	0	$30M$

القيم في صف $(Z-C_j)$ يمكن الحصول عليه كما يأتي:

$$\left(\frac{1}{2}\right)(0)+(1)(M)+(1)(M)-2=2M-2$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)(0)+(3)(M)+(1)(M)-3=4M-3$$

$$(1)(0)+(0)(M)+(0)(M)-0=0$$

$$(0)(0)+(-1)(M)+(0)(M)-0=-M$$

$$(0)(0)+(1)(M)+(0)(M)-M=0$$

$$(0)(0)+(0)(M)+(1)(M)-M=2M-2$$

$$(4)(0)+(20)(M)+(10)(M)=30$$

بعد وضع المسألة في جدول السمبلكس نتبع نفس خطوات الحل التي تم ذكرها بطريقة السمبلكس الإعتيادية.

c_j		2	3	0	0	M	M	0
$B.V$		x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	sol
0	s_1	$\frac{5}{12}$	0	1	$\frac{1}{12}$	$\frac{-1}{12}$	0	$\frac{7}{3}$
3	x_1	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{20}{3}$
M	R_2	$\mathbf{\frac{2}{3}}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1	$\frac{10}{3}$
$Z-C_j$		$\frac{2M-3}{3}$	0	0	$\frac{M-3}{3}$	$\frac{3-4M}{3}$	0	$\frac{60+10M}{3}$
0	s_1	0	0	1	$\frac{-1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{-5}{8}$	$\frac{1}{4}$
3	x_1	0	1	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	5
2	x_2	1	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{2}$	$\frac{3}{2}$	5
$Z-C_j$		0	0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1-2M}{2}$	$\frac{3-2M}{2}$	25

بما أن $(Z-C_j)$ أصغر او تساوي الصفر والحالة (min) إذا الحل في الجدول الاخير هو الحل الأمثل أي أن:

$$x_1=5 \quad , \quad x_2=5 \quad , \quad Z=25$$

إسلوب أم الكبيرة $(M-Technique)$

توضيح إسلوب أم الكبيرة بالرجوع إلى المثال الأتي:

$$minise\ Z=3x_1+8x_2+x_3$$

$S.T$

$$6x_1+2x_2+6x_3\geq 6$$

$$6x_1+4x_2 \qquad = 12$$

$$2x_1-2x_2 \qquad \leq 2$$

$$x_1\,,x_2\,,x_3\geq 0$$

لتحويل الشكل أعلاه إلى شكل قياسي نضيف متغيرات مكملة (s_1,s_2) إلى كل من القيود ذات الإشارة أكبر أو يساوي ثم إضافة متغيرات إصطناعية (R_1,R_2) إلى كل قيد له إشارة أكبر او يساوي أو إشارة مساواة كما مبين أدناه:

$$6x_1+2x_2+6x_3-s_1+R_1=6$$

$$6x_1+4x_2 \qquad +R_2=12$$

$$2x_1-2x_2 \qquad +\ s_2 \qquad =2$$

ولكي لايؤثر ذلك على معادلة دالة الهدف نضيف (R_1,R_2) إلى دالة الهدف بعد ضرب كل منهما بكمية كبيرة (M) وكذلك سمي هذا الإسم بإسلوب أم. بعبارة اخرى:

$$minise\ Z=3x_1+8x_2+x_3+MR_1+MR_2$$

$S.t$

$$6x_1+2x_2+6x_3-s_1+R_1=6$$

$$6x_1+4x_2 \qquad +R_2=12$$

$$2x_1-2x_2 \qquad +\ s_2 \qquad =2$$

$$x_1\,,x_2\,,x_3\,,s_1\,,s_2\,,R_1\,,R_2\geq 0$$

من أجل أن تكون معاملات (R_1,R_2) تساوي صفراً في دالة الهدف نضيف إلى دالة الهدف:

R_1 معادلة $*\ M$

R_2 معادلة $*\ M$

نوضح ماجاءَ في الصفحة السابقة بعبارة أخرى لدالة الهدف:

$$Z - 3x_1 - 8x_2 - MR_1 - MR_2 = 0$$

وكذلك نضرب القيود أيضا بـ (M)

$6Mx_1 + 2Mx_2 + 6Mx_3 - Ms_1 + MR_1 = 6M$ معادلة $R_1 * M$

$6Mx_1 + 4Mx_2 \qquad + MR_2 = 12M$ معادلة $R_2 * M$

$$+(-3 + 12M)x_1 + (-8 + 6M)x_2 + (-1 + 6M)x_3 - MS_1 = 18M$$

لذلك فإن مشكلة البرمجة الخطية القياسية كما يلي:

$$minimise\ Z + (-3 + 12M)x_1 + (-8 + 6M)x_2 + (-1 + 6M)x_3 - MS_1 = 18M$$

وفقاً إلى القيود الأتية:

$6x_1 + 2x_2 + 6x_3 - s_1 + R_1 = 6$ القيد الأول

$6x_1 + 4x_2 \qquad + R_2 = 12$ القيد الثاني

$2x_1 - 2x_2 \qquad + s_2 \qquad = 2$ القيد الثالث

نتبع خطوات طريقة السمبلكس نفسها للحصول على الحل الأمثل نضع البيانات في جدول مُبسط وكما مبين ذلك في الجدول المبسط (6)

المتغيرات الأساسية	$\downarrow x_1$	x_2	x_3	s_1	s_2	R_1	R_2	الثابت
Z	$12M - 3$	$6M - 8$	$6M - 1$	$-M$	0	0	0	$18M$
$\leftarrow R_1$	**6**	2	6	-1	0	1	0	6
R_2	6	4	0	0	0	0	1	12
S_2	2	-2	0	0	1	0	0	2

تحديد المتغير الداخل: بما أن مشكلة البرمجة الخطية هي التصغير ($minimise$) لذلك فإن أكبر معامل موجب في دالة الهدف هو (x_1) والذي يساوي ($12M - 3$) المتغير الداخل (x_1).

تحديد المتغير الخارج: هو المتغير الواقع أزاء أقل نسبة من النسب الأتية:

$$\left[\frac{2}{2}\ ,\ \frac{12}{2}\ ,\ \frac{6}{6}\right],\left[\frac{b_1}{a_4}\ ,\ \frac{b_2}{a_{21}}\ ,\ \frac{b_3}{a_{31}}\right]$$

هناك نسبتان متساويتان هما الاولى والثانية والثالثة، لذلك نختار الاولى (الاختيار يكون كيفما اتفق)

$\therefore$ R_1 سيكون المتغير الخارج وسيحل محله المتغير (x_1) في الجدول المبسط (7).

العنصر المحوري: هو العنصر (6) بعد تطبيق خطوات الطريقة المسبطة فـينتج كم في الجدول الأتي:

الجدول المبسط (7)

المتغيرات الأساسية	x_1	$\downarrow x_2$	x_3	s_1	s_2	R_1	R_2	الثابت
Z	0	$2M-7$	$-6M+2$	$M-\frac{1}{2}$	0	$-2M+\frac{1}{2}$	0	$6M+3$
x_1	1	$\frac{1}{3}$	1	$-1/6$	0	$\frac{1}{6}$	0	1
$\leftarrow R_2$	0	**2**	-6	1	0	-1	1	6
S_2	0	$-\frac{8}{3}$	-2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{16}{3}$	0	0

الحل في الجدول أعلاه غير أمثل لوجود قيم موجبة في دالة الهدف. نختار اكبر القيم الموجبة في دالة الهدف، حيث أكبر قيمة موجبة في دالة الهدف هو المقدار $(2M-7)$. لذلك فأن المتغير الداخل سيكون (x_2) لان $(2M-7)$ هو معامل (x_2) في دالة الهدف.

المتغير الخارج: هو أزاء أقل نسبة من النسب الأتية:

$$\left[\frac{1}{\frac{1}{3}} \quad , \quad \frac{6}{2}\right] \quad \frac{0}{-\frac{8}{3}}$$ يهمل لان المقام سالب

نختار (R_2) بأن تكون المتغير الخارج ويحل محله (x_2) $\qquad$ $\left[1*\frac{3}{1}\,,6/2\right] \longrightarrow [3,3]$

بتطبيق خطوات الطريقة المبسطة للحل نحصل على الجدول المبسط (8)

الجدول المبسط (8)

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	$\downarrow s_1$	s_2	R_1	R_2	الثابت
Z	0	0	-19	3	0	$-M-3$	$-M+\frac{1}{2}$	24
x_1	1	0	2	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-1/6$	0
x_2	0	1	-3	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	3
$\leftarrow s_2$	0	0	-10	$\mathbf{\frac{8}{3}}$	1	4	$\frac{4}{3}$	8

إن (R_1, R_2) متغيران إصطناعيان يساعدان في إيجاد الحل وليس لهما أي دور بعد أن خرجا من ضمن المتغيرات الاساسية ولذلك نحذف عمودي (R_1, R_2) من أية إعتبارات اخرى.

لايزال الحل غير أمثل لوجود قيم موجبة في دالة الهدف في الجدول المبسط (8) هو المقدار (3) الواقع في عمود المتغير (s_1) لذلك فإن المتغير الداخل سيكون (s_1) وأن المتغير الخارج هو (s_2) أي أن (s_1) سيكون بدل (s_2) كما مبين في الجدول المبسط (9)

الجدول المبسط (9) $\downarrow$

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	الثابت
Z	0	0	$\frac{-31}{4}$	0	$\frac{-9}{8}$	15
x_1	1	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{1}{8}$	1
x_2	0	1	$\frac{-9}{8}$	0	$\frac{-3}{16}$	$\frac{3}{2}$
s_1	0	0	$\frac{-30}{8}$	1	$\frac{3}{8}$	3

جميع القيم في دالة الهدف سالبة أو مساوية للعنصر في الجدول (9) أعلاه فإن الحل أعلاه هو الحل الأمثل وأن قيمة (Z) المثلى:

$$Z = 15 \quad , \quad x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{3}{2}$$

مثال: (2)

