

## 2-4 الطريقة المبسطة The Simplex method:

حل النموذج في حالة دالة الهدف من نوع تعظيم

### Solution of (L.P) Model with Maximization Objective Function.

تعد الطريقة المبسطة (طريقة السمبلكس) أسلوب رياضي متقدم في حل مشاكل البرمجة الخطية (LP). كونها تعالج المشاكل التي تحتوي على عدد كبير من المتغيرات (متغيرين فأكثر)، كما وتعد هذه الطريقة أفضل وأدق من الطريقتين السابقتين [الطريقة البيانية والطريقة الجبرية].

إن البدايات التاريخية لتطبيق الطريقة المبسطة (Simplex method)، تعود إلى الجهود المبذولة من قبل العالم (Dantzig) عام 1947، عندما تبين له عجز كل من الطريقة البيانية والطريقة الجبرية في معالجة مشاكل البرمجة الخطية (LP)، عندما تحتوي على أكثر من متغيرين.

لقد شاع استخدام الطريقة المبسطة في معالجة مشاكل البرمجة الخطية (LP) في وقتنا الحاضر، نتيجة انتشار الحاسبات الالكترونية وتطور البرمجيات الجاهزة (Soft wares) المتعلقة بهذا النوع من المشاكل.

يتم إيجاد حل نماذج البرمجة الخطية (LP)، بموجب هذه الطريقة وفقاً إلى ثلاث مراحل أساسية ومتسلسلة، يمكن وصفها، على النحو الآتي:

1. المرحلة الأولى: إيجاد الحل الأساسي الممكن (الحل الأولي) ( Feasible Solution ).
2. المرحلة الثانية: تحسين الحل الأولي للحصول على الحل الأفضل ( Best Solution ).
3. المرحلة الثالثة: تحسين الحل الأفضل للحصول على الحل الأمثل ( Optimal Solution )، وقد يتم ذلك بمرحلة واحدة أو عدة مراحل.

أولاً: خطوات الحل بموجب الطريقة المبسطة في حالة تعظيم (Maximization) دالة الهدف (Z):

لإيجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (LP)، بموجب طريقة السمبلكس، نتبع الخطوات الآتية:

1. تحويل نموذج البرمجة الخطية (LP) من الصيغة القانونية (Canonical Form) إلى الصيغة القياسية (Standard Form)، بعد إضافة المتغيرات الفائضة أو الراكدة إلى كل من دالة الهدف (Z) وقيود النموذج، مع مراعاة جعل دالة الهدف (Z) مساوية (للصفر).

2. تصميم جدول الحل الأساسي الممكن (Feasible Solution)، بالاعتماد على جميع معاملات المتغيرات ( $X_j, S_j$ ) في قيود النموذج، ودالة الهدف (Z).

3. تحديد المتغير الداخل (Entering Variable)، على أساس أكبر قيمة بإشارة سالبة في صف دالة الهدف (Z).

4. تحديد المتغير الخارج (Leaving Variable)، عن طريق قسمة القيم الواقعة في الجهة اليمنى في عمود (R.H.S)، على ما يقابلها من قيم المعاملات في العمود المحوري (Pivot Column) والمتغير الذي يقابل أقل قيمة موجبة من خوارز القسمة في عمود النسبة (Ratio) يعد هو المتغير الخارج، ليحل محله المتغير الداخل.

5. العمود الذي يوجد فيه المتغير الداخل، يسمى بالعمود المحوري (Pivot Column).

6. الصف الذي يوجد فيه المتغير الخارج، يسمى بالصف المحوري (Pivot Row).

7. العنصر الذي يقع تحت المتغير الداخل، وأمام المتغير الخارج يسمى بالعنصر المحوري (Pivot Element) بمعنى آخر [هو العنصر الناتج من تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج].

8. يمكن الحصول على المعادلة المحورية (Pivot Equation) من خلال قسمة القيم في صف المتغير الخارج على العنصر المحوري (Pivot Element).

9. لغرض تحسين الحل الممكن (Feasible Solution)، والحصول على الحل الأفضل (Best Solution) نتبع الآتي:

أ. إيجاد معاملات دالة الهدف الجديدة (New Z)، كالتالي:

معاملات (Z) الجديدة = معاملات (Z) - معامل المتغير الداخل في صف دالة الهدف \* المعادلة المحورية.

ب. إيجاد معاملات القيود الجديدة للمتغيرات ( $S_i$ )، كالتالي:

معاملات ( $S_i$ ) الجديدة = معاملات ( $S_i$ ) القديمة - معامل المتغير الداخل في صف ( $S_i$ ) \* المعادلة المحورية.

10. يمكن الحصول على الحل الأمثل (Optimal Solution) لمشكلة التعظيم (Maximization)، وذلك عندما تكون جميع معاملات ( $C_j$ ) دالة الهدف الجديدة في جدول الحل، أكبر من أو تساوي الصفر، أي إن ( $C_j \geq 0$ )، أما إذا كانت قيمة واحدة على الأقل لأحد المعاملات ( $C_j$ ) في دالة الهدف (سالبة)، أي إن ( $C_j < 0$ )، فهذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل.

11. يعاد إجراء الخطوات السابقة من (3-10) حتى يتم الحصول على جميع

معاملات ( $C_j$ ) في دالة الهدف (Z)، أكبر من أو تساوي الصفر أي إن ( $C_j \geq 0$ )

(0)، مما يعني ذلك، تم الحصول على الحل الأمثل للمشكلة.

مثال (10): جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية (L.P) التالي، باستخدام

الطريقة المبسطة:

**Example 10:** Find the optimal solution for (L.P) model using Simplex Method?

$$\text{Max. } Z = 3X_1 + 5X_2$$

S. t. :

$$2X_1 + 3X_2 \leq 30$$

$$5X_1 + 4X_2 \leq 60$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Solution:

1. تحويل نموذج الخطة البرمجة الخطية السابق، إلى الصيغة القياسية، أي إن:

$$\text{Max. } Z = 3X_1 - 5X_2 + 0S_1 + 0S_2 = 0$$

S.t. :

$$2X_1 + 3X_2 + S_1 = 30$$

$$5X_1 + 4X_2 + S_2 = 60$$

$$X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$$

2. تصميم جدول الحل الأولي، على النحو الآتي:

Table 1

Basic Var.	Non-Basic Var.				الثوابت (b <sub>i</sub> )	النسبة
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	R.H.S	Ratio
Z	-3	-5	0	0	0	-
S <sub>1</sub>	2	3	1	0	30	10
S <sub>2</sub>	5	4	0	-1	60	15

الصف المحوري

العنصر المحوري العمود المحوري

3. المتغير الداخل هو (X<sub>2</sub>)، كونه يقابل أكبر قيمة بإشارة سالبة (5) في صف دالة الهدف (Z).

4. المتغير الخارج هو (S<sub>1</sub>)، كونه يقابل أقل قيمة موجبة (10) في عمود النسبة (Ratio).

5. العنصر المحوري هو القيمة (3).

6. يمكن الحصول على المعادلة المحور (Pivot Equation)، كالآتي:

$$\text{Pivot Equation} = \left[ \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{3}, \frac{0}{3}, \frac{30}{3} \right]$$

$$= \left[ \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0, 10 \right]$$

7. يمكن الحصول على قيم (Z) و (S<sub>2</sub>) الجديدتين، كالآتي:

$$\text{New (Z)} = [-3, -5, 0, 0, 0] - (-5) * \left[ \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0, 10 \right]$$

$$= [-3, -5, 0, 0, 0] + \left[ \frac{10}{3}, 5, 0, 50 \right]$$

$$= \left[ \frac{1}{3}, 0, \frac{5}{3}, 0, 50 \right]$$

$$\text{New (S}_2) = [5, 4, 0, 1, 60] - 4 * \left[ \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0, 10 \right]$$

$$= [-3, -5, 0, 0, 0] + \left[ \frac{10}{3}, 5, \frac{5}{3}, 0, 50 \right]$$

$$= \left[ \frac{1}{3}, 0, \frac{5}{3}, 0, 50 \right]$$

$$\text{New } (S_2) = [5, 4, 0, 1, 60] - 4 * \left[ \frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0, 10 \right]$$

$$[5, 4, 0, 1, 60] - \left[ \frac{8}{3}, 4, \frac{4}{3}, 0, 40 \right]$$

$$= \left[ \frac{7}{3}, 0, \frac{-4}{3}, 1, 20 \right]$$

نقوم بوضع النتائج أعلاه في جدول حل ثاني، وعلى النحو الآتي:

Table 2

Basic Var.	Non-Basic Var.				الثوابت (b <sub>i</sub> )
	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	S <sub>1</sub>	S <sub>2</sub>	R.H.S
Z*	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	0	50
X <sub>2</sub>	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	10
S <sub>2</sub>	$\frac{7}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1	20

8. بما إن جميع معاملات دالة الهدف الجديدة (Z) في الجدول أعلاه، هي أكبر من

وتساوي الصفر، أي إن (C<sub>j</sub> ≥ 0)، عليه فإن الحل الأمثل للمشكلة، يكون:

$$X_1 = 0, X_2 = 10, Z^* = 50$$

الاستنتاج:

يتضح من النتائج أعلاه، بأن إدارة المنشأة الإنتاجية، ستتخذ قراراً بإنتاج (10)

وحدات من المنتج الثاني (X<sub>2</sub>)، وعدم إنتاج أي وحدة من المنتج الأول (X<sub>1</sub>). وبما

يحقق للمنشأة أقصى الأرباح بلغت (50) دينار.