Linear programming methods

Lecture 1

المحاضرة (1)

1.Dual simplex method:

طريقة السمبلكس المقابلة (الثنائية)

The dual simplex method was first discovered by Lemke. The dual simplex method is based on the duality theory and is applicable to maximization as well as minimization problems. In this method, all the constraints are converted into constraints of type $\leq$ and slack variables are added to set up the problem in the standard form. The initial simplex table is constructed and if any b_j (right hand side) is negative and the optimality condition is satisfied, then the given problem can be solved by the dual simplex method.

تم اكتشاف طريقة السمبلكس المقابلة لأول مرة من قبل العالم Lemke. تعتمد طريقة السمبلكس المقابلة على النظرية المقابلة وهي قابلة للتطبيق على مسائل التعظيم والتصغير. في هذه الطريقة ، يتم تحويل جميع القيود إلى قيود من النوع $\leq$ ويتم إضافة المتغيرات المكملة لصياغة المسألة في الشكل القياسي. يتم إنشاء جدول السمبلكس الاولي ، وإذا كان هنالك اي قيمة من قيم b_j (الجانب الأيمن من القيد)سالباً وشروط الامثلية متحققة ، عندئذٍ يمكن حل المسألة المعطاه بطريقة السمبلكس المقابلة.

The rules for the dual simplex method are very similar to those for the simplex method. In fact, once the methods are started, the only difference between them is in the criteria used for selecting the entering and leaving basic variables and for stopping the algorithm.

تتشابه قواعد طريقة السمبلكس المقابلة إلى حد بعيد مع طريقة السمبلكس الاعتيادية. في الحقيقة ، بمجرد بدء الطرق ، يكون الاختلاف الوحيد بينهما في المعيار المستخدم لاختيار المتغيرات الأساسية الداخلة والخارجة وطريقة إيقاف الخوارزمية.

2.Applications of the dual simplex method:

تطبيقات طريقة السمبلكس المقابلة

There are various applications of the dual simplex method include:

1. Sensitivity analysis
2. Integer programming
3. Parametric programming
4. Some non-linear programming algorithms.
5. It eliminates the introduction of artificial variables in the linear programming. This is the advantage over the regular simplex method.

هناك العديد من التطبيقات على طريقة السمبلكس المقابلة والتي تشمل:

١. تحليل الحساسية

٢. برمجة الاعداد الصحيحة

٣. البرمجة المعلمية

٤. بعض خوارزميات البرمجة غير الخطية.

٥. يلغي إدخال المتغيرات الاصطناعية في البرمجة الخطية. وهذه هي الميزة على طريقة السمبلكس الاعتيادية.

3.Steps of dual simplex method:

خطوات طريقة السمبلكس المقابلة

1. Convert every constraint of type (≥) into constraint of type (≤) by multiplying both sides of constraint by (-1).
   تحويل كل قيد من النوع (≥) إلى قيد من النوع (≤) بضرب طرفي القيد في (-١).
2. Convert every inequality constraint into an equality constraint, so that the problem can be written in a standard form (by adding slack variables).

تحويل قيد المتباينة إلى قيد خطي، بحيث يمكن كتابة المسألة في الشكل القياسي (وذلك بإضافة المتغيرات المكملة).

3. Express the above information in the form of a table, called dual simplex table.

التعبير عن المعلومات أعلاه على شكل جدول ، يسمى جدول السمبلكس المقابل.

4. If all the values under (b_j) column (≥ 0), then don't apply dual simplex method because optimal solution can be easily obtained by the simplex method. On the contrary, if any value under (b_j) column (< 0), then the current solution is infeasible so go to next step.

إذا كانت جميع القيم الموجودة تحت العمود (b_j) اكبر او تساوي الصفر (اي جميع القيم موجبة)، فلا تطبق طريقة السمبلكس المقابلة لأنه يمكن الحصول على الحل الأمثل بسهولة بطريقة simplex. على العكس من ذلك ، إذا كانت هناك أي قيمة تحت العمود (b_j) اصغر من الصفر (اي يحتوي على قيم سالبة)، فإن الحل الحالي غير ممكن ، لذا انتقل إلى الخطوة التالية.

5. Determine the pivot row: select the most negative value under the (b_j) column. The row that indicates the most negative value is the pivot row.

تحديد الصف المحوري: نختار القيمة الأكثر سلبية أسفل العمود (bj) . الصف الذي يشير إلى أكثر قيمة سالبة (اي نختار اكبر قيمة باشارة سالبة) هو الصف المحوري.

6. Determine the pivot column: select the values of the non-basic variables in the index row $(Z - C_j)$, and divide these values by the corresponding values of the pivot row.

تحديد العمود المحوري: نختار قيم المتغيرات غير الأساسية في صف (Z-C_j) ونقسم هذه القيم على القيم المقابلة للصف المحوري.

7. If all basic variables have non-negative values, an optimal solution has been obtained. If there are basic variables having negative values, then go to step (4).

إذا كانت جميع المتغيرات الأساسية تحتوي على قيم غير سالبة (اي تكون موجبة او اصفار) ، فقد تم الحصول على الحل الأمثل. اما إذا كانت هناك متغيرات أساسية لها قيم سالبة ، فانتقل إلى الخطوة (٤).

Example (1):

مثال (١)

Solve the following linear programming problem by using dual simplex method.

حل مسألة البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة السمبلكس المقابلة (او الثنائية)

$\min z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$

$S.T.$

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 2$

$3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 3$

$x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 5$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Solution:

الحل

1.Convert every constraint of type (≥) into constraint of type (≤) by multiplying both sides of constraint by (-1).

نحول كل قيد من النوع (≥) إلى قيد من النوع (≤) بضرب طرفي القيد في (-١)

$\min z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$

$S.T.$

$-2x_1 - 3x_2 - 5x_3 \leq -2$

$3x_1 + x_2 + 7x_3 \leq 3$

$x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 5$

2. convert the problem into the standard form by adding slack variables

نحول المسألة إلى الصيغة القياسية من خلال إضافة المتغيرات المكملة

$\min z = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

$-2x_1 - 3x_2 - 5x_3 + S_1 = -2$

$3x_1 + x_2 + 7x_3 + S_2 = 3$

$x_1 + 4x_2 + 6x_3 + S_3 = 5$

$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

3. The above information is expressed in the following table:

التعبير عن المعلومات أعلاه في الجدول التالي

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_j
S_1	-2	-3	-5	1	0	0	-2
S_2	3	1	7	0	1	0	3
S_3	1	4	6	0	0	1	5
$Z-C_j$	-2	-2	-4	0	0	0	0

4.Since there is a negative value under (bj) column, then the solution is infeasible so go to next step.

نظرًا لوجود قيم سالبة تحت العمود (b_j) ، فإن الحل غير ممكن ، لذا ننتقل إلى الخطوة التالية.

5. Determine the pivot row: the pivot row is the row with the most negative value under the (bj) column, so (S_1= -2) is the leaving variable.

تحديد الصف المحوري: الصف المحوري هو الصف الذي يحتوي على أكثر قيمة سالبة تحت العمود (b_j) ، لذلك (S_1= -2) هو المتغير الخارج.

6. Determine the pivot column: find the ratios of elements of $(Z - C_j)$ row to the elements of pivot row.

تحديد العمود المحوري: يتم ذلك بايجاد نسب عناصر الصف ($Z-C_j$) الى عناصر الصف المحوري

Note: Ignore the ratios corresponding to positive or zero elements of pivot row

ملاحظة: اهمال النسب المقابلة للعناصر الموجبة أو الصفرية للصف المحوري

$$ratio = min\left(\left|\frac{(Z - C_j)}{S_1}\right|\right)$$

$$ratio = min\left(\left|\frac{-2}{-2}\right|, \left|\frac{-2}{-3}\right|, \left|\frac{-4}{-5}\right|\right)$$

Since $\frac{2}{3}$ is the smallest ratio, (x_2) column is the pivot column, so (x_2) is the entering variable and (-3) is the pivot element.

بما ان $\frac{2}{3}$ هي أصغر نسبة ، فإن العمود (x_2) هو العمود المحوري ، لذلك (x_2) هو المتغير الداخل و (-3) هو العنصر المحوري.

Entering variable

Leaving variable

Pivot row

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_j
S_1	-2	-3	-5	1	0	0	-2
S_2	3	1	7	0	1	0	3
S_3	1	4	6	0	0	1	5
$Z-C_j$	-2	-2	-4	0	0	0	0

Pivot column

7.Replace (S_1) by (x_2)

استبدال (S_1) بـ (x_2)

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_j
x_2	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	$\frac{2}{3}$
S_2	$\frac{7}{3}$	0	$\frac{16}{3}$	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{7}{3}$
S_3	$\frac{-5}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{4}{3}$	0	1	$\frac{7}{3}$
$Z-C_j$	$\frac{-2}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$	$\frac{-2}{3}$	0	0	$\frac{4}{3}$

Since all elements of $(Z - C_j)$ row are negative and zero and all values of (b_j) are positive, so the above table is optimal solution:

بما ان جميع عناصر الصف $(Z-C_j)$ سالبة و صفر وجميع قيم (b_j) موجبة ، فإن الجدول أعلاه هو الحل الأمثل:

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = 0, Z = \frac{4}{3}$$

Linear programming methods

Lecture 2

المحاضرة (2)

Example (2):

Solve the following linear programming problem by using dual simplex method.

حل مسألة البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة السمبلكس المقابلة (او الثنائية)

$\max z = -3x_1 - 2x_2 - x_3$

$S.T.$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4$

$3x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 10$

$-x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 1$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Solution:

1.Convert every constraint of type (≥) into constraint of type (≤) by multiplying both sides of constraint by (-1).

نحول كل قيد من النوع (≥) إلى قيد من النوع (≤) بضرب طرفي القيد في (-١)

$\max z = -3x_1 - 2x_2 - x_3$

$S.T.$

$-2x_1 - 3x_2 - x_3 \leq -4$

$-3x_1 - x_2 - 3x_3 \leq -10$

$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq -1$

2. convert the problem into the standard form by adding slack variables

نحول المسألة إلى الصيغة القياسية من خلال إضافة المتغيرات المكملة

$\max z = -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$

$$-2x_1 - 3x_2 - x_3 + S_1 = -4$$

$$-3x_1 - x_2 - 3x_3 + S_2 = -10$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + S_3 = -1$$

$$x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

3. The above information is expressed in the following table:

التعبير عن المعلومات أعلاه في الجدول التالي

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_j
S_1	-2	-1	-1	1	0	0	-4
S_2	-3	-1	-3	0	1	0	-10
S_3	1	-2	1	0	0	1	-1
$Z-C_j$	3	2	1	0	0	0	0

4.Since there is a negative values under (b_j) column, then the solution is infeasible so go to next step.

بما ان هنالك قيم سالبة تحت العمود (b_j) ، فإن الحل غير ممكن ، لذا ننتقل إلى الخطوة التالية.

5. Determine the pivot row: the pivot row is the row with the most negative value under the (bj) column, so (S_2= -10) is the leaving variable.

تحديد الصف المحوري: الصف المحوري هو الصف الذي يحتوي على أكثر قيمة سالبة تحت العمود (b_j) ، لذلك (S2 = -10) هو المتغير الخارج.

6. Determine the pivot column: find the ratios of elements of $(Z - C_j)$ row to the elements of pivot row.

تحديد العمود المحوري: يتم ذلك بايجاد نسب عناصر الصف ($Z-C_j$) الى عناصر الصف المحوري

$$ratio = min\left(\left|\frac{3}{-3}\right|, \left|\frac{2}{-1}\right|, \left|\frac{1}{-3}\right|\right)$$

Since $\frac{1}{3}$ is the smallest ratio, (x_3) column is the pivot column, so (x_3) is the entering variable and (-3) is the pivot element.

بما ان $\frac{1}{3}$ هي أصغر نسبة ، فإن العمود (x_3) هو العمود المحوري ، لذلك (x_3) هو المتغير الداخل و (-3) هو العنصر المحوري.

Entering variable

Leaving variable

Pivot row

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_j
S_1	-2	-1	-1	1	0	0	-4
S_2	-3	-1	-3	0	1	0	-10
S_3	1	-2	1	0	0	1	-1
$Z-C_j$	3	2	1	0	0	0	0

Pivot column

7.Replace (S_2) by (x_3)

استبدال (S_2) بـ (x_3)

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_j
S_1	-1	$\frac{-2}{3}$	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$
x_3	1	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{10}{3}$
S_3	0	$\frac{-7}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-13}{3}$
$Z-C_j$	2	$\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-10}{3}$

Since there is a negative values under (b_j) column, then the solution is infeasible .($S_3=\frac{-13}{3}$) is the leaving variable.

بما ان هنالك قيم سالبة تحت العمود (b_j) ، فإن الحل غير ممكن. (S3 = (-13) / 3) هو المتغير الخارج.

Determine the pivot column: find the ratios of elements of $(Z-C_j)$ row to the elements of pivot row.

تحديد العمود المحوري: يتم ذلك بايجاد نسب عناصر الصف ($Z-C_j$) الى عناصر الصف المحوري

$$ratio = min\left(\left|\frac{\frac{5}{3}}{\frac{-7}{3}}\right|\right)$$

(x_2) column is the pivot column, so (x_2) is the entering variable and $(\frac{-7}{3})$ is the pivot element.

العمود (x_2) هو العمود المحوري ، لذلك فان (x_2) هو المتغير الداخل و $\frac{-7}{3}$ هو العنصر المحوري.

Entering variable

Leaving variable

Pivot row

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_j
S_1	-1	$\frac{-2}{3}$	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{-2}{3}$
x_3	1	$\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{10}{3}$
S_3	0	$\frac{-7}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-13}{3}$
$Z\text{-}C_j$	2	$\frac{5}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-10}{3}$

Pivot column

Replace (S_3) by (x_2)

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_j
S_1	-1	0	0	1	$\frac{-3}{7}$	$\frac{-2}{7}$	$\frac{4}{7}$
x_3	1	0	1	0	$\frac{-2}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{19}{7}$
x_2	0	1	0	0	$\frac{-1}{7}$	$\frac{-3}{7}$	$\frac{13}{7}$
$Z\text{-}C_j$	2	0	0	0	$\frac{4}{7}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{-45}{7}$

Since all elements of $(Z - C_j)$ row are positive and zero and all values of (b_j) are positive, so the above table is optimal solution:

بما ان جميع عناصر الصف $(Z\text{-}C_j)$ موجبة و صفر وجميع قيم (b_j) موجبة ، فإن الجدول أعلاه هو الحل الأمثل:

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = \frac{13}{7}, x_3 = \frac{19}{7}, Z = \frac{-45}{7}$$

Linear programming methods

Lecture 3

3.Sensitivity analysis: تحليل الحساسية

In most practical problems, we are interested not only in optimal solution of the LP problem, but also in how the solution changes when the parameters of the problem change. The study of the effect of parameter changes on the optimal solution is called sensitivity analysis.

في معظم المسائل العملية ، لا نهتم فقط بالحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية ، ولكن أيضًا نهتم بكيفية تغيير الحل عندما تتغير معلمات المسألة. ان دراسة تأثير تغييرات المعلمات على الحل الأمثل يسمى بـ(تحليل الحساسية).

The changes in the parameters of a LP problem include:

1. Changes in the right-hand-side constants b_i
2. Changes in the cost coefficients of decision variables c_j
3. Changes in the coefficients of the constraints a_{ij}
4. Addition of new variables
5. Addition of new constraints

ان التغييرات في معلمات مسألة البرمجة الخطية تشمل ما يلي:

١. التغييرات في ثوابت الطرف الأيمن b_i

٢. التغيرات في معاملات التكلفة لمتغيرات القرار c_j

٣. التغييرات في معاملات القيود a_{ij}

٤. إضافة متغيرات جديدة

٥. إضافة قيود جديدة

In general, when a parameter is changed, it results in one of three cases:

1. The optimal solution remains unchanged; that is, the basic variables and their values remain unchanged.
2. The basic variables remain the same but their values are changed.
3. The basic variables as well as their values are changed.

بشكل عام ، عندما يتم تغيير المعلمة ، ينتج عنها واحدة من الثلاث حالات التالية:

١. الحل الأمثل يبقى دون تغيير. أي أن المتغيرات الأساسية وقيمها تبقى دون تغيير.

٢. تبقى المتغيرات الأساسية كما هي ولكن تتغير قيمها.

٣. يتم تغيير المتغيرات الأساسية وقيمها.

1. Changes in the right-hand-side constants b_i

is change the b_i to $b_i + \Delta b_i$ so that the new problem differs from the original only on the right-hand side. Our interest is to investigate the effect of changing b_i to $b_i + \Delta b_i$ on the original optimum.

هو تغيير bi إلى $b_i + \Delta b_i$ بحيث تختلف المشكلة الجديدة عن المشكلة الأصلية فقط في قيم الطرف الأيمن. اذ ينصب اهتمامنا على دراسة تأثير تغيير bi إلى $b_i + \Delta b_i$ على الحل الامثل الاصلي.

Example (1):

Consider the following linear programming problem

اعتبر لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية

$$\max z = 5x_1 + 12x_2 + 4x_3$$

$$S.T.$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 5$$

$$2x_1 - x_2 + 3x_3 = 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1.Discuss the effect of changing the requirement vector from $\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ to $\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$ on the optimal solution.

ناقش تأثير تغيير متجه المتطلبات من $\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ الى $\begin{bmatrix}7\\2\end{bmatrix}$ على الحل الامثل.

2. Discuss the effect of changing the requirement vector from $\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ to $\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}$ on the optimal solution.

ناقش تأثير تغيير متجه المتطلبات من $\begin{bmatrix}5\\2\end{bmatrix}$ الى $\begin{bmatrix}3\\9\end{bmatrix}$ على الحل الامثل.

Where the optimal table for this problem is:

حيث ان جدول الحل الأمثل لهذه المسألة هو:

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	b_j
x_2	0	1	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{8}{5}$
x_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{9}{5}$
Z-C_j	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$\frac{-2}{5}+M$	$\frac{141}{5}$

Solution:

1. $\bar{b} = B^{-1}b$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{11}{5} \end{bmatrix}$$

Since both x_1 and x_2 are non-negative, the current basic solution remains optimal but at the new values $x_1 = \frac{11}{5}, x_2 = \frac{12}{5}$ $and\ x_3 = 0,\ Z = \frac{199}{5}$

بما ان كلا x_1 و x_2 غير سالبين، لذا فان الحل الاساسي الحالي يبقى هو الحل الامثل ولكن عند القيم الجديدة التالية للمتغيرات ودالة الهدف $x_1 = \frac{11}{5}, x_2 = \frac{12}{5}$ $and\ x_3 = 0,\ Z = \frac{199}{5}$

2. $\bar{b} = B^{-1}b$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{5} \\ \frac{21}{5} \end{bmatrix}$$

Since x_2 becomes negative , the current optimal solution becomes infeasible, so we use dual simplex method to find the optimal solution

بما ان x_2اصبح سالباً ، فان الحل الأمثل الحالي اصبح غير ممكن ، لذلك نستخدم طريقة السمبلكس المقابلة لايجاد الحل الأمثل

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	b_j
x_2	0	1	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-3}{5}$
x_1	1	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{21}{5}$
Z-C_j	0	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{29}{5}$	$\frac{-2}{5}+M$	$\frac{69}{5}$

$x_2 = \frac{-3}{5}$ is the leaving variable

x_2 متغير خارج

(x_3) is the entering variable and $\left(\frac{-1}{5}\right)$ is the pivot element.

x_3 متغير داخل و $\left(\frac{-1}{5}\right)$ هو العنصر المحوري

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	R_1	b_j
x_3	0	-5	1	-2	1	3
x_1	1	7	0	3	-1	0
Z-C_j	0	3	0	7	$-1+M$	12

The optimal solution is: $x_1 = 0\,, x_2 = 0 \;\; and \; x_3 = 3, \;\; Z = 12$

Example (2):

Consider the following linear programming problem

اعتبر لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية

$\max z = 20x_1 + 25x_2$

$S.T.$

$2x_1 + 3x_2 \leq 40$

$x_1 + 2x_2 \leq 20$

$3x_1 + x_2 \leq 30$

$x_1, x_2 \geq 0$

the optimal table for this problem is:

جدول الحل الأمثل لهذه المسألة هو:

B.V	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b_j
S_1	0	0	1	$\frac{-7}{5}$	$\frac{-1}{5}$	6
x_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	6
x_1	1	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	8
$Z-C_j$	0	0	0	11	3	310

1.Change the coefficient $b_1$to 35.

تغيير المعامل b_1 الى 35

2.Change the right hand side coefficients $b = \begin{bmatrix} 40 \\ 25 \\ 35 \end{bmatrix}$

تغيير معاملات الطرف الايمن $b = \begin{bmatrix} 40 \\ 25 \\ 35 \end{bmatrix}$

Solution:

1. $\bar{b} = B^{-1}b$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-7}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 35 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Since S_1 , $x_2$and x_1 are non-negative and the values of the basic variables remains unchanged, the current basic solution remains optimal at the values $x_1 = 8 , x_2 = 6 \ and \ , \ Z = 310$

بما ان S_1 x_1 و x_2 غير سالبة وقيم المتغيرات الاساسية بقت كما هي في جدول الحل الامثل دون تغيير، لذا فان الحل الاساسي الحالي يبقى هو الحل الامثل ولكن عند القيم

$x_1 = 8 , x_2 = 6 \ and \ , \qquad Z = 3110$

2. $\bar{b} = B^{-1}b$

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-7}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 40 \\ 25 \\ 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Since S_1 becomes negative , the current optimal solution becomes infeasible, so we use dual simplex method to find the optimal solution

بما ان S_1اصبح سالباً ، فان الحل الأمثل الحالي اصبح غير ممكن ، لذلك نستخدم طريقة السمبلكس المقابلة لايجاد الحل الأمثل

B.V	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b_j
S_1	0	0	1	$\frac{-7}{5}$	$\frac{-1}{5}$	-2
x_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	8
x_1	1	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	9
$Z-C_j$	0	0	0	11	3	310

S_1 is the leaving variable

S_2 is the entering variable

B.V	x_1	x_2	S_1	S_2	S_3	b_j
S_2	0	0	$\frac{-5}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{10}{7}$
x_2	0	1	$\frac{3}{7}$	0	$\frac{-2}{7}$	$\frac{50}{7}$
x_1	1	0	$\frac{-1}{7}$	0	$\frac{3}{7}$	$\frac{65}{7}$
$Z-C_j$	0	0	$\frac{55}{7}$	0	$\frac{10}{7}$	$\frac{2550}{7}$

The optimal solution is: $x_1 = \frac{65}{7}$, $x_2 = \frac{50}{7}$ and , $Z = \frac{2550}{7}$

Linear programming methods

Lecture 4

2.Changes in the cost coefficients of decision variables c_j

is to find the effect of changing the cost coefficients from c_j to $c_j + \Delta cj$ on the optimal solution.

هو إيجاد تأثير تغيير معاملات الكلفة من c_j إلى $c_j + \Delta c_j$ على الحل الأمثل.

Example:

Consider the following linear programming problem

اعتبر لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية

$\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4$

$S.T.$

$2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 150$

$3x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 \leq 120$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

the optimal table for this problem is:

جدول الحل الأمثل لهذه المسألة هو:

B.V	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	b_j
S_1	-1	-3	0	-1	1	-1	30
x_3	$\frac{3}{2}$	2	1	2	0	$\frac{1}{2}$	60
$Z\text{-}C_j$	$\frac{7}{2}$	4	0	4	0	$\frac{3}{2}$	180

1.Change the coefficient x_2 in objective function to 7.

تغيير معامل x_2 في دالة الهدف الى 7

2. Change the coefficient x_3 in objective function to 2.

تغيير معامل x_3 في دالة الهدف الى 2

Solution:

1.

x_2 متغير غير اساسي ولمعرفة تأثير تغيير معامل x_2 في دالة الهدف نحسب صف الارباح النسبية لـ x_2 فقط

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
B.V	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	b_j
S_1	-1	-3	0	-1	1	-1	30
x_3	$\frac{3}{2}$	2	1	2	0	$\frac{1}{2}$	60
$Z-C_j$	$\frac{7}{2}$	4	0	4	0	$\frac{3}{2}$	180

$$\overline{C_2} = C_2 - C_B \ \overline{P_2}$$

قيم عمود المتغير C_2 في جدول السمبلكس الاخير

قيمة معامل المتغير C_2 في دالة الهدف

قيم معاملات المتغيرات الاساسية في دالة الهدف حسب جدول السمبلكس الاخير

$$\overline{C_2} = 7 - (0 \quad -3)\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C_2} = -7 + 6 = -1$$

Since $\overline{C_2}$ negative and the objective function is max , so the current solution not optimal solution.

بما أن $\overline{C_2}$ سالب ودالة الهدف هي max ، فإن الحل الحالي ليس هو الحل الأمثل لذا نستخدم طريقة السمبلكس الاعتيادية لإيجاد الحل الامثل

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
B.V	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	b_j
S_1	-1	-3	0	-1	1	-1	30
x_3	$\frac{3}{2}$	2	1	2	0	$\frac{1}{2}$	60
$Z-C_j$	$\frac{7}{2}$	-1	0	4	0	$\frac{3}{2}$	180

x_2 is the entering variable

x_3 is the leaving variable

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
B.V	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	b_j
S_1	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{3}{2}$	2	1	$\frac{-1}{4}$	120
x_2	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	30
$Z\text{-}C_j$	$\frac{17}{4}$	0	$\frac{1}{2}$	5	0	$\frac{7}{4}$	210

Since all values of $Z\text{-}C_j$ positive and zero, so the optimal solution is:

$x_1 = x_3 = x_4 = 0 , x_2 = 30 \; and \; , Z = 210$

2.

x_3 متغير اساسي ولمعرفة ان تغيير معامل x_3 في دالة الهدف له تأثير نحسب صف الارباح النسبية للمعاملات غير الاساسية.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
B.V	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	b_j
S_1	-1	-3	0	-1	1	-1	30
x_3	$\frac{3}{2}$	2	1	2	0	$\frac{1}{2}$	60
$Z\text{-}C_j$	$\frac{7}{2}$	4	0	4	0	$\frac{3}{2}$	180

قيمة x_3 و S_1 في صف الارباح النسبية

$\overline{C_3} = \overline{C_5} = 0 \longleftarrow$ تساوي صفر لانهما متغيرات اساسية

$\overline{C_1} = C_1 - C_B \; \overline{P_1}$

$$\overline{C_1} = -1 - (0 \quad -2)\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = 2$$

$$\overline{C_2} = C_2 - C_B\ \overline{P_2}$$

$$\overline{C_2} = -2 - (0 \quad -2)\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$\overline{C_4} = C_4 - C_B\ \overline{P_4}$$

$$\overline{C_4} = -2 - (0 \quad -2)\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = 2$$

$$\overline{C_6} = C_6 - C_B\ \overline{P_6}$$

$$\overline{C_6} = 0 - (0 \quad -2)\begin{bmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = 1$$

Since all values of Z-C_j are non-negative , then the current solution remains optimal but at the new values $x_1 = x_2 = x_4 = 0\ and\ x_3 = 60,\ Z = 120$

بما ان جميع قيم صف الارباح غير سالبة، فان الحل الحالي يبقى حل امثل ولكن عند القيمة الجديدة التالية لدالة الهدف $x_1 = x_2 = x_4 = 0\ and\ x_3 = 60,\ Z = 120$

3. Changes in the coefficients of the constraints a_{ij}

is to investigate the effect of changing the coefficients of the constraints a_{ij} to $a_{ij} + \Delta a_{ij}$ on the optimal solution.

هو البحث في تأثير تغيير معاملات القيود a_{ij} إلى $a_{ij} + \Delta a_{ij}$ على الحل الأمثل.

ملاحظة:

ان التغيير في معاملات متغيرات القيود يشمل حالتين:

الحالة الاولى: هو التغيير في معاملات المتغيرات الاساسية وفي هذه الحالة فانه من الصعب معرفة اثر هذه التغيرات على الحل الامثل ويفضل في مثل هذه الحالة اعادة حل النموذج الرياضي.

الحالة الثانية: يشمل التغيير في المتغيرات غير الاساسية وفي هذه الحالة فانه من الممكن حساب اثر هذا التغيير باختبار أمثلية الحل بعد تغيير معاملات هذه المتغيرات وايجاد الحل الامثل.

Example:

Consider the following linear programming problem

اعتبر لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية

$\max z = 45x_1 + 100x_2 + 30x_3 + 50x_4$

$S.T.$

$7x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 9x_4 \leq 1200$

$3x_1 + 40x_2 + x_3 + x_4 \leq 800$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

the optimal table for this problem is:

جدول الحل الأمثل لهذه المسألة هو:

B.V	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	b_j
x_3	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{-1}{15}$	$\frac{800}{3}$
x_2	$\frac{1}{30}$	1	0	$\frac{-1}{30}$	$\frac{-1}{150}$	$\frac{2}{75}$	$\frac{40}{3}$
$Z\text{-}C_j$	$\frac{25}{3}$	0	0	$\frac{50}{3}$	$\frac{22}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{28000}{3}$

Find the effect of the following changes in the original optimal table:

جد تأثير التغييرات التالية في جدول الحل الأمثل الأصلي:

1.Change the coefficients x_1 in the constraints from $\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}$ to $\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}$.

تغيير معاملات x_1 في القيود من $\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}$ الى $\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}$

2. Change the coefficients x_1 in the constraints from $\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}$ to $\begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix}$.

تغيير معاملات x_1 في القيود من $\begin{bmatrix}7\\3\end{bmatrix}$ الى $\begin{bmatrix}5\\8\end{bmatrix}$

Solution:

1.

x_1 متغير غير اساسي ولمعرفة تأثير تغيير معاملات x_1 في القيود نحسب صف الارباح النسبية لـ x_1 فقط

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
B.V	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	b_j
x_3	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{-1}{15}$	$\frac{800}{3}$
x_2	$\frac{1}{30}$	1	0	$\frac{-1}{30}$	$\frac{-1}{150}$	$\frac{2}{75}$	$\frac{40}{3}$
$Z-C_j$	$\frac{25}{3}$	0	0	$\frac{50}{3}$	$\frac{22}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{28000}{3}$

$$\overline{C_1} = C_1 - C_B\, B^{-1}\, P_1$$

قيم معاملات المتغير x_1 الجديدة

قيمة معامل المتغير C_1 في دالة الهدف

قيم معاملات المتغيرات الاساسية في دالة الهدف حسب جدول السمبلكس الاخير

$$\overline{C_1} = -45 - \left[(-30 \quad -100) \begin{bmatrix} \frac{4}{15} & \frac{-1}{15} \\ \frac{-1}{150} & \frac{2}{75} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \right]$$

$$\overline{C_1} = -45 - \left[\left(\frac{-22}{3} \quad \frac{-2}{3} \right) \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \right]$$

$$\overline{C_1} = -45 + \frac{164}{3} = \frac{29}{3}$$

Since $\overline{C_1}$ is non-negative , then the current solution remains optimal.

2. $\overline{C_1} = C_1 - C_B\, B^{-1}\, P_1$

$$\overline{C_1} = -45 - \left[(-30 \quad -100) \begin{bmatrix} \frac{4}{15} & \frac{-1}{15} \\ \frac{-1}{150} & \frac{2}{75} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} \right]$$

$$\overline{C_1} = -45 - \left[\begin{pmatrix} \frac{-22}{3} & \frac{-2}{3} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix}\right]$$

$$\overline{C_1} = -45 + \frac{126}{3} = -3$$

Since $\overline{C_1}$ negative and the objective function is max , so the current solution not optimal solution.

بما أن $\overline{C_2}$ سالب ودالة الهدف هي max ، فإن الحل الحالي ليس هو الحل الأمثل لذا نستخدم طريقة السمبلكس الاعتيادية لإيجاد الحل الامثل

$$\overline{P_1} = B^{-1}P_1$$

$$\overline{P_1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{15} & \frac{-1}{15} \\ \frac{-1}{150} & \frac{2}{75} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{27}{150} \end{bmatrix}$$

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
B.V	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	b_j
x_3	$\frac{4}{5}$	0	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{-1}{15}$	$\frac{800}{3}$
x_2	$\frac{27}{150}$	1	0	$\frac{-1}{30}$	$\frac{-1}{150}$	$\frac{2}{75}$	$\frac{40}{3}$
$Z-C_j$	-3	0	0	$\frac{50}{3}$	$\frac{22}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{28000}{3}$

x_1 is the entering variable

x_2 is the leaving variable

B.V	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	b_j
x_3	0	$\frac{40}{9}$	1	$\frac{67}{27}$	$\frac{8}{27}$	$\frac{-5}{27}$	$\frac{5600}{27}$
x_1	1	$\frac{50}{9}$	0	$\frac{-5}{27}$	$\frac{-1}{27}$	$\frac{4}{27}$	$\frac{2000}{27}$
$Z-C_j$	0	$\frac{50}{3}$	0	$\frac{145}{9}$	$\frac{65}{9}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{86000}{9}$

The optimal solution is :

$$x_1 = \frac{2000}{27}, x_2 = x_4 = 0 \ and \ x_3 = \frac{5600}{27}, \qquad Z = \frac{86000}{9}$$

Linear programming methods

Lecture 5

4. Addition of new variables

Example (1) :

Consider the following linear programming problem

اعتبر لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية

$\max z = 45x_1 + 100x_2 + 30x_3 + 50x_4$

$S.T.$

$7x_1 + 10x_2 + 4x_3 + 9x_4 \leq 1200$

$3x_1 + 40x_2 + x_3 + x_4 \leq 800$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

The optimal table for this problem is:

ان جدول الحل الأمثل لهذه المسألة هو:

B.V	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	b_j
x_3	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{-1}{15}$	$\frac{800}{3}$
x_2	$\frac{1}{30}$	1	0	$\frac{-1}{30}$	$\frac{-1}{150}$	$\frac{2}{75}$	$\frac{40}{3}$
$Z\text{-}C_j$	$\frac{25}{3}$	0	0	$\frac{50}{3}$	$\frac{22}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{28000}{3}$

If a new variable x_5 is added to this problem with a column $\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}$ and $C_5 = 120$, find the change in optimal solution.

إذا تمت إضافة متغير جديد x_5 إلى هذه المشكلة بعمود $\begin{bmatrix}10\\10\end{bmatrix}$ و $C_5 = 120$، فأوجد التغيير في الحل الأمثل.

Solution:

لمعرفة تأثير اضافة متغير جديد x_5 الى المسألة نجد صف الارباح النسبية لهذا المتغير .

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	
B.V	x_1	x_2	x_3	x_4	S_1	S_2	b_j
x_3	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{7}{3}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{-1}{15}$	$\frac{800}{3}$
x_2	$\frac{1}{30}$	1	0	$\frac{-1}{30}$	$\frac{-1}{150}$	$\frac{2}{75}$	$\frac{40}{3}$
$Z-C_j$	$\frac{25}{3}$	0	0	$\frac{50}{3}$	$\frac{22}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{28000}{3}$

1. $\overline{C_5} = C_5 - C_B B^{-1} P_5$

$$\overline{C_5} = -120 - \left[[-30 \quad -100] \begin{bmatrix} \frac{4}{15} & \frac{-1}{15} \\ \frac{-1}{150} & \frac{2}{75} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \right]$$

$$\overline{C_5} = -120 - \left[\left[\frac{-22}{3} \quad \frac{-2}{3} \right] \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \right] = -40$$

Since $\overline{C_5}$ negative and the objective function is max , so the current solution not optimal .

بما ان قيمة $\overline{C_5}$ سالبة، ودالة الهدف max، لذا فان الحل الحالي ليس هو الحل الامثل ونستخدم طريقة السمبلكس الاعتيادية لايجاد الحل الامثل.

$$\overline{P_5} = B^{-1} P_5$$

$$\overline{P_5} = \begin{bmatrix} \frac{4}{15} & \frac{-1}{15} \\ \frac{-1}{150} & \frac{2}{75} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

B.V	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	S_2	b_j
x_3	$\frac{5}{3}$	0	1	$\frac{7}{3}$	2	$\frac{4}{15}$	$\frac{-1}{15}$	$\frac{800}{3}$
x_2	$\frac{1}{30}$	1	0	$\frac{-1}{30}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{-1}{150}$	$\frac{2}{75}$	$\frac{40}{3}$
$Z-C_j$	$\frac{25}{3}$	0	0	$\frac{50}{3}$	-40	$\frac{22}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{28000}{3}$

x_5 is the entering variable
x_2 is the leaving variable

B.V	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	S_1	S_2	b_j
x_3	$\frac{4}{3}$	-10	1	$\frac{8}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	$\frac{400}{3}$
x_5	$\frac{1}{6}$	5	0	$\frac{-1}{6}$	1	$\frac{-1}{30}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{200}{3}$
$Z-C_j$	15	200	0	10	0	6	6	12000

The optimal solution is :

$$x_1 = x_2 = x_4 = 0\,, x_3 = \frac{400}{3}, x_5 = \frac{200}{3}, \qquad Z = 12000$$

Example (2) :

Consider the following linear programming problem

اعتبر لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية

$\max z = 4x_1 + 6x_2 + 2x_3$

$S.T.$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 3$

$x_1 + 4x_2 + 7x_3 \leq 9$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

The optimal table for this problem is:

ان جدول الحل الأمثل لهذه المسألة هو:

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	b_j
x_1	1	0	-1	$\frac{4}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1
x_2	0	1	2	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
$Z-C_j$	0	0	6	$\frac{10}{3}$	$\frac{2}{3}$	16

If a new variable x_4 is added to this problem with a column $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ and $C_4 = 3$, find the change in optimal solution.

إذا تمت إضافة متغير جديد x_4 إلى هذه المشكلة بعمود $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ و $C_4 = 3$، فأوجد التغيير في الحل الأمثل.

Solution:

لمعرفة تأثير اضافة متغير جديد x_4 الى المسألة نجد صف الارباح النسبية لهذا المتغير .

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	
B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	b_j
x_1	1	0	-1	$\frac{4}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1
x_2	0	1	2	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	2
$Z\text{-}C_j$	0	0	6	$\frac{10}{3}$	$\frac{2}{3}$	16

1. $\overline{C_4} = C_4 - C_B B^{-1} P_4$

$$\overline{C_4} = -3 - \left[[-4 \quad -6] \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \right]$$

$$\overline{C_4} = -3 - \left[\begin{bmatrix} \frac{-10}{3} & \frac{-2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \right]$$

$$\overline{C_4} = -3 + 4 = 1$$

Since $\overline{C_4}$ non-negative and the objective function is max , so the current solution remains optimal.

بما ان قيمة $\overline{C_4}$ غير سالبة، ودالة الهدف max، لذا فان الحل الحالي يبقى هو الحل الامثل.

5. Addition of a new constraints

Addition of a new constraint may or may not affect the feasibility of the current optimal solution. For this, must be check whether new constraint is satisfied by the current optimal solution or not. If it is satisfied, the inclusion of the constraint has no effect on the current optimal solution i.e., it remains feasible as well as optimal. And if the constraint is not satisfied, the current optimal solution becomes infeasible. Dual simplex method is then used to find the new optimal solution.

ان إضافة قيد جديد قد يؤثر أو لا يؤثر على امكانية الحل الأمثل الحالي. لهذا يجب التحقق مما إذا كان القيد الجديد يحقق الحل الأمثل الحالي أم لا. فإذا تحقق القيد ، فلن يكون لإدراج القيد أي تأثير على الحل الأمثل الحالي ، أي أنه يبقى ممكنًا وكذلك الأمثل. وإذا لم يتحقق القيد ، يصبح الحل الأمثل الحالي غير ممكن. ثم يتم استخدام طريقة السمبلكس الثنائية لإيجاد الحل الأمثل الجديد.

Example:

Consider the following linear programming problem

اعتبر لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية

$$\max z = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3$$

$$S.T.$$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20$$

$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 45$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

The optimal table for this problem is:

ان جدول الحل الأمثل لهذه المسألة هو:

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	b_j
x_1	1	4	0	3	-1	15
x_3	0	-2	1	-2	1	5
$Z-C_j$	0	3	0	2	1	85

Find the effect of the following changes in the original optimal table:

جد تأثير التغييرات التالية في جدول الحل الأمثل الأصلي:

1. If a new constraint $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50$ is added to the problem, will there be any change in optimal solution.

إذا تم إضافة قيد جديد $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50$ إلى المسألة ، فهل سيكون هناك أي تغيير في الحل الأمثل.

2. If a new constraint $4x_1 + 7x_2 + x_3 \leq 75$ is added to the problem, will there be any change in optimal solution.

إذا تم إضافة قيد جديد $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50$ إلى المسألة ، فهل سيكون هناك أي تغيير في الحل الأمثل.

Solution:

1.

لمعرفة تأثير اضافة قيد جديد الى المسألة نختبر القيد فيما اذا كان يحقق الحل الامثل ام لا.

$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50$

$3(15) + 0 + 2(5) \leq 50$

$45 + 10 \leq 50$

$55 \leq 50$

The new additional constraint $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50$ is not satisfied the current optimal solution. In order to find the new optimal solution, we add the new constraint to simplex table.

ان القيد الإضافي الجديد $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50$ لا يحقق الحل الأمثل الحالي. من أجل إيجاد الحل الأمثل الجديد ، نضيف القيد الجديد إلى جدول السمبلكس.

$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 50$

$3x_1 + x_2 + 2x_3 + S_3 = 50$

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_j
x_1	1	4	0	3	-1	0	15
x_3	0	-2	1	-2	1	0	5
S_3	3	1	2	0	0	1	50
$Z-C_j$	0	3	0	2	1	1	85

Since x_1 and x_3 are in the basic solution, their corresponding coefficients in the basic constraint must be zero. To eliminate the coefficients of x_1 and x_3, we multiply the first row by -2, the second row by -3 and add them to the third row.

بما ان x_1 و x_3 موجودان في الحل الأساسي ، لذا يجب أن تكون معاملاتهما المقابلة في القيد الأساسي الثالث صفرًا. وللتخلص من معاملات x_1 و x_3 في الصف الثالث (القيد الاضافي الجديد)، نضرب الصف الأول في -٢، والصف الثاني في -٣ ونضيفهم إلى الصف الثالث.

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_j
x_1	1	4	0	3	-1	0	15
x_3	0	-2	1	-2	1	0	5
S_3	0	-7	0	-5	1	1	-5
$Z-C_j$	0	3	0	2	1	1	85

S_3 is the leaving variable

S_1 is the entering variable

B.V	x_1	x_2	x_3	S_1	S_2	S_3	b_j
x_1	1	$\frac{-1}{5}$	0	0	$\frac{-2}{5}$	$\frac{3}{5}$	12
x_3	0	$\frac{4}{5}$	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-2}{5}$	7
S_1	0	$\frac{7}{5}$	0	1	$\frac{-1}{5}$	$\frac{-1}{5}$	1
$Z-C_j$	0	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{2}{5}$	83

The optimal solution is :

$$x_1 = 12, x_2 = 0\,, x_3 = 7,\ \ Z = 83$$

2.

لمعرفة تأثير اضافة قيد جديد الى المسألة نختبر القيد فيما اذا كان يحقق الحل الامثل ام لا.

$4x_1 + 7x_2 + x_3 \leq 75$

$4(15) + 7(0) + 5 \leq 75$

$60 + 0 + 5 \leq 75$

$65 \leq 75$

Since the new additional constraint $4x_1 + 7x_2 + x_3 \leq 75$ is satisfied the current optimal solution, the solution remains feasible and optimal.

بما ان القيد الإضافي الجديد $4x_1 + 7x_2 + x_3 \leq 75$ يحقق الحل الأمثل الحالي ، لذا يبقى الحل ممكنًا ومثاليًا.

Linear programming methods

Lecture 6

3. Revised simplex method

طريقة السمبلكس المعدلة

If a linear programming problem involving a large number of variables and constraints is to be solved by this method. In revised simplex method, it is not necessary to calculate the entire table in each iteration. The only information needed in moving from one table to the next is:

1. The (C_j-Z_j) row to determine the non-basic variable that enters the basic.

2. The pivot column

3. The current basic variables and their values (right-hand side constants) to determine the minimum ratio and thereby to determine the basic variable that leaves the basis.

إذا كانت مسألة البرمجة الخطية التي تتضمن عدد كبير من المتغيرات والقيود سيتم حلها باستخدام هذه الطريقة. في طريقة السمبلكس المعدلة ، ليس من الضروري حساب الجدول بأكمله في كل تكرار. والمعلومات الوحيدة المطلوبة للانتقال من جدول إلى آخر هي:

١.صف الارباح النسبية (C_j-Z_j) لتحديد المتغير غير الأساسي الذي يدخل ليصبح متغير أساسي.

٢. العمود المحوري

٣.ا لمتغيرات الأساسية الحالية وقيمها (ثوابت الجانب الأيمن) لتحديد أدنى نسبة وبالتالي تحديد المتغير الأساسي الذي يترك الأساس.

Example (1) :

Use revised simplex method to solve the following linear programming problem

استخدم طريقة السمبلكس المعدلة لحل مسألة البرمجة الخطية التالية

$\max z = 20x_1 + 25x_2$

$S.T.$

$2x_1 + 3x_2 \leq 40$

$x_1 + 2x_2 \leq 20$

$3x_1 + x_2 \leq 30$

$x_1, x_2 \geq 0$

Solution:

Let the column vectors $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4\ , P_5\ and\ b$ denote the column vectors corresponding $x_1,\ x_2,\ S_1,\ S_2\ ,\ S_3$ and the right-hand side constants respectively . Then

افرض لدينا المتجهات العمودية $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4\ , P_5\ and\ b$ تشير إلى المتجهات العمودية المقابلة لـ $x_1,\ x_2,\ S_1,\ S_2\ ,\ S_3$ ثوابت الجانب الأيمن على التوالي. فأن

$$P_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ P_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},\ P_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ P_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\qquad b = \begin{bmatrix} 40 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix}$$

$$B = [P_3 \quad P_4 \quad P_5]$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I},\qquad B^{-1} = \mathbf{I} = identity\ \ matrix$$

B.V	B^{-1}			b_j
S_1	1	0	0	40
S_2	0	1	0	20
S_3	0	0	1	30

نختبر الحل هل هو حل امثل وذلك من خلال ايجاد قيم صف الارباح النسبية للمتغيرات الغير اساسية

$$\pi = C_B B^{-1}$$

$$\pi = [0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\overline{C_1} = C_1 - \pi P_1$$

$$\overline{C_1} = -20 - [0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = -20$$

$$\overline{C_2} = C_2 - \pi P_2$$

$$\overline{C_2} = -25 - [0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} = -25$$

Since all $\overline{C_j}$ are negative, the current solution is not optimal. (x_2) is variable that enters the basis

Iteration (1)

نجد العمود المحوري $\overline{P_2}$

$$\overline{P_2} = B^{-1}P_2$$

$$\overline{P_2} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$$

Pivot column

B.V	B^{-1}			b_j	$\overline{P_2}$	ratio	Min ratio
S_1	1	0	0	40	3	$\frac{40}{3}$	
S_2	0	1	0	20	2	$\frac{20}{2}$	$\frac{20}{2}$ ← Pivot row
S_3	0	0	1	30	1	$\frac{30}{1}$	

S_2 is the leaving variable

B.V	B^{-1}			b_j	$\overline{P_2}$
S_1	1	$\frac{-3}{2}$	0	10	0
X_2	0	$\frac{1}{2}$	0	10	1
S_3	0	$\frac{-1}{2}$	1	20	0

نختبر الحل هل هو حل امثل وذلك من خلال ايجاد قيم صف الارباح النسبية للمتغيرات الغير اساسية

$$\pi = C_B B^{-1}$$

$$\pi = [0 \quad -25 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{25}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C_1} = C_1 - \pi P_1$$

$$\overline{C_1} = -20 - \begin{bmatrix} 0 & \frac{25}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{-15}{2}$$

$$\overline{C_4} = C_4 - \pi P_4$$

$$\overline{C_4} = 0 - \begin{bmatrix} 0 & \frac{25}{2} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{25}{2}$$

Since $\overline{C_1}$ is negative, the current solution is not optimal. (x_1) is variable that enters the basis

Iteration (2)

نجد العمود المحوري $\overline{P_1}$

$$\overline{P_1} = B^{-1}P_1$$

$$\overline{P_1} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}$$

Pivot column

B.V	B^{-1}			b_j	$\bar{P}_1$	ratio	Min ratio
S_1	1	$\frac{-3}{2}$	0	10	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{1/2}$	
X_2	0	$\frac{1}{2}$	0	10	$\frac{1}{2}$	$\frac{10}{1/2}$	
S_3	0	$\frac{-1}{2}$	1	20	$\frac{5}{2}$	$\frac{20}{5/2}$	8

Pivot row

S_3 is the leaving variable

B.V	B^{-1}			b_j	$\bar{P}_1$
S_1	1	$\frac{-7}{5}$	$\frac{-1}{5}$	6	0
x_2	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	6	0
x_1	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	8	1

نختبر الحل هل هو حل امثل وذلك من خلال ايجاد قيم صف الارباح النسبية للمتغيرات الغير اساسية

$$\pi = C_B B^{-1}$$

$$\pi = [0 \quad -25 \quad -20]\begin{bmatrix} 1 & \frac{-7}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & \frac{3}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = [0 \quad -11 \quad -3]$$

$$\overline{C_4} = C_4 - \pi P_4$$

$$\overline{C_4} = 0 - [0 \quad -11 \quad -3]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 11$$

$$\overline{C_5} = C_5 - \pi P_5$$

$$\overline{C_5} = 0 - \begin{bmatrix} 0 & -11 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3$$

Since all $\overline{C_j}$ are non-negative, the current solution is optimal.

$$x_1 = 8, \qquad x_2 = 6, \quad Z = 310$$

Linear programming methods

Lecture 7

Example (2) :

Use revised simplex method to solve the following linear programming problem

استخدم طريقة السمبلكس المعدلة لحل مسألة البرمجة الخطية التالية

$\min z = -3x_1 + 5x_2 - 2x_3$

$S.T.$

$x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 20$

$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 30$

$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 40$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Solution:

Let the column vectors $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4\ , P_5\ , P_6\ and\ b$ denote the column vectors corresponding $x_1,\ x_2\ ,\ x_3,\ S_1,\ S_2\ ,\ S_3$ and the right-hand side constants respectively . Then

افرض لدينا المتجهات العمودية $P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4\ , P_5\ , P_6\ and\ b$ تشير إلى المتجهات العمودية المقابلة لـ $x_1,\ x_2\ ,\ x_3,\ S_1,\ S_2\ ,\ S_3$ ثوابت الجانب الأيمن على التوالي. فأن

$$P_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix},\ P_2 = \begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix},\ P_3 = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\ P_4 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ P_5 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, P_6 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix}20\\30\\40\end{bmatrix}$$

$$B = [P_4 \quad P_5 \quad P_6]$$

$$B = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \mathbf{I}, \qquad B^{-1} = \mathbf{I} = identity\ \ matrix$$

B.V	B^{-1}			b_j
S_1	1	0	0	20
S_2	0	1	0	30
S_3	0	0	1	40

نختبر الحل هل هو حل امثل وذلك من خلال ايجاد قيم صف الارباح النسبية للمتغيرات الغير اساسية

$$\pi = C_B B^{-1}$$

$$\pi = [0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\overline{C_1} = C_1 - \pi P_1$$

$$\overline{C_1} = 3 - [0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix} = 3$$

$$\overline{C_2} = C_2 - \pi P_2$$

$$\overline{C_2} = -5 - [0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}2\\1\\4\end{bmatrix} = -5$$

$$\overline{C_3} = C_3 - \pi P_3$$

$$\overline{C_3} = 2 - [0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = 2$$

Since all $\overline{C_1}$ and $\overline{C_3}$ are positive, the current solution is not optimal. (x_1) is variable that enters the basis

Iteration (1)

نجد العمود المحوري $\overline{P_1}$

$$\overline{P_1} = B^{-1}P_1$$

$$\overline{P_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Pivot column

B.V	B^{-1}			b_j	$\overline{P_1}$	ratio	Min ratio
S_1	1	0	0	20	1	$\frac{20}{1}$	20 ← Pivot row
S_2	0	1	0	30	1	$\frac{30}{1}$	
S_3	0	0	1	40	2	$\frac{40}{2}$	

S_1 is the leaving variable

B.V	B^{-1}			b_j	$\overline{P_1}$
x_1	1	0	0	20	1
S_2	-1	1	0	10	0
S_3	-2	0	1	0	0

نختبر الحل هل هو حل امثل وذلك من خلال ايجاد قيم صف الارباح النسبية للمتغيرات الغير اساسية

$$\pi = C_B B^{-1}$$

$$\pi = [3 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [3 \quad 0 \quad 0]$$

$$\overline{C_2} = C_2 - \pi P_2$$

$$\overline{C_2} = -5 - [3 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} = -11$$

$$\overline{C_3} = C_3 - \pi P_3$$

$$\overline{C_3} = 2 - [3 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = -1$$

$$\overline{C_4} = C_4 - \pi P_4$$

$$\overline{C_4} = 0 - [3 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = -3$$

Since all $\overline{C_j}$ are negative, the current solution is optimal.

$$x_1 = 20, \qquad x_2 = x_3 = 0, \quad Z = -60$$