$maximise\ Z = 3x_1 + x_2 - x_3$

$S.To$

$x_1 + x_2 + x_3 \quad = 10$

$2x_1 - x_2 \qquad \geq 2$

$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 6$

$x_1 \geq 0 \quad , \quad x_2 \geq 0 \quad , \quad x_3 \geq 0$

بعد إضافة المتغيرات المكملة والإصطناعية, تكون القيود أعلاه كما ياتي:

$x_1 + x_2 + x_3 + R_1 = 10$

$2x_1 - x_2 - s_1 + R_2 = 2$

$x_1 - 2x_2 + x_3 + s_2 = 6$

$x_1 , x_2 , x_3 , R_1 , R_2 , s_1 , s_2 \geq 0$

في حالة التعظيم $(maximise)$ نطرح (M) مضروبة بـ (R_1) و (M) مضروبة بـ (R_2) من دالة الهدف أي أن:

$maximise\ Z = 3x_1 + x_2 - x_3 - MR_1 - MR_2$

من أجل جعل معاملات (R_1, R_2) في دالة الهدف تساوي صفراً نضيف إليها:

$$R_1 \text{ معادلة } * M$$

$$R_2 \text{ معادلة } * M$$

$$Z - 3x_1 - x_2 + x_3 + \cancel{M}R_1 + \cancel{M}R_2 = 0$$

$$-Mx_1 - \cancel{Mx_2} - Mx_3 - MR_1 \qquad = -10$$

$$-2Mx_1 + \cancel{Mx_2} + Ms_1 \qquad - MR_2 = -2M$$

$$Z - (3+3M)x_1 - x_2 + (1-M)x_3 + Ms_1 = -12M$$

تكتب دالة الهدف والقيود كما في الجدول المبسط (10) الأتي:

الجدول المبسط: (10)

المتغيرات الأساسية	$\downarrow x_1$	x_2	x_3	s_1	s_2	R_1	R_2	الثابت
Z	$-3-3M$	-1	$-M+1$	M	0	0	0	$-12M$
R_1	1	1	1	0	0	1	0	10
$\leftarrow R_2$	2	-1	0	-1	0	0	1	2
s_2	1	-2	1	0	1	0	0	6

في حالة التعظيم نختار المتغير الداخل ذو المعامل الأكثر سالبية في دالة الهدف أكثر مقدار في دالة الهدف هو $(-3-3M)$ أي أن (x_1) سيكون المتغير الداخل و (R_2) هو النتغير الخارج لأن أقل نسبة تقع في الصف (R_2). نطبق خطوات الحل بطريقة السمبلكس على الجدول المبسط (10) وبذلك نحصل على الجدول المبسط (11):

المتغيرات الأساسية	x_1	$\downarrow x_2$	x_3	s_1	s_2	R_1	R_2	الثابت
Z	0	$-\frac{3}{2}M-\frac{5}{2}$	$1-M$	$-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}M$	0	0	$\frac{1}{2}+\frac{3}{2}M$	$3-9M$
$\leftarrow R_1$	0	$\mathbf{\frac{3}{2}}$	1	$\frac{1}{2}$	0	1	$-\frac{1}{2}$	9
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{1}{2}$	1
s_2	0	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	5

الحل غير أمثل لذلك نختار المعامل الأكثر سالبية في دالة الهدف في الجدول اعلاه ونلاحظ أن المقدار $\left(-\frac{3}{2}M-\frac{5}{2}\right)$ معامل (x_2) هو الاكثر سالبية

إذاً (x_2) يكون المتغير الداخل وان (R_1) سيكون المتغير الخارج بعد تطبيق خطوات الطريقة المبسطة نحصل على الجدول أدناه الجدول المبسط (12) $\downarrow$

في الصفحة القادمة

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	$\downarrow s_1$	s_2	R_1	R_2	الثابت
Z	0	0	$\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0	$M+\frac{5}{3}$	$M+\frac{2}{3}$	18
x_2	0	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	6
x_1	1	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
$\leftarrow s_2$	0	0	2	**(1)**	1	1	-1	14

(R_1, R_2) في الجدول المبسط (12) متغيرات غير أساسية ولذلك يُحذفان من أي إعتبارات أخرى.
الحل لايزال غير امثل كما نلاحظ ذلك في الجدول المبسط (12) حيث المعامل الأكثر سالبية هو المقدار $\left(-\frac{2}{3}\right)$ وهو معالمل (s_1) لذلك فإن (s_1) المتغير الداخل وان (s_2) سيكون المتغير الخارج وبعد تطبيق خطوات الطريقة المبسطة ينتج الجدول المبسط (13) أدناه.

الجدول المبسط (13)

المتغيرات الأساسية	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	الثابت
Z	0	0	4	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{82}{3}$
x_2	0	1	0	0	$\frac{-1}{3}$	$\frac{4}{3}$
x_1	1	0	1	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{26}{3}$
s_1	0	0	2	1	1	14

الحل الأن أمثل لأن جميع قيم صف دالة الهدف (Z) موجبة حيث:

$$Z = \frac{82}{3}$$

$$x_1 = \frac{26}{3}$$

$$x_2 = \frac{4}{3}$$