الفصل التاسع

المصفوفات وتطبيقاتها الاقتصادية

Matrices & Economic Applications

• تناولنا في فصول سابقة العلاقات والدوال بين متغيرين حيث كان يمثل أحدهما متغيراً مستقلاً *independent variable* والآخر متغيراً تابعاً *dependent variable* وهذه الحالة كانت من أبسط الحالات التي تمثل نماذج اقتصادية ومالية واقعية، ذلك أن أي متغير في الدورة الاقتصادية أو المالية يتأثر بأكثر من متغير واحد.

فعلى سبيل المثال فإن علاقة الدخل كمتغير مستقل بالاستهلاك كمتغير تابع يعبر عنها بعلاقة بين متغيرين. ولكن هل الاستهلاك يتأثر بالدخل فقط أم أنه يتأثر بمجموعة من المتغيرات الأخرى كأسعار السلع في السوق وذوق المستهلك ومعدل سعر الفائدة على الادخار والإنفاق الحكومي وغيرها من المتغيرات التي بدورها أيضاً تتأثر بمتغيرات أخرى؟

ولذلك برزت الحاجة للمصفوفات التي تمثل مدخلاتها قيما لكثير من المتغيرات والتي تعكس تأثير هذه القيم على قيم متغيرات أخرى محل الدراسة في النموذج الاقتصادي.

وينظر للمصفوفة على أنها شكل مستطيل يقسم إلى عدد من الأعمدة والصفوف ـ كالجدول ـ بحيث يتم تمثيل قيم كل متغير في عمود أو صف واحد من أعمدة وصفوف المصفوفة.

وتأتي أهمية المصفوفات في العلوم الاقتصادية والإدارية من قدرتها على التحليل الشامل للنماذج الاقتصادية واكتشاف طبيعة العلاقات بين المتغيرات المؤثرة في الظاهرة المدروسة وذلك للوصول إلى نتائج نهائية تعين على اتخاذ القرارات المثلى التي تزيد من قيمة المنشأة السوقية من خلال الاستفادة التامة من الموارد الاقتصادية المتاحة.

1-9 تعريف المصفوفة Definition of Matrix

المصفوفة *matrix* هي شكل مستطيل يشبه الجدول ويحتوي على مجموعة من الصفوف والأعمدة بحيث يشترك كل صف مع عمود بعدد ذا قيمة حقيقية *real-value*. وتسمى هذه الأعداد بعناصر المصفوفة *elements of matrix* أو مدخلات المصفوفة *entries of matrix*.

ويرمز للمصفوفات ـ عادةً ـ بإحدى الحروف اللاتينية الكبيرة مثل A ، B ، C ، D ،.... في حين يرمز لعناصر المصفوفة بإحدى الحروف الصغيرة مثل a ، b ، c ، d ، .... . ويرفق مع هذا الحرف الصغير رقمان يشيران للصف والعمود اللذان يشتركان بهذا العنصر.

والشكل العام لكتابة المصفوفة A والتي تحتوي على m من الصفوف و n من الأعمدة يعطى كالآتي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ومن شكل المصفوفة أعلاه فإن العنصر a_{11} يمثل قيمة حقيقية تقع في الصف الأول والعمود الأول، كذلك العنصر a_{12} يمثل قيمة حقيقية تقع في الصف الأول والعمود الثاني. وبشكل عام فإن a_{ij} تمثل عنصراً في المصفوفة A يقع في الصف i والعمود j، حيث:

$$i = 1,2,3,\ldots,m$$
$$j = 1,2,3,\ldots,n$$

1-1-9 رتبة المصفوفة The order of Matrix

إن رتبة المصفوفة تشير إلى عدد الصفوف وعدد الأعمدة الذي تحويه المصفوفة. فلو أخذنا المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 1 & 6 \\ 9 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

فنلاحظ أنها تحتوي على 3 صفوف و 4 أعمدة، ولهذا فإننا نقول أن رتبة هذه المصفوفة هي الرتبة (3×4) وتقرأ " الرتبة ثلاث ضرب أربعة" ، وعليه فإن المصفوفة التالية هي من الرتبة (2×3)

$$B = \begin{matrix} 0 & 7 & -1 \\ 8 & 5 & 10 \end{matrix}$$

حيث نلاحظ أن عدد الصفوف **2** وعدد الأعمدة **3**.

