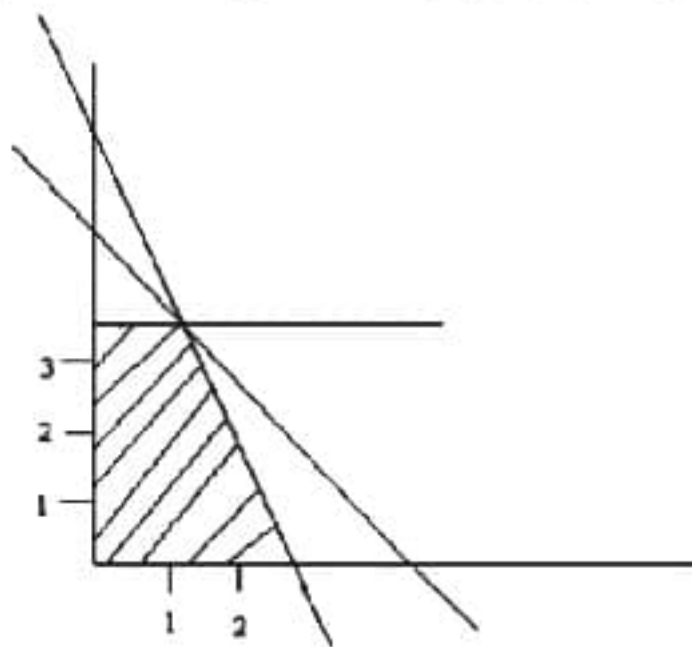


تتطلب أكثر التطبيقات العملية لمسائل البرمجة الخطية (L.P.) حل متمثل بأعداد صحيحة فمثلا في مسائل الإنتاج فإنه من غير الممكن أن يتم إنتاج سيارة ونصف أو حقيبة جلدية وربع الحقيبة وعلى هذا الأساس ظهرت البرمجة الخطية الصحيحة (I.L.P.) التي هي عبارة عن مسألة برمجة خطية (L.P.) تكون كل أو بعض قيم متغيرات المسألة عبارة عن أعداد صحيحة أي مقيدة بشرط (قيد) العدد الصحيح، مسائل البرمجة الخطية الصحيحة (I.L.P.) تكون على نوعين هما:

١. البرمجة الصحيحة النقية (Pure integer programming) وهي المسألة التي تكون كل قيم متغيراتها عبارة عن أعداد صحيحة.
٢. البرمجة الصحيحة المختلطة (Mixed integer programming) وهي المسألة التي تكون بعض قيم متغيراتها عبارة عن أعداد صحيحة.

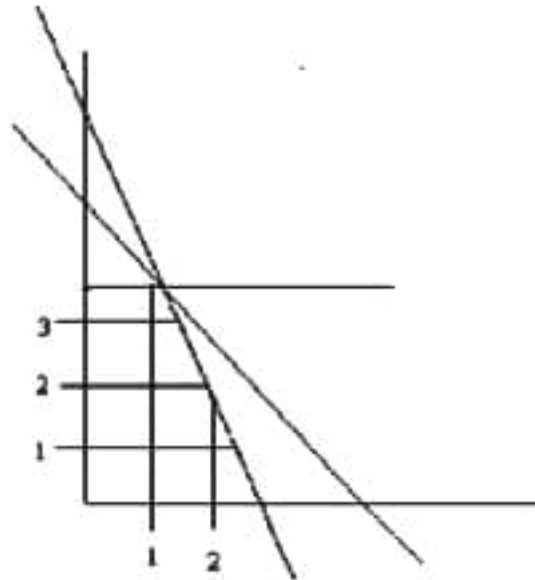
الحلول الأساسية لمسائل البرمجة الخطية الصحيحة (I.L.P.) يجب أن تكون عبارة عن أعداد صحيحة فمثلا لو افترضنا أن الشكل (1-2) يمثل منطقة الحلول الممكنة لمسألة برمجة خطية (L.P.):



الشكل (1-2)

فإن أية نقطة تقع ضمن منطقة الحلول الممكنة تمثل حلا ممكنا لمسألة البرمجة الخطية (L.P.) ولكن ليست كل النقاط تمثل حلا ممكنا لمسألة البرمجة الخطية الصحيحة

(I.L.P.) حيث أن النقاط التي تمثل الحلول الممكنة لمسألة البرمجة الخطية الصحيحة (I.L.P.) هي عبارة عن نقاط تقاطع المستقيمات الواصلة بين تقسيمات المحور السيني والمحور الصادي وكما هو موضح بالشكل (2-2):



الشكل (2-2)

من الشكل (2-2) يتضح أن عدد نقاط الحلول الممكنة للبرمجة الخطية الصحيحة (I.L.P.) هي أقل من عدد نقاط الحلول الممكنة للبرمجة الخطية (L.P.) وفي بعض الحالات تساويها وعلى هذا الأساس فإن قبة الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الصحيحة (I.L.P.) هي أقل أو تساوي قيمة الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية (L.P.) في حالة التعظيم (Max) وأكبر أو تساوي في حالة التقليل (Min).

2-2: مسائل توضيحية Illustrative Problems

في هذه الفقرة سوف يتم تناول بعض المسائل التطبيقية والتي توضح كيفية تكوين مسألة البرمجة الخطية الصحيحة (I.L.P.).

1-2-2: مسألة الإنتاج

تقوم الشركة العامة للصناعات الكهربائية بإنتاج ثلاثة أنواع من الماطورات وهي (22 واط، 30 واط، 45 واط) ربح الماطور الواحد من الأنواع الثلاثة هو 7، 5، (4 ألف دينار على التوالي، عملية إنتاج الماطورات تتطلب ثلاثة أنواع من المواد الأولية

الجدول (1-2)

المواد الأولية	22 واط	30 واط	45 واط	الكمية المتوفرة
I	3	2	3	20
II	3	5	7	25
III	2	3	4	25

ما هو عدد الماطورات المنتجة يوميا من كل نوع بحيث يؤدي ذلك إلى تعظيم ربح الشركة. صيغة أمودج البرمجة الخطية (L.P.) لمسألة الشركة العامة للصناعات الكهربائية يكون بالصيغة الآتية على افتراض أن X_1 يمثل عدد الماطورات المنتجة يوميا من النوع (22 واط) و X_2 يمثل عدد الماطورات المنتجة يوميا من النوع (30 واط) و X_3 يمثل عدد الماطورات المنتجة يوميا من النوع (40 واط):

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 5X_2 + 7X_3$$

S.T

$$3X_1 + 2X_2 + 3X_3 \leq 20$$

$$3X_1 + 5X_2 + 7X_3 \leq 25$$

$$2X_1 + 3X_2 + 4X_3 \leq 25$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0 \text{ and Integer}$$

دخول القيد الأخير إلى المسألة لضمان كون قيم المتغيرات سوف تكون أعداد صحيحة.

2-2-2: مسألة النقل

شركة لنقل المسافرين تمتلك 20 حافلة لنقل المسافرين تعمل على أربعة خطوط، إيراد الحافلة الواحدة العاملة على كل خط من الخطوط الأربعة هو (17, 10, 15, 20) ألف دينار يوميا على التوالي، ساعات العمل الفعلية للحافلة الواحدة العاملة على كل خط هو (7, 6, 5, 5) ساعة يوميا ومجموع ساعات العمل المتوفرة لحافلات الشركة هي 124 ساعة عمل يوميا، عدد الأشخاص المستفيدين من الخدمة على الخطوط الأربعة هو

تؤدي إلى الحصول على أعظم إيراد للشركة.

المسألة تمثل مسألة برمجة خطية صحيحة (I.L.P) حيث أن أعداد الحافلات هي أعداد صحيحة لذلك فإن نموذج البرمجة يكون بالصيغة الآتية على افتراض:

χ_1 : عدد الحافلات العاملة يوميا على الخط الأول.

χ_2 : عدد الحافلات العاملة يوميا على الخط الثاني.

χ_3 : عدد الحافلات العاملة يوميا على الخط الثالث.

χ_4 : عدد الحافلات العاملة يوميا على الخط الرابع.

$$\text{Max } Z = 20\chi_1 + 15\chi_2 + 10\chi_3 + 17\chi_4$$

S.T

$$5\chi_1 + 5\chi_2 + 6\chi_3 + 7\chi_4 \leq 124$$

$$30\chi_1 + 50\chi_2 + 5\chi_3 + 40\chi_4 \leq 1000$$

$$\chi_2 + \chi_3 \geq 9$$

$$\chi_1, \chi_2, \chi_3, \chi_4 \geq 0 \text{ and integer}$$

3-2-2: مسألة الأيدي العاملة

مصنع يمتلك خطين إنتاجيين , ساعات عمل العامل الواحد في كل خط هي (5 , 6) ساعة يوميا على التوالي ومجموع ما متوافر من ساعات العمل اليومية لعمال المصنع هو 170 ساعة , إنتاج العامل الواحد في كل خط إنتاجي من وحدات الإنتاج هو (2/3 , 4/3) وحدة يوميا وعلى المصنع أن ينتج يوميا ما لا يقل عن 25 وحدة وعدد الأيدي العاملة يوميا يجب أن لا يقل عن 25 عامل , ما هو عدد الأيدي العاملة يوميا على كل خط بحيث يؤدي ذلك إلى تقليل كلفة استخدام الأيدي العاملة اليومي إلى أقل ما يمكن مع العلم أن تكلفة استخدام العامل الواحد على كل خط يوميا هي (2 , 3) ألف دينار على التوالي.

المسألة يمثل مسألة برمجة خطية صحيحة (I.L.P) كما أن نموذج البرمجة الخطية يفرض:

χ_1 : عدد العمال العاملين على الخط الإنتاجي الأول يوميا.

χ_2 : عدد العمال العاملين على الخط الإنتاجي الثاني يوميا.

$$\text{Min } Z = 2\chi_1 + 3\chi_2$$

S.T

$$5\chi_1 + 6\chi_2 \leq 170$$

$$2/3\chi_1 + 4/3\chi_2 \geq 25$$

$$\chi_1 + \chi_2 \geq 25$$

$$\chi_1, \chi_2 \geq 0 \text{ and integer}$$

3-2: طرائق حل مسائل البرمجة الخطية الصحيحة

Solution Methods Of Integer Linear Programming Problems

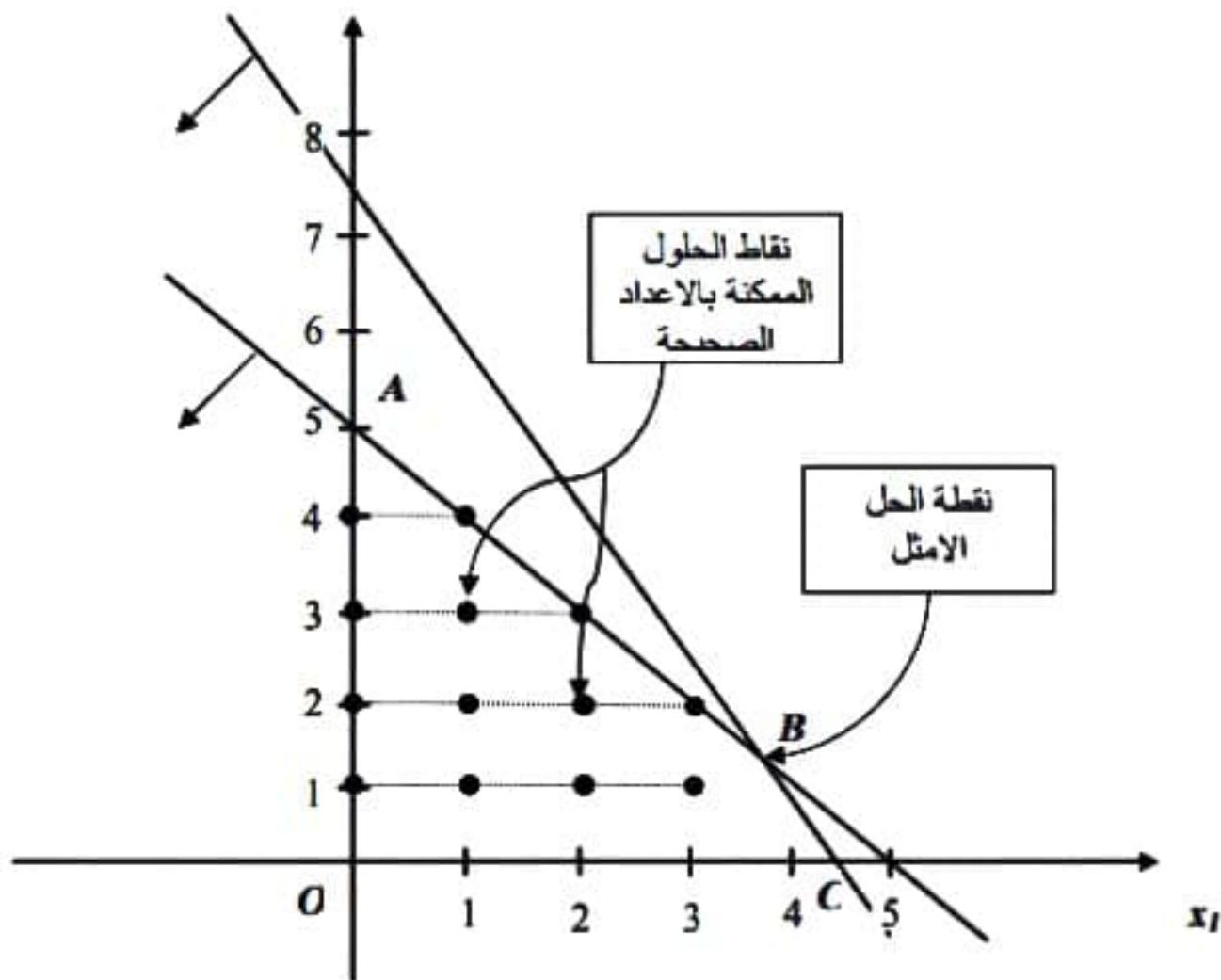
هنالك العديد من الطرائق التي طورت لحل مسائل البرمجة الخطية الصحيحة (I.L.P) واغلب هذه الطرائق تقوم على أساس تجاهل قيد العدد الصحيح للتوصل إلى حل المسألة ومن ثم معالجة القيم الكسرية للمتغيرات في حال وجودها والسبب يعود في كون عملية التوصل إلى الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية الصحيحة (I.L.P) يتم من خلال الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية العامة (L.P) هو تقارب القيم المثلى للحل الأمثل للمسألتين وفي بعض الأحيان تساويها وأن هذا يؤدي إلى تقليل العمليات الحسابية للتوصل إلى الحل الأمثل لمسألة البرمجة الصحيحة (I.L.P). في هذه الفقرة سوف يتم تناول ثلاث طرائق لحل البرمجة الصحيحة (I.L.P) وهما:

1. أسلوب القطع المكافئ The Cutting - Plane Approach

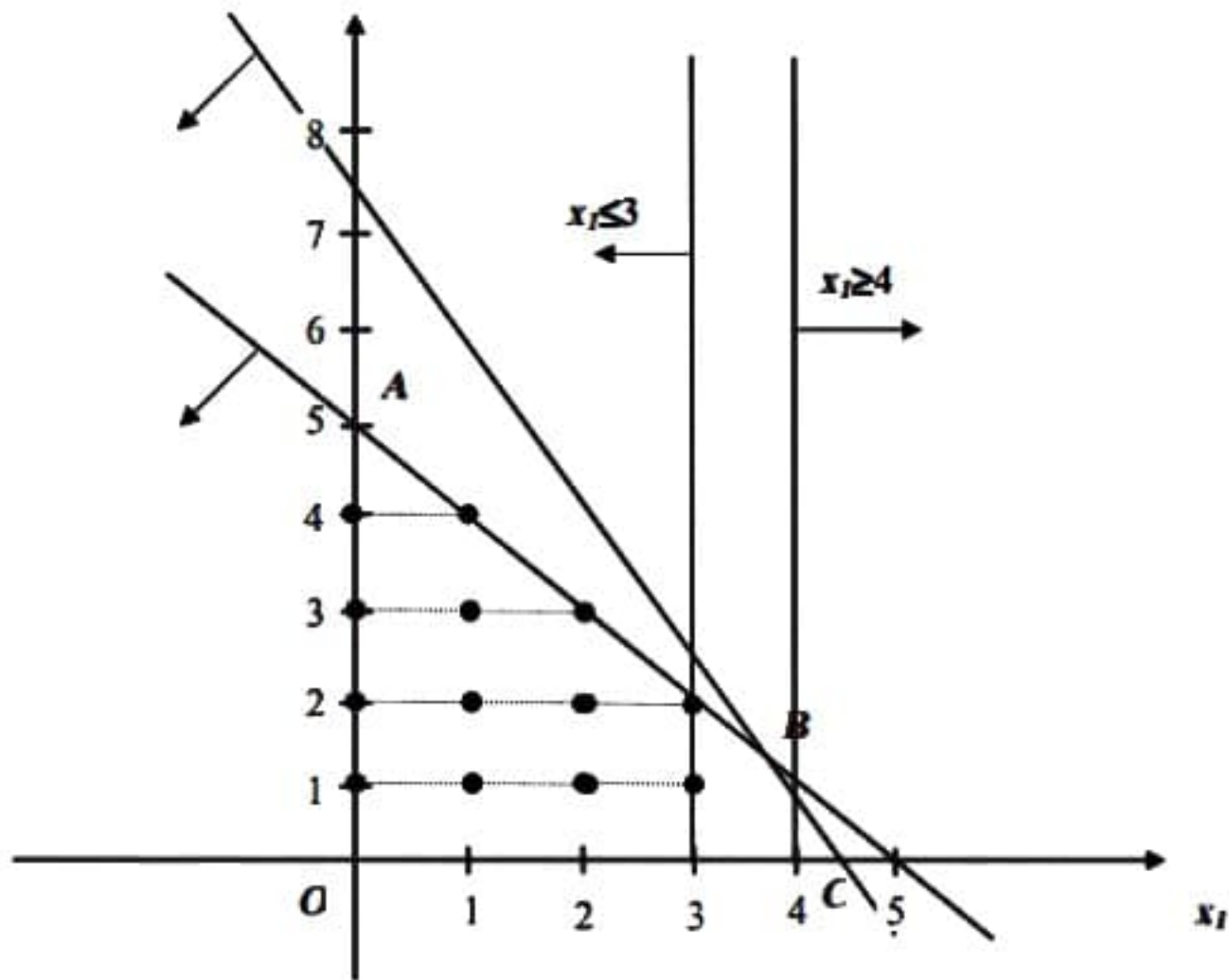
2. أسلوب التفريع والتحديد The Branch And Bound Approach

3. أسلوب الاختبارين The Two-Test Approach

الشكل رقم (2-5): التمثيل البياني للحل الأمثل للبرنامج (2-13)



من خلال التمثيل البياني يتضح أن منطقة الحلول تتمثل في المساحة المحددة بالنقاط (OABC) والحل الأمثل للبرنامج (2-13) يكون عند النقطة B و يقدر بـ: $x_1 = 15/4$ ، $x_2 = 5/4$ و $Z^* = 95/4$.



يتضح من خلال التمثيل البياني في الشكل (2-6)، أن الحل الأمثل العددي الصحيح يمكن أن يكون في نقطتين إما النقطة ذات الإحداثيات $(x_1=4$ و $x_2=0)$ أو النقطة ذات الإحداثيات $(x_1=3$ و $x_2=2)$.

ويمكن اعداد شجرة القرار في هذه الحالة على الشكل التالي:

