بسم الله الرحمن الرحيم

النموذج المقابل

يطلق على صيغة النموذج الرياضي الذي يمثل مشكلة ما بالنموذج الاولي (***Primal Model***), ولكل نموذج اولي صيغة نموذج وحيدة تسمى بالنموذج المقابل (***Dual Model***), ويمكن حل النموذج المقابل ومن هذا الحل يمكن التوصل للحل الامثل لنموذج البرمجة الخطية الاولى.وإن أهم فوائد النموذج المقابل (أي الغاية من صياغة النموذج المقابل) الاتي:

1. يساعد النموذج المقابل على اختزال خطوات الحل في بعض الاحيان, أذ يكون عدد القيود للنموذج المقابل أقل من ععد قيود النموذج الاولي في بعض الاحيان.
2. في حالة كون احد متغيرات النموذج الاولي ذو قيمة سالبة فان حل النموذج الاولي يكون غير ممكن, بينما النموذج المقابل له يكون له حل.
3. بالامكان اضافة قيود جديده للمشكلة وايجاد حل أمثل لها وفق القيود المضافة.

ومن أهم الصفات المشتركة للنموذج الاولي والنموذج المقابل له هو ان الحل لأي نموذج منهما له علاقة مباشرة بحل النموذج الآخر, ذلك يعني أنه في حالة وجود حل اساسي ممكن للنموذج الاولي فأن هناك حلا اساسيا ممكنا للنموذج المقابل له, واذا كان لأي من النموذجين حلا اساسيا فأن لهما حلا أمثل. يمكن القول بأن النموذج المقابل هو مقلوب النموذج الاولي أو بالعكس.

صياغة النموذج المقابل للنموذج الاولي

1. تعريف متغيرات جديده غير سالبة للنموذج المقابل يكون عددها مساوي لعدد قيود النموذج الاولي.
2. تعكس دالة الهدف بحيث تعظيم الهدف للنموذج الاولي يصبح تصغير لدالة الهدف للنموذج المقابل له, وتصغير دالة الهدف للنموذج الاولي يصبح تعظيم لدالة الهدف للنموذج المقابل له.
3. تعكس اتجاه متباينات القيود, فاذا كانت قيود النموذج الاولي متباينات اكبر او تساوي فتصبح قيود النموذج المقابل متباينات أقل أو تساوي, واذا كانت قيود النموذج الاولي متباينات أقل او تساوي فتصبح قيود النموذج المقابل متباينات أكبر او تساوي. مع ملاحظة أنه اذا كانت قيود النموذج الاولي متباينات مختلفة الاتجاه فيجب توحيدها الى متباينات باتجاه واحد فقط وذلك بظرب طرفي المتباينة بـ (-1),
   أما اذا كان هناك قيود في النموذج الاولي بشكل معادلات عندها كل قيد بهيئة معادلة يكتب بدلالة قيدين احدهما أكبر أو يساوي والثاني أصغر أو يساوي ثم بعد ذلك توحد اتجاهات القيود.
4. معاملات المتغيرات في دالة الهدف للنموذج الاولي تصبح قيم الثوابت (قيم الطرف الايمن) لقيود النموذج المقابل.
5. ثوابت قيود النموذج الاولي تصبح معاملات المتغيرات في دالة هدف النموذج المقابل.

6. مبدلة مصفوفة معاملات المتغيرات لقيود النموذج الاولي تصبح مصفوفة معاملات المتغيرات لقيود النموذج المقابل. أي معاملات العمود (j) في قيود النموذج الاولي تصبح معاملات الصف (j) في قيود النموذج الاولي. ولنفرض لدينا النموذج الاولي بثلاث متغيرات هو:

$min\, Z = C_1\, x_1 + C_2\, x_2 + C_3\, x_3$

$S.T.$

$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 \leq b_1$

$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 \geq b_2$

$a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_n = b_3$

$x_1\, , x_2\, , x_3 \geq 0$

اول خطوة نعيد كتابة القيد الثالث بدلالة قيدين وكالاتي:

$min\, Z = C_1\, x_1 + C_2\, x_2 + C_3\, x_3$

$S.T.$

$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 \leq b_1$

$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + a_{23}\, x_3 \geq b_2$

$a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_n \leq b_3$

$a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_n \geq b_3$

$x_1\, , x_2\, , x_3 \geq 0$

بعدها توحد اتجاهات القيود بضرب طرفي القيدين الثاني والرابع بـ (-1) لتصبح القيود كالاتي:

$min\, Z = C_1\, x_1 + C_2\, x_2 + C_3\, x_3$

$S.T.$

$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + a_{13}\, x_3 \leq b_1$

$-a_{21}\, x_1 - a_{22}\, x_2 - a_{23}\, x_3 \geq -b_2$

$a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_n \leq b_3$

$-a_{31}\, x_1 - a_{32}\, x_2 - a_{33}\, x_n \geq -b_3$

$x_1\, , x_2\, , x_3 \geq 0$

نفرض متغيرات النموذج المقابل (عددها 4) هي $(Y_1\, , Y_2\, , Y_3\, , Y_4)$ النموذج المقابل يكون كالاتي:

$Max\, W = b_1 Y_1 - b_2 Y_2 + b_3 Y_3 - b_3 Y_4$

$S.T.$

$a_{11} Y_1 - a_{21} Y_2 + a_{31} Y_3 - a_{31} Y_4 \geq C_1$

$a_{12}Y_1 - a_{22}Y_2 + a_{32}Y_3 - a_{32}Y_4 \geq C_2$

$a_{13}Y_1 - a_{23}Y_2 + a_{33}Y_3 - a_{33}Y_4 \geq C_3$

$Y_1 , Y_2 , Y_3 , Y_4 \geq 0$

مثال(1): حول نموذج البرمجة الخطية الاولي التالي الى النموذج المقابل:

$Min\, Z = 16x_1 + 25x_2$

$S.T.$

$x_1 + 7x_2 \geq 4$

$x_1 + 5x_2 \geq 5$

$2x_1 + 3x_2 \geq 9$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

الحل: عدد قيود النموذج الاولي تساوي (3) لذا نفرض ثلاث متغيرات للنموذج المقابل (Y_1 , Y_2 , Y_3).

$max\, W = 4Y_1 + 5Y_2 + 9Y_3$

$S.To$

$Y_1 + Y_2 + 2Y_3 \leq 16$

$7Y_1 + 5Y_2 + 3Y_3 \leq 25$

$Y_1 , Y_2 , Y_3 \geq 0$

مثال(2): حول نموذج البرمجة الخطية الاولي التالي الى النموذج المقابل:

$Max\, Z = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$

$s.to$

$3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 18$

$5x_1 \qquad + 6x_3 \qquad \leq 20$

$x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 9$

$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \geq 0$

الحل:

يتم اولا توحيد القيود بحيث تكون جميعها باتجاه واحد, يمكن ضرب القيد الثالث بـ (-1) لتصبح قيود النموذج كالاتي:

$3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 18$

$5x_1 \qquad + 6x_3 \qquad \leq 20$

$-x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \geq -9$

$x_1 , x_2 , x_3 , x_4 \geq 0$

عدد قيود النموذج الاولي تساوي (3) لذا نفرض ثلاث متغيرات للنموذج المقابل(Y_1 , Y_2 , Y_3).

$Min\ W = 18Y_1 + 20Y_2 - 9Y_3$

$S.To$

$3Y_1 + 5Y_2 - Y_3 \geq 1$

$-2Y_1 \qquad + Y_3 \geq 1$

$Y_1 + 6Y_2 - 4Y_3 \geq -1$

$5Y_1 \qquad - Y_3 \geq -1$

$Y_1 , Y_2 , Y_3 \geq 0$

مثال(3): حول نموذج البرمجة الخطية الاولي التالي الى النموذج المقابل:

$Max\ Z = 2x_1 + x_2 + x_3$

$s.to$

$x_1 + x_2 + x_3 > 6$

$3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3$

$-4x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

الحل: القيدين الثاني والثالث يتم كتابة كل منهما بدلالة قيدين وكالاتي:

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$

$3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 3$

$3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 3$

$-4x_1 + 3x_2 - 6x_3 \geq 1$

$-4x_1 + 3x_2 - 6x_3 \leq 1$

$x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

توحد القيود كالاتي:

$-x_1 - x_2 - x_3 \leq -6$

$-3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq -3$

$3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \leq 3$

$4x_1 - 3x_2 + 6x_3 \leq -1$

$-4x_1 + 3x_2 - 6x_3 \leq 1$

$x_1 , x_2 , x_3 , \geq 0$

اصبح لدينا خمسة قيود لذا نفرض (5) متغيرات للنموذج المقابل: $(Y_1 , Y_2 , Y_3, Y_4, Y_5)$

$Min\, W = -6Y_1 - 3Y_2 + 3Y_3 - Y_4 + Y_5$

$S.t.$

$-Y_1 - 3Y_2 + 3Y_3 + 4Y_4 - 4Y_5 \geq 2$

$-Y_1 + 2Y_2 - 2Y_3 - 3Y_4 + 3Y_5 \geq 1$

$-Y_1 - 3Y_2 + 3Y_3 + 6Y_4 - 6Y_5 \geq 1$

$Y_1 , Y_2 , Y_3, Y_4, Y_5 \geq 0$