وبشكل عام فإن المصفوفة التي تحتوي على عدد m من الصفوف وعدد n من الأعمدة هي من الرتبة ($m \times n$).

مثال (1-9): أوجد رتبة المصفوفات التالية:

$$1)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \\ 9 & 4 & 0 \end{bmatrix} \qquad 2)B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 \\ 10 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3)C = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 4)D = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

الحل:

1) المصفوفة A من الرتبة 3×3 .
2) المصفوفة B من الرتبة 3×4 .
3) المصفوفة C من الرتبة 4×1 . وتسمى مثل هذه المصفوفة بمصفوفة صف ***row matrix***.
4) المصفوفة D من الرتبة 1×3 . وتسمى بمصفوفة عمود ***column matrix***.

وتأتي أهمية معرفة رتبة المصفوفة من كونها تميز المصفوفة عن غيرها، كذلك نستطيع معرفة حجم المصفوفة ***size of matrix***، والذي يمثل عدد عناصر المصفوفة الكلي، ويساوي حاصل ضرب عدد الصفوف بعدد الأعمدة التي تحويها المصفوفة.

وبالرجوع إلى المثال السابق فإن:

1) عدد عناصر المصفوفة A هو $3 \times 3 = 9$.
2) عدد عناصر المصفوفة B هو $4 \times 3 = 12$.
3) عدد عناصر المصفوفة C هو $1 \times 4 = 4$.

4) عدد عناصر المصفوفة D هو $3 \times 1 = 3$.

2-1-9 أنواع المصفوفات Types of Matrices

تصنف المصفوفات فيما بينها حسب رتبة المصفوفة وحسب أشكال العناصر داخل المصفوفة. وسنعرض الأنواع التالية في هذا البند حسب أشكال عناصرها ورتبها ليكتمل عرض موضوع المصفوفات.

1) المصفوفة المربعة Square Matrix

وهي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة، أي أن الشكل المستطيل الذي يمثل المصفوفة يصبح مثل المربع لتساوي أضلاعه. ولهذا فإن رتبة المصفوفة تعطى بعدد واحد يشير إلى عدد الصفوف والأعمدة المتساوي. فلو استعرضنا المصفوفات التالية:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 9 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 9 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

نجد أن:

- المصفوفة A من الرتبة 2.
- المصفوفة B من الرتبة 3.
- المصفوفة C من الرتبة 4.

2) المصفوفة القطرية Diagonal Matrix

تسمى المصفوفة التي تكون جميع عناصرها أصفاراً عدا عناصر القطر بالمصفوفة القطرية. وعناصر القطر هي الأعداد داخل المصفوفة التي يتساوى عندها عدد الصفوف مع عدد الأعمدة. والمصفوفات التالية هي مصفوفات قطرية من رتب مختلفة:

وكذلك يوجد

أ - مصفوفة مثلثية عليا : وهي مصفوفة مربعة تكون جميع عناصرها الواقعة تحت القطر الرئيسي مساوية للصفر .

ب - مصفوفة مثلثية سفلى : - وهي مصفوفة مربعة تكون جميع عناصرها الواقعة فوق القطر الرئيسي مساوية للصفر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن جميع المصفوفات السابقة مربعة، وكذلك نلاحظ أن جميع العناصر التي لا تقع على القطر هي أصفار. ويمكن التعبير عن كل من المصفوفات السابقة كما يلي:

- المصفوفة A مصفوفة قطرية ورتبتها 2.
- المصفوفة B مصفوفة قطرية ورتبتها 3.
- المصفوفة C مصفوفة قطرية ورتبتها 4.

3) المصفوفة الأحادية Unit Matrix

تسمى المصفوفة القطرية التي يكون فيها عناصر القطر مساوية للعدد واحد الصحيح بالمصفوفة الأحادية. ويرمز للمصفوفة الأحادية من الرتبة n بالرمز I_n، وهنا عرض لبعض المصفوفات الأحادية:

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حيث أن:

- المصفوفة I_2 مصفوفة أحادية ورتبتها 2.
- المصفوفة I_3 مصفوفة أحادية ورتبتها 3.
- المصفوفة I_4 مصفوفة أحادية ورتبتها 4.

4) المصفوفة الصفرية Zero Matrix

تسمى المصفوفة التي جميع عناصرها أصفاراً بالمصفوفة الصفرية، ويرمز لها عادة بالرمز O بغض النظر عن رتبتها. والمصفوفات التالية مصفوفات صفرية:

مثلثية عليا

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

سفلى

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$O=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix} \qquad O=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$$O=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix} \qquad O=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

وتسمى هذه المصفوفة بالمصفوفة المحايدة في عمليتي الجمع والطرح، ذلك أنها تشبه العدد صفر في عدم تأثيره على الأعداد في عملية الجمع والطرح، حيث إذا كان a أي عدد حقيقي فإن:

$$a+0=0+a=a$$

كذلك المصفوفة الصفرية فهي محايدة في عمليتي الجمع والطرح، حيث أنه إذا كانت A أي مصفوفة فإن:

$$A+O=O+A=A$$

وذلك بشرط تساوي الرتب. ويمكن التحقق من هذه الخاصية بسهولة.

5) مبدلة المصفوفة و المصفوفة المتماثلة

Transpose of Matrix and Symmetric Matrix

تسمى المصفوفة المربعة مصفوفة متماثلة إذا كانت المصفوفة ذاتها تساوي مبدلتها. ونحصل على مبدلة المصفوفة ***matrix transpose*** بقلب الصفوف أعمدة والأعمدة صفوفا، ويرمز لها بالرمز A'.

فعلى سبيل المثال إذا كانت المصفوفة $A=\begin{bmatrix}3&2&9\\2&5&3\\9&3&1\end{bmatrix}$ ، فإن مبدلة المصفوفة تنتج بتدوين عناصر الصفوف على شكل أعمدة، وعناصر الأعمدة على شكل صفوف كما يلي:

$$A'=\begin{bmatrix}3&2&9\\2&5&3\\9&3&1\end{bmatrix}$$

ونلاحظ أن المصفوفة $A' = A$. ولهذا نقول أن المصفوفة A مصفوفة متماثلة.

ويعرف تماثل المصفوفات أيضاً بأنه تساوي العناصر التي تقع فوق القطر مع العناصر التي تقع تحت القطر. وهذا ما نلاحظه إذا نظرنا إلى المصفوفة السابقة A، حيث أن العناصر التي تقع فوق القطر وهي 2 و 9 و 3، هي نفسها العناصر التي تقع تحت القطر نفسه. وهنا بعض الأمثلة عن مصفوفات متماثلة:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 0 \\ 7 & 1 & 8 \\ 0 & 8 & 2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 6 & 9 & 10 & 0 \\ 9 & 2 & -1 & 1 \\ 10 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

3-1-9 تساوي المصفوفات Equality of Matrices

تتساوى مصفوفتين إذا كانتا من الرتبة نفسها، وكانت العناصر المتناظرة في المصفوفتين متساوية. أي أنه:

> إذا كانت A مصفوفة من الرتبة $m \times n$، و المصفوفة B من الرتبة $m \times n$. فإن:
>
> $$A = B$$
>
> إذا كان $a_{ij} = b_{ij}$ لجميع قيم i و j.

وبالاعتماد على هذا التعريف فإنه إذا كانت:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{5}{5} & 2 \\ -4 & \frac{12}{4} \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$$

فإن $A = B$. ولكن لو استعرضنا المصفوفتان التاليتان:

$$C = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad D = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

فنجد أن $C \neq D$، وذلك لأن العنا صر المتناظرة غير متساوية.

مثال (9-2): إذا كانت $A = B$، وكانت $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$، و كانت

$B = \begin{bmatrix} x & 8 \\ 1 & 2y-1 \end{bmatrix}$، أوجد قيمة المتغيرين x و y

الحل:

بما أن المصفوفتين متساويتان فإن:

$$x = 4$$
$$2y - 1 = 9 \Rightarrow 2y = 10 \Rightarrow y = 5$$

9-1-4 جمع وطرح المصفوفات Adding and Subtracting Matrices

يمكن إجراء عملية الجمع والطرح على مصفوفتين أو أكثر وذلك عندما تتساوى الرتب. وتتم العملية بجمع أو طرح العناصر المتناظرة.

مثال (9-3): إذا كانت:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad و \quad A = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

أوجد المصفوفة $A + B$ و $B - A$.

الحل:

$$A + B = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 9+1 & 6+4 & 0+5 \\ 3+2 & 7+0 & 1+6 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 10 & 10 & .5 \\ 5 & 7 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9-1 & 6-4 & 0-5 \\ 3-2 & 7-0 & 1-6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 2 & -5 \\ 1 & 7 & -5 \end{bmatrix}$$

5-1-9 ضرب المصفوفة بعدد ثابت Multiplying a Matrix by Number

إذا تم ضرب مصفوفة A بعدد k، فإن عناصر المصفوفة الناتجة kA هم عبارة عن عناصر المصفوفة الأصلية A مضروبا بالعدد k.

فإذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، فإن المصفوفة $2A$ تعطى بالشكل التالي:

$$2A = \begin{bmatrix} 2\times 2 & 2\times 4 \\ 2\times 1 & 2\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

مثال (4-9): إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 6 \\ 9 & 8 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ ، فاوجد $\frac{1}{2}A$.

الحل:

$$\frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{0}{2} & \frac{6}{2} \\ \frac{9}{2} & \frac{8}{2} & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 3 \\ \frac{9}{2} & 4 & \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

مثال (9-5): إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 4 \\ 8 & 7 & 9 \end{bmatrix}$ ، فأوجد المصفوفة $(-A)$.

الحل:

إن المصفوفة A - هي عبارة عن حاصل ضرب المصفوفة A بالعدد 1 - ، أي أن:

$$-A = (-1)A = \begin{bmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -3 & -6 & -4 \\ -8 & -7 & -9 \end{bmatrix}$$

ونلاحظ من هذا البند والبند السابق أن المصفوفات تعامل معاملة الأعداد الحقيقية من حيث تطبيق العمليات الحسابية، ولهذا فإنه من الممكن ملاحظة خواص عملية جمع وطرح الأعداد الحقيقية على المصفوفات، ومن هذه الخواص:

1- الخاصية التبديلية ***commutative property***.

2- الخاصية التجميعية ***associative property***.

والمثال التالي يوضح تطبيق هذه الخواص على المصفوفات.

مثال (9-6): إذا كانت:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ، فتحقق من أن

1) $A + B = B + A$ (الخاصية التبديلية).

2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (الخاصية التجميعية).

الحل:

1) الخاصية التبديلية:

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$$

$$B + A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 13 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $A + B = B + A$ وهذا يعني أن عملية جمع المصفوفات تحقق الخاصية التبديلية.

2) الخاصية التجميعية:

$$A+(B+C)=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix}5 & 2\\ 0 & 7\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 4\\ 8 & 11\end{bmatrix}$$

$$(A+B)+C=\left(\begin{bmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}5 & 2\\ 0 & 7\end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & -2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}7 & 5\\ 5 & 13\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 4\\ 8 & 11\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن $A+(B+C)=(A+B)+C$، وهذا يعني أن عملية جمع المصفوفات تحقق الخاصية التجميعية.

6-1-9 ضرب المصفوفات Multiplying Matrices

يمكن إجراء عملية ضرب مصفوفتين وذلك عندما يتساوى عدد الأعمدة في المصفوفة الأولى مع عدد الصفوف في المصفوفة الثانية.

فإذا كانت المصفوفة A من الرتبة $m \times n$ وكانت المصفوفة B من الرتبة $r \times s$ فإن الشرط الأساسي لإتمام عملية الضرب هو أن تتساوى عدد أعمدة المصفوفة A مع عدد صفوف المصفوفة B، أي أن:

$$n = r$$

عمود اول صفوف ثانية

ويكون ناتج الضرب المصفوفة AB وهي من الرتبة $m \times s$ ، بحيث أن اي عنصر من عناصر هذه المصفوفة يكون ناتج عن جمع مضروب الأعداد التي في صف من المصفوفة A مع الأعداد التي في عمود في المصفوفة B ، والمثال التالي يشرح عملية ضرب مصفوفتين بالتفصيل.

مثال (9-7): إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 8 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$، فأوجد المصفوفة AB.

الحل:

نحقق أولا شرط ضرب المصفوفات، وهو تساوي عدد أعمدة المصفوفة A مع عدد صفوف المصفوفة B. وهذا متحقق لأن عدد أعمدة المصفوفة A هو 3، وعدد صفوف المصفوفة B هو 3. ولهذا تتم عملية الضرب وتكون المصفوفة AB من الرتبة 2×2

فإذا نظرنا للمصفوفة A على أنها مجموعة من الصفوف، وللمصفوفة B على أنها مجموعة من الأعمدة، كما يلي:

$$AB = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 4} \\ \boxed{0 \quad 3 \quad 5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

نقوم الآن بضرب الصف الأول من المصفوفة A بالعمود الأول من المصفوفة B، وذلك للحصول على العدد الأول في المصفوفة AB والذي يقع في الصف الأول والعمود الأول في مصفوفة الضرب، أي نقوم بما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = 1 \times 2 + 2 \times 6 + 4 \times 7 = 2 + 12 + 28 = 42$$

ولهذا فإن العنصر الذي يقع في الصف الأول والعمود الأول في المصفوفة AB هو العدد 42، أي أن:

$$AB = \begin{bmatrix} \boxed{1 \quad 2 \quad 4} \\ 0 \quad 3 \quad 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{matrix}} & \begin{matrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{matrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{42} & \\ & \end{bmatrix}$$

نعيد العملية السابقة، ونقوم بضرب الصف الأول من المصفوفة A بالعمود الثاني من المصفوفة B، لنحصل على العدد الذي يقع في الصف الأول والعمود الثاني في المصفوفة AB، كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} = 1\times 9 + 2\times 8 + 4\times 1 = 9 + 16 + 4 = 29$$

ولهذا فإن العنصر الذي يقع في الصف الأول والعمود الثاني في المصفوفة AB هو العدد 29، أي أن:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 8 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & 29 \\ & \end{bmatrix}$$

ونقوم الآن بضرب الصف الثاني من المصفوفة A بالعمود الأول من المصفوفة B، لنحصل على العدد الذي يقع في الصف الثاني والعمود الأول في المصفوفة AB، كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} = 0\times 2 + 3\times 6 + 5\times 7 = 0 + 18 + 35 = 53$$

ولهذا فإن العنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الأول في المصفوفة AB هو العدد 53، أي أن:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 8 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & 29 \\ 53 & \end{bmatrix}$$

وأخيراً نقوم بضرب الصف الثاني من المصفوفة A بالعمود الثاني من المصفوفة B، لنحصل على العدد الذي يقع في الصف الثاني والعمود الثاني في المصفوفة AB، كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 9 \\ 8 \\ 1 \end{bmatrix} = 0\times 9 + 3\times 8 + 5\times 1 = 0 + 24 + 5 = 29$$

ولهذا فإن العنصر الذي يقع في الصف الثاني والعمود الثاني في المصفوفة AB هو العدد 29، أي أن:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 8 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & 29 \\ 53 & 29 \end{bmatrix}$$

وهكذا نحصل على مصفوفة الضرب AB وهي:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 6 & 8 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42 & 29 \\ 53 & 29 \end{bmatrix}$$

مثال (9-8): إذا كانت $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$، فأوجد المصفوفة AB

الحل:

نتأكد أولا من أن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي عدد صفوف المصفوفة B وحيث أن المصفوفة A من الرتبة 3×2، والمصفوفة B من الرتبة 2×2 فإن شرط عملية الضرب متحقق لأن عدد أعمدة المصفوفة A يساوي 2 وعدد صفوف المصفوفة B يساوي 2 أيضا.

نقوم الآن بتجزئة المصفوفة A إلى صفوف والمصفوفة B إلى أعمدة كما يلي:

$$AB = \begin{bmatrix} \boxed{5 \quad 2} \\ \boxed{1 \quad 3} \\ \boxed{-1 \quad 0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 7 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 4 \\ 9 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

نقوم الآن بضرب صفوف المصفوفة A بأعمدة المصفوفة B كما يلي:

$$[5 \quad 2]\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix} = 5\times 2 + 2\times 7 = 10 + 14 = 24 \Rightarrow$$

$$AB = \begin{bmatrix}5 & 2\\1 & 3\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\7 & 9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}24 & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

$$[5 \quad 2]\begin{bmatrix}4\\9\end{bmatrix} = 5\times 4 + 2\times 9 = 20 + 18 = 38 \Rightarrow$$

$$AB = \begin{bmatrix}5 & 2\\1 & 3\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\7 & 9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}24 & 38\\ & \\ & \end{bmatrix}$$

$$[1 \quad 3]\begin{bmatrix}2\\7\end{bmatrix} = 1\times 2 + 3\times 7 = 2 + 21 = 23 \Rightarrow$$

$$AB = \begin{bmatrix}5 & 2\\1 & 3\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\7 & 9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}24 & 38\\23 & \\ & \end{bmatrix}$$

$$[1 \quad 3]\begin{bmatrix}4\\9\end{bmatrix} = 1\times 4 + 3\times 9 = 4 + 27 = 31 \Rightarrow$$

$$AB = \begin{bmatrix}5 & 2\\1 & 3\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 4\\7 & 9\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}24 & 38\\23 & 31\\ & \end{bmatrix}$$

$$[-1 \quad 0]\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = -1 \times 2 + 0 \times 7 = -2 + 0 = -2 \Rightarrow$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 38 \\ 23 & 31 \\ -2 & \end{bmatrix}$$

$$[-1 \quad 0]\begin{bmatrix} 4 \\ 9 \end{bmatrix} = -1 \times 4 + 0 \times 9 = -4 + 0 = -4 \Rightarrow$$

$$AB = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & 38 \\ 23 & 31 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

وهكذا ينتج أن حاصل ضرب المصفوفتان AB هو مصفوفة من الرتبة 3×2 ، وهي المصفوفة:

$$AB = \begin{bmatrix} 24 & 38 \\ 23 & 31 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

وبدراستنا لضرب المصفوفات نرى إمكانية تطبيق عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات. ولتمام الموضوع سندرس بعض الخواص التي يمكن تطبيقها على العمليات الحسابية للمصفوفات والتي لا يمكن تطبيقها.

سنبدأ بخاصية التبديل، حيث أن هذا الخاصية لا تكون دائما صحيحة في المصفوفات، أي أن:

$$AB \neq BA$$

بالرغم أن هذه الخاصية تكون صحيحة دائما في الأعداد الحقيقية، فإذا كان a و b أي عددين حقيقين فإن:

$$a \times b = b \times a$$

مثال (9-9): إذا كانت $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}$ ، أوجد AB و BA وتحقق من خاصية التبديل.

الحل:

$$AB=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 8\\ 1 & 10\end{bmatrix}$$

$$BA=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 6 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 9 & 6\end{bmatrix}$$

نلاحظ أن خاصية التبديل لم تتحقق عند ضرب المصفوفتين السابقتين. ولهذا نقول أن عملية ضرب المصفوفات لا تحقق الخاصية التبديلية.

وبالرغم أن خاصية التبديل لا تتحقق في عملية ضرب المصفوفات، إلا أن هنالك خواص أخرى مهمة تتحقق في عملية الضرب، وسنعرضها في البند التالي: