$$\sum_{I=1}^{n} X_i \qquad i = (1 - n)$$

القواعد الخاصة بالمجموع :

١- يرمز لمجموع عدد المشاهدات (قيم المتغيرx) ابتداءً من المشاهدة الأولى وحتى الأخيرة بالرمز

$$\boxed{\sum_{I=1}^{n} X_i = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n}$$

Ex. If X = 1, 2, 3, 4, 5 find

$$\sum_{I=1}^{n} xi = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$$

$$= 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

٢- وهناك مجموع جزئي مثل $\sum_{I=3}^{5} X_i$ (أي مجموع المشاهدات الثالثة والرابعة والخامسة) .

٣- ويرمز لمجموع مربعات عدد من المشاهدات (قيم المتغير X) بالرمز :

$$\boxed{\sum_{I=}^{n} X^2_i = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots\ldots + x_n^2}$$

ففي المثال السابق :

$$\sum_{I=1}^{n} xi^2 = (1)^2 + (2)^2 + (3)^2 + (4)^2 + (5)^2$$

$$= 1 + 4 + 9 + 16 + 25$$

$$= 55$$

٤- يرمز لمربع مجموع عدد من المشاهدات (قيم المتغير X) بالرمز :

$$\boxed{\left(\sum_{I=1}^{n} x_i\right)^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)^2}$$

ففي المثال السابق فإن :

$$\left(\sum_{I=}^{5} x_i \right)^2 = (\ 1 + 2 + 3 + 4 + 5\ )^2$$

$$= (15)^2$$

$$= 225$$

ملاحظة : نستنتج من 4 , 3 بأن :

$$\sum_{I=}^{n} x_i^{\ 2} \quad \neq \quad \left(\sum_{I}^{5} x_i \right)^2$$

٥- ويرمز لحاصل ضرب مجموعي ثيم المتغيرين x , y بالرمز :

$$\boxed{\sum_{I=1}^{n} xi \ \sum_{I=1}^{n} yi \ = (\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots\ldots + x_n\ )\ (\ y_1 + y_2 + y_3 + \ldots\ldots + y_n\ )}$$

مثال : إذا كانت قيم كل من x و y هي كالآتي

X = 2, 3, 5, 1

Y = 4, 2, 3, 5

أوجد كل مما يأتي :

1) $\sum_{I=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3$

$$= 2 + 3 + 5 = 10$$

2) $\sum_{I=1}^{n} X_i \sum_{I=1}^{n} y_i = (\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n\ )\ (\ y_1 + y_2 + y_3 + \ldots + y_n\ )$

$$= (\ 2 + 3 + 5 + 1\ )\ (\ 4 + 2 + 3 + 5\ )$$

$$= (\ 11\ )\ (\ 14\ )$$

$$= 154$$

٦-يرمز لمجموع حاصل ضرب متغيرين x , y بالرمز :

$$\sum_{I=1}^{n} X_i \ y_i = =(X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 + \ldots\ldots + X_n Y_n$$

مثال : إذا كانت قيم كل من x و y هي كالآتي

$X = 2, 3, 5, 1$

$Y = 4, 2, 3, 5$

أوجد كل مما يأتي :

1) $\sum_{I=1}^{3} x_i = x_1 + x_2 + x_3$

$= 2 + 3 + 5 = 10$

2) $\sum_{I=1}^{n} X_i \ y_i =(X_1 Y_1 + X_2 Y_2 + X_3 Y_3 + \ldots\ldots + X_n Y_n)$

$= 2(4) + 3(2) + 5(3) + 1(5)$

$= 8 + 6 + 15 + 5$

$= 34$

ملاحظة نستنتج من 5 , 6 أن $\sum_{I=1}^{n} X_i \sum_{I=1}^{n} y_i \neq \sum_{I=1}^{n} X_i \ y_i$

٧-يرمز لمجموع مقلوب قيم X بالرمز :

$$\sum_{I=1}^{n} \frac{1}{X_i} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{X_n}$$

مثال : إذا كانت قيم كل من x و y هي كالآتي

$X = 2, 3, 1$

أوجد كل مما يأتي :

1) $$\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{x_i} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1} = \frac{11}{6}$$

٨-يرمز لمقلوب مجموع قيم المتغير X بالرمز :

$$\boxed{\frac{1}{\sum_{I=1}^{n} x_i} = \frac{1}{x_1 + x_2 + \dots + x_n}}$$

مثال : إذا كانت قيم كل من x و y هي كالآتي

$X = 2, 3, 1 , 4$

أوجد كل مما يأتي :

1) $$\frac{1}{\sum_{I=1}^{n} x_i} = \frac{1}{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}$$

$$= \frac{1}{2 + 3 + 1 + 4}$$

$$= \frac{1}{10}$$

بعض القواعد الأساسية في عملية الجمع :

١- إذا كان (c) أي عدد ثابت فإن :

$$\boxed{\sum_{I=1}^{n} c = nc}$$

البرهان :

$$\sum_{I=1}^{n} c = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n$$

$$= nc$$

مثال : أوجد كل مما يأتي :

$$\sum_{I=1}^{4} 7 = 7 + 7 + 7 + 7$$
$$= 4\,(7) = 28$$

٢ - إذا كان (c)أي عدد ثابت فإن :

$$\boxed{\sum_{I=1}^{n} cx_i = c \sum_{I=1}^{n} x_i}$$

البرهان :

$$\sum_{I=1}^{n} cx_i = cx_1 + cx_2 + cx_3 + \ldots + cx_n$$
$$= c\,(x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n)$$
$$= c \sum_{I=1}^{n} x_i$$

مثال : إذا كانت $x = 1, 2, 3, 4, 5$ أوجد ناتج ما يأتي :

1) $\sum_{I=1}^{n} 4\, x_i = 4\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$

$$= 4\,(15) = 30$$

2) $\sum_{I=1}^{n} 2\, x_i^2 = 2\,(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2 +$

$$= 2\,(1 + 4 + 9 + 16 + 25)$$
$$= 2\,(55)$$
$$= 110$$

ملاحظة :

*** يرمز لمجموع حاصل قسمة المتغيرين x , y بالرمز :**

$$\boxed{\sum_{I=1}^{n} \frac{x_i}{y_i} = \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \ldots\ldots + \frac{x_n}{y_n}}$$

* ويرمز لحاصل قسمة مجموعي المتغيرين x , y بالرمز

$$\frac{\sum_{I=1}^{n} X_i}{\sum_{I=1}^{n} y_i} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{y_1 + y_2 + \ldots + y_n}$$

H. W. :

If X = 3, 6, 9, 12, 15 Y = 2, 4, 6, 8, 10 Find the following :

1) $\sum_{I=1}^{3} X_i$

2) $\sum_{I=1}^{n} y_i^2$

3) $\sum_{I=1}^{3} X_i \; y_i$

4) $\left(\sum_{I=1}^{3} y_i\right)^2$

5) $\sum_{I=1}^{n} \frac{1}{X_i \; y_i}$

6) $\sum_{I=1}^{n} 2 \, x_i \, y_i^2$

امثلة وتدريبات حول كيفية جمع المتغيرات وقسمتها وحاصل ضرب متغيرين

الفصـــــل الثـــــاني

طـــــرق عـــــرض البيانـــات

<u>البيانات Data</u> مجموعة القيم التي يتم جمعها من مفردات المجتمع أو العينة لخاصية معينة (متغير).

وإن البيانات الخام لا معنى لها ولا يمكن قياسها إلا إذا خضعت للمعالجات الاحصائية ، فالبيانات قبل عرضها **تسمى بيانات غير مبوبة** (Ungrouped) وبعد عرضها تسمى **بيانات مبوبة** (Grouped) .

أنواع البيانات

- البيانات غير المبوبة
  - البيانات الأصلية التي جمعت ولم تبوب في
- البيانات المبوبة
  - البيانات التي بوبت ووضعت في جدول

١- **<u>البيانات غير المبوبة (Ungrouped Date)</u>** وهي البيانات الأصلية التي جمعت ولم تبوب في جدول .

٢- **<u>البيانات المبوبة (Grouped Date)</u>** وهي البيانات التي بوبت ووضعت في جدول توزيع تكراري .

طرق عرض البيانات

- العرض الجدولي
  - جدول التوزيع التكراري
- التمثيل البياني
  - المدرج التكراري ، المضلع التكراري ، المنحني التكراري ، الدائرة البيانية

تقسم طرق عرض البيانات الى قسمين رئيسين هما :

أولاً :العرض الجدولي (Tabular Presentation)

ويطلق عليه أيضاً **الجدول الاحصائي** : وهو عبارة عن جدول منظم ، يسمى (جدولاً بسيطاً) إذا تألف من بعد واحد ، و(جدولاً مركباً) إذا تألف من بعدين .

الجدول البسيط : وهو الجدول الذي توزع فيه البيانات بحسب صفة واحدة ، ويتألف عادة من عمودين ، **الأول** يتضمن تقسيمات الصفة الى فئات أو مجموعات ، و**الثاني** يبين عدد المفردات التابعة لكل فئة أو مجموعة .

مثال : اعرض البيانات الآتية في جدول تكراري :

1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 6, 7, 8, 8, 8, 9, 9, 9

الحل :

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum x$
F_i	1	3	2	1	4	1	1	2	3	18

الجدول المركب : وهو الجدول الذي توزع فيه البيانات حسب صفتين أو ظاهرتين أو أكثر في نفس الوقت.

مثال : الجدول أدناه يبين توزيع مجموعة من الطلبة بحسب الوزن والطول :

الوزن (كغم) / الطول	51 60	61 – 70	71 – 80	المجموع
121 – 140	20	6	4	30
141 – 160	2	40	10	52
161 – 180	2	6	10	18١
المجموع	24	52	24	100

ويتمثل العرض الجدولي بجدول التوزيع التكراري .

جدول التوزيع التكراري (Frequency Distribution Table)

وهو جدول بسيط يتكون من عمودين **الأول يسمى عمود الفئات (Classes)** ، وتقسم فيه قيم المتغير الى أقسام ومجموعات ، ويرمز له بالرمز (C) ، **والثاني يسمى عمود التكرارات (Frequency)** ويتضمن عدد المرات التي تكررت فيها الفئة ، ويرمز له بالرمز (f_i) .

بعض المفاهيم ذات الصلة بجدول التوزيع التكراري :

١- **التوزيع التكراري :** هو عبارة عن تلخيص وترتيب لبيانات المتغير العشوائي التي سبق وأن جمعت وصنفت مقسمة إلى عدد من المجاميع يسمى كل منها بـ (الفئة Class) . وهذه الفئات قد تكون مرتبة تصاعدياً أو تنازلياً حسب طبيعة البيانات . ويسمى توزيع عدد قيم X حسب الفئات بـ (التوزيع التكراري) .

٢- **المدى الكلي (Total Range):** يعرف المدى الكلي بأنه الفرق ما بين أكبر قيمة وأصغر قيمة في المجموعة . ويرمز له بالرمز (T.R) .

$$\text{T. R.} = x_L - x_s$$

٣- **الفئات class :** هي عدد المجاميع التي يتألف منها التوزيع التكراري ، وكل مجموعة تتحدد بحدين ، الأول يسمى **الحد الأدنى للفئة (Lower Class Limit)** ويرمز له بالرمز L.L ، والثاني يسمى **الحد الأعلى للفئة (Upper Class Limit) ويرمز له بالرمز u.L .**

مثل : الفئة (16 – 10) حدها الأدنى 10 وحدها الأعلى 16

٤- **الحدود الحقيقية للفئات :**

لكل فئة حدان حقيقيان حد أدنى حقيقي وحد أعلى حقيقي

الحد الأدنى الحقيقي للفئة = الحد الأدنى – 0.5

مثل : ذا كان الحد الأدنى لفئة هو (10) فإن الحد الأدنى الحقيقي لها هو ؟

الحد الأدنى الحقيقي = الحد الأدنى – 0.5 = 9.5

الحد الأعلى الحقيقي للفئة = الحد الأعلى + 0.5

مثل : ذا كان الحد الأعلى لفئة هو (16) فإن الحد الأعلى الحقيقي لها هو ؟

الحد الأعلى الحقيقي = الحد الأعلى + 0.5 = 16.5

٥- **عدد فئات التوزيع m .** ويمثل عدد المجاميع التي يتألف منها التوزيع التكراري . فإذا رمزنا لعدد الفئات بالرمز m فإن :

$$m = 2.5\sqrt[4]{n}$$

حيث n تمثل عدد المفردات (قيم المتغير x) .

ويجب أن لا يقل عدد الفئات عن خمسة فئات و لا يزيد عن خمسة عشر فئة .

٦- **تكرار الفئة (Classes frequency) :** هو عدد القيم التي تقع في مدى تلك الفئة ، ويرمز له بالرمز (f_i)

إذ إن f_1 يمثل تكرار الفئة الأولى ، f_2 يمثل تكرار الفئة الثانية ، ... وهكذا .

وإن مجموع التكرارات يجب أن يكون دائماً مساوياً للعدد الكلي لقيم المفردات .

مثلاً : تكرار الفئة الثالثة = 5، فهذا يعني أن هناك 5 قيم من قيم المتغير واقعة في المدى الفئة . .

٧- **مركز الفئة (Center of Classes) :** ويمثل منتصف المدى بين حدي للفئة ، ويرمز له بالرمز x . أي إن :

$$\text{مركز الفئة} = \frac{\text{الحد الأدنى} + \text{الحد الأعلى}}{2}$$

$$X = \frac{L.L + U.L}{2}$$

مثال : إذا كانت لدينا الفئة (10 – 16) أوجد مركز الفئة :

الحل :

$$X = \frac{L.L + U.L}{2}$$

$$= \frac{10 + 16}{2} = 13$$

٨- **طول الفئة (Length of Classes) :** ويسمى أحياناً بالمدى الفئوي ، ويمثل مقدار المدى بين حدي للفئة ، ويرمز له بالرمز (L) ,

وإن طول الفئة يتناسب عكسياً مع عدد الفئات ، فكلما زاد طول الفئة قل عدد الفئات والعكس صحيح .

ويجب أن تكون أطوال الفئات متساوية لتسهيل العمليات الحسابية ،ويجب أن تكون أعداد صحيحة موجبة دائماً .

طول الفئة = الحد الأعلى – الحد الأدنى + ١

$$\boxed{L = U.L - L.L + 1}$$

مثال : إذا كان لدينا الفئة (16 – 10) ، أوجد طول الفئة :

الحل :طول الفئة = الحد الأعلى – الحد الأدنى + ١

$$L = 16 - 10 + 1$$
$$= 7$$

كما يمكن استخراجه من :

أ) إذا أمكن استخراج المدى الكلي وعدد الفئات فإن طول الفئة يستخرج من القانون :

$$\boxed{L = \frac{T.R.}{m}}$$

حيث T.R : هو المدى الكلي

m : عدد الفئات

ب) أو من خلال : الفرق بين الحدين الأعلى أو (الأدنى) لفئتين متتاليتين إذا كانت هناك فئتين متتاليتين معلومتين :

$$\boxed{L = (L.L.)_2 - (L.L.)_1}$$

$$\boxed{L = (u.L.)_2 - (u.L.)_1}$$

ج) أو من (الفرق بين مركزي فئتين متتاليتين) :

$$\boxed{L = X_2 - X_1}$$

حيث : X_2 يمثل مركز الفئة الثانية و X_1 يمثل مركز الفئة الأولى.

خطوات إنشاء جدول التوزيع التكراري (تبويب البيانات) :

لنأخذ المثال الافتراضي الآتي :

لتكن $X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n$ بيانات المتغير العشوائي X من عينة عشوائية ما عدد مفرداتها n مفردة . ونرغب في تلخيص هذه البيانات في توزيع تكراري عدد فئاته هو m.

ولنفرض أن X_s هي أصغر قيمة ، X_L هي أكبر قيمة في مجموعة بيانات المتغير x ، عندئذ نتبع الخطوات الآتية في إنشاء جدول التوزيع التكراري :

١- **تحديد أصغر قيمة وأعلى قيمة من قيم المتغير العشوائي X .**

٢- استخراج **المدى الكلي T.R** .

٣- **استخراج عدد فئات التوزيع m .**

٤- **استخراج طول الفئة L .**

٥- **تحديد الحد الأدنى والأعلى للفئات ، وكتابة حدود الفئات .**

٦- **استخراج عدد التكرارات لكل فئة f_i .**

ملاحظة مهمة: يفضل أن يمتاز التوزيع التكراري بما يأتي :

١- أن تكون الفئات متساوية في الطول .

٢- أن يكون التوزيع التكراري توزيع مغلق .

٣- أن تبدأ فئات التوزيع وتنتهي (حدود الفئات) بأعداد صحيحة ، وذلك لتسهيل اجراء العمليات الحسابية خصوصاً إذا اجريت بدون استخدام الحاسبات .

٤- أن لا يقل عدد فئات التوزيع عن 5 فئات ولا يزيد عن 15 فئة .

٥- أن تكون حدود الفئات محددة بشكل واضح بحيث أن كل قيمة من قيم المتغير تبوب ضمن فئة واحدة فقط من فئات التوزيع .

مثال : البيانات الآتية تمثل درجات 80 طالباً في مادة الاحصاء . المطلوب انشاء جدول تكراري لهذه النباتات أو (اعرض البيانات الآتية في جدول توزيع تكراري) .

80	84	80	87	97	81	74	48	79	80
56	92	70	71	78	82	93	91	70	90
83	93	65	51	75	68	72	73	74	81
93	68	86	43	74	73	83	90	35	86
61	80	91	75	67	72	90	71	76	92
80	95	97	70	74	81	88	91	97	72
89	67	60	82	83	63	60	77	71	59
65	75	79	88	66	70	88	76	63	63

الحل :

1) $x_L = 97 \quad x_s = 35$

2) $T.R. = x_L - x_s$

$= 97 - 35 = 62$

3) $m = 2.5 \sqrt[4]{n}$

$= 2.5 \sqrt[4]{80}$

$= 7.4 \quad = 7$

4) $L \ \frac{T.R.}{m} = \frac{62}{7} = 8.8 \quad \simeq \quad 9$

	C	Fi
1	35 -43	2
2	44 – 52	2
3	53 – 61	5
4	62 – 70	14
5	71 – 79	20
6	80 – 88	22
7	89 – 97	15
		80

*ملاحظة:- اذا كان هناك فئة موجودة في الجدول يجب معرفة طول الفئة ثم أكمال الجدول.

مثال : نظم البيانات الاتية:- (24,5,15,16,10,11,19,15,21,15) في جدول تكرارات فئته الاولى(5-9)

C	fi
5 -9	1
10-14	2
15-19	5
20-24	2

مثال : إذا كان عدد مفردات ظاهرة ما هو (150) مفردة وإن أقل قيمة فيها هي (10) وأعلى قيمة هي (90) . أكمل الجدول الآتي :

	C	X	الحدود الحقيقية للفئات
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			

الحل :

1) $x_L = 90 \qquad x_s = 10$

2)T. R. = $x_L - x_s$

$= 90 - 10 += 80$

3) $m = 2.5 \sqrt[4]{n}$

$= 2.5 \sqrt[4]{150}$

$= 8.75 \simeq 9$

4) $L = \frac{T.\ R.}{m} = \frac{80}{9} \simeq 9$

5) L = u. L. - L. L. + 1

9 = u. L. - 10 + 1

u. L. = 18 ....

$$6)\ X_1 = \frac{u.\ L. + L.\ L.}{2} = \frac{18 + 10}{2} = 14$$

$$X_2 = X_1 + L = 14 + 9 = 23$$

.... وهكذا .

الحد الأدنى الحقيقي للفئة الأولى = الحد الأدنى للفئة – 0.5

= 10 – 0.5 = 9.5

الحد الأعلى الحقيقي للفئة الأولى = الحد الأعلى للفئة + 0.5

= 18 + 0.5 = 18.5

وهكذا .

	C	X	الحدود الحقيقية للفئات
1	10 – 18	14	9.5 – 18.5
2	19 – 27	23	18.5 – 27.5
3	28 – 36	32	27.5 – 36.5
4	37 – 45	41	36.5 – 45.5
5	46 – 54	50	45.5 – 54.5
6	55 – 63	59	54.5 – 63.5
7	64 – 72	68	63.5 – 72.5
8	73 – 81	77	72.5 – 81.5
9	82 – 90	86	81.5 – 90.5

تمرين1 : أكمل الجدول الآتي :

	C	X	الحدود الحقيقية للفئات
1	10 -	12	
2			
3			

4			
5			
6			

تمرين2 : أكمل الجدول الآتي :

	C	X	الحدود الحقيقية للفئات
1			
2			
3			
4			
5			
6	90 – 99		

تمرين 3 : البيانات الآتية تمثل درجات 30 طالب في مادة الاحصاء :

١- أنشئ جدول التوزيع التكراري لدرجات الطلبة .

٢- استخرج الحدود الحقيقية للفئات ، مراكز الفئات .

13, 15, 25, 67, 88, 33, 90, 98, 78, 75, 44, 54, 31, 40. 89, 55, 76, 43, 38, 51, 34, 72, 69, 37, 33, 42, 88, 78, 79,29

التوزيع التكراري المتجمع (Cumulativ frequency distribution) :

وهو التوزيع الذي يبين كمية التكرار المتجمع عن قيمة معينة من قيم المتغير العشوائي.

وهو على نوعين :

أ- **التوزيع التكراري المتجمع الصاعد ($F_i\uparrow$)** :

وهو التوزيع الذي يبين تراكم التكرارات ابتداءً من الفئة الأولى في التوزيع وانتهاءً بالفئة الأخيرة منه . ويتم حساب التكرارات المتجمعة على أساس الحدود العليا للفئات .

ب- **التوزيع التكراري المتجمع النازل ($F_i\downarrow$)** :

وهو التوزيع الذي يبين تناقص التكرارات ابتداءً من الفئة الأولى في التوزيع وانتهاءً بالفئة الأخيرة منه . ويتم حساب التكرارات المتجمعة على أساس الحدود الدنيا للفئات .

4			
5			
6			

تمرين2 : أكمل الجدول الآتي :

	C	X	الحدود الحقيقية للفئات
1			
2			
3			
4			
5			
6	90 – 99		

تمرين 3 : البيانات الآتية تمثل درجات 30 طالب في مادة الاحصاء :

١- أنشئ جدول التوزيع التكراري لدرجات الطلبة .

٢- استخرج الحدود الحقيقية للفئات ، مراكز الفئات .

13, 15, 25, 67, 88, 33, 90, 98, 78, 75, 44, 54, 31, 40. 89, 55, 76, 43, 38, 51, 34, 72, 69, 37, 33, 42, 88, 78, 79,29

التوزيع التكراري المتجمع (Cumulativ frequency distribution) :

وهو التوزيع الذي يبين كمية التكرار المتجمع عن قيمة معينة من قيم المتغير العشوائي.

وهو على نوعين :

أ- **التوزيع التكراري المتجمع الصاعد ($F_i\uparrow$)** :

وهو التوزيع الذي يبين تراكم التكرارات ابتداءً من الفئة الأولى في التوزيع وانتهاءً بالفئة الأخيرة منه . ويتم حساب التكرارات المتجمعة على أساس الحدود العليا للفئات .

ب- **التوزيع التكراري المتجمع النازل ($F_i\downarrow$)** :

وهو التوزيع الذي يبين تناقص التكرارات ابتداءً من الفئة الأولى في التوزيع وانتهاءً بالفئة الأخيرة منه . ويتم حساب التكرارات المتجمعة على أساس الحدود الدنيا للفئات .

مثال :الآتي جدول توزيع تكراري يمثل توزيع 60 عائلة فلاحية حسب ملكيتها من عدد أشجار البرتقال . المطلوب تكوين التوزيع التكراري المتجمع الصاعد والنازل :

	C	f_i	$\uparrow F_i$	$\downarrow F_i$
1	60 – 74	4	4	60
2	75 – 89	5	9	56
3	90 – 104	10	19	51
4	105 – 119	12	31	41
5	120 – 134	16	47	29
6	135 – 149	7	54	13
7	150 – 164	6	60	6
		60		

ثانياً : التمثيل البياني لجدول التوزيع التكراري

١- المدرج التكراري :

هو عبارة عن مستطيلات رأسية تمتد قواعدها على المحور الأفقي لتمثل أطوال الفئات بينما يمثل ارتفاعها تكرارات الفئات .

خطوات رسم المدرج التكراري :

١- رسم المحورين الأفقي والعمودي .

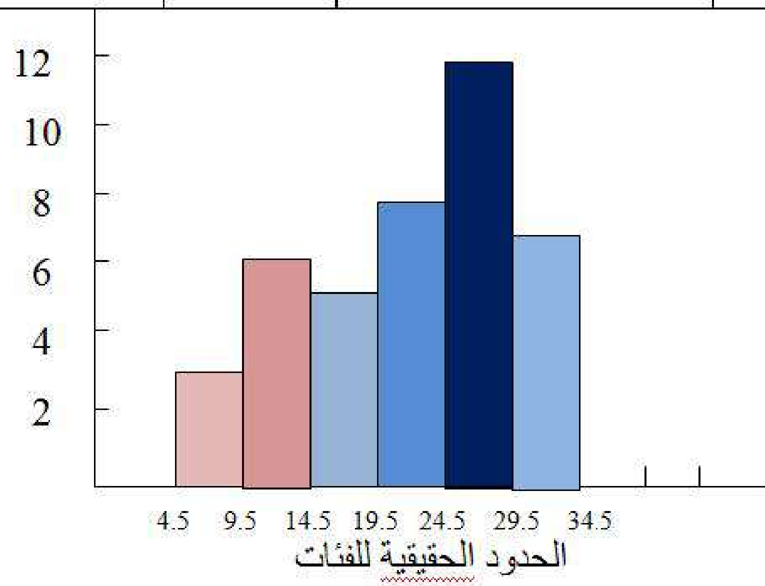
٢- تدريج المحور الأفقي الى أقسام متساوية بحيث يشمل جميع الحدود الحقيقية للفئات ، ويقسم المحور العمودي الى اقسام متساوية بحيث يشمل على اكثر التكرارات .

٣- يرسم على كل فئة مستطيلاً رأسياً تمثل قاعدته طول تلك الفئة وارتفاعه يمثل تكرارات تلك الفئة .

مثال :ارسم المدرج التكراري لجدول التوزيع التكراري الآتي :

	C	F_i	الحدود الحقيقية للفئات	X
1	5 – 9	3	4.5 – 9.5	7
2	10 – 14	6	9.5 – 14.5	12

3	15 – 19	5	14.5 – 19.5	17
4	20 – 24	8	19.5 – 24.5	22
5	25 – 29	12	24.5 – 29.5	27
6	30 – 34	7	29.5 – 34.5	32
$\sum f_i$		41		



٢- المضلع التكراري :

هو عبارة عن خطوط مستقيمة متكسرة تصل بين نقاط كل منها واقعة فوق مركز فئة على ارتفاع يمثل تكرار تلك الفئة .

ملاحظة : عادة يغلق المضلع بأن نصل بداية المضلع بالمحور الأفقي بمركز فئة (خيالية) واقعة الى يسار أول فئة تكرارها صفراً ، ونصل نهاية المضلع بالمحور الأفقي بمركز فئة(خيالية) واقعة الى يمين اخر فئة تكرارها صفراً أيضاً .

خطوات رسم المضلع التكراري :

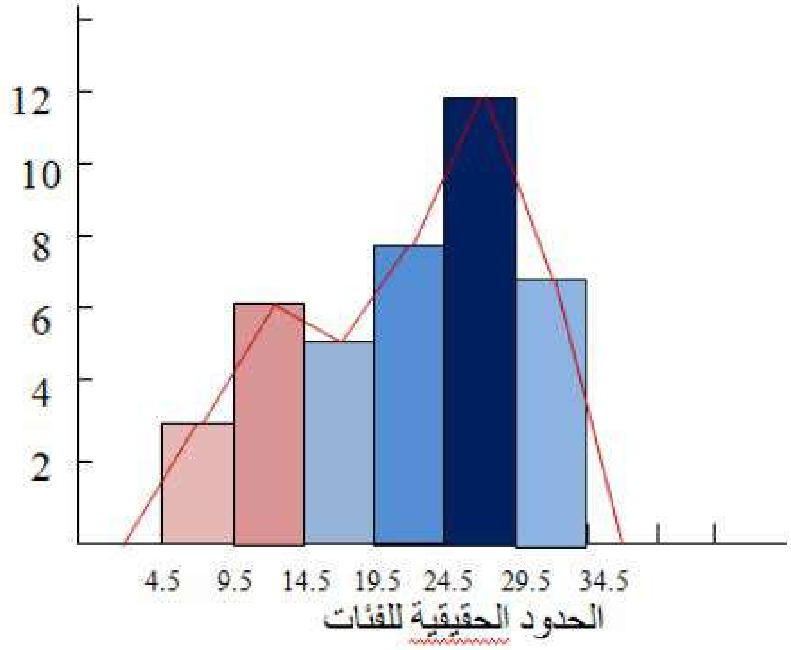
١- رسم المحورين الأفقي والعمودي .

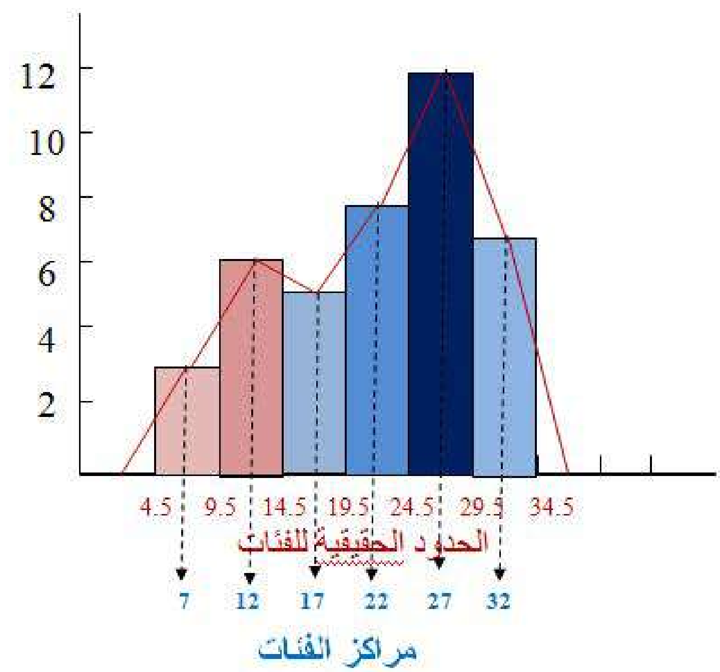
٢- تدريج المحور الأفقي الى أقسام متساوية بحيث يشمل جميع مراكز الفئات ، ويقسم المحور العمودي الى اقسام متساوية بحيث يشمل على اكثر التكرارات .

٣- وضع نقطة أمام مركز كل فئة ارتفاعها يعادل تكرار تلك الفئة .

٤- توصيل تلك النقاط بخطوط مستقيمة .

مثال : ارسم المضلع التكراري للمثال السابق :





٣- المنحني التكراري :

وهو عبارة عن منحني يمر بمعظم النقاط الواقعة على مراكز الفئات والتي ارتفاعها يمثل تكرارات تلك الفئات

ملاحظة : يفضل غلق المنحني التكراري بأن نصل بدايته بالحد الأدنى للفئة الأولى ونهايته بالحد الأعلى للفئة الأخيرة . وتكون مساحة المنحني (مكافئة) وليست مساوية للمضلع التكراري .

٤ـ الدائرة البيانية :

تعد هذه الطريقة أفضل الطرق لتمثيل البيانات ذات الصفة المشتركة ونستطيع بواسطتها أن نقارن الأجزاء بعضها ببعض ثم الجزء (القطاع الدائري) بالكل (الدائرة) .

خطوات رسم الدائرة البيانية :

١- استخراج زاوية القطع = ($\frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}} \times 360$)

٢- -نرسم دائرة معينة ونرسم عليها نصف القطر.

٣- نرسم الزاوية المركزية التي ضلعها الابتدائي نصف القطر والممثلة بالقطاع.

مثال/مجموعة من الفاكهة وزعت على طلاب القسم الداخلي وكانت كالآتي :

المجموع	رمان	برتقال	موز	تفاح	نوع الفاكهة
1080	270	90	540	180	العدد

المطلوب تمثيل هذه البيانات بالقطاع الدائري.

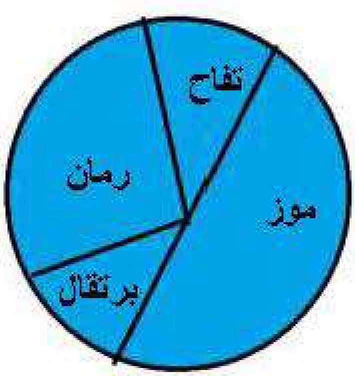
الحل :

زاوية قطاع التفاح= $\frac{180}{1080} \times 360 = 60°$

زاوية قطاع الموز= $\frac{540}{1080} \times 360 = 180°$

زاوية قطاع البرتقال= $\frac{90}{1080} \times 360 = 30°$

زاوية قطاع الرمان= $\frac{270}{1080} \times 360 = 90°$



تمارين :

١- الآتي توزيع تكراري لدرجات (40) طالباً في مادة الإحصاء الترب

93	82	78	71	70	92	56	81
74	73	72	68	75	51	65	93
35	90	83	73	74	43	86	68
92	76	71	90	72	67	75	91
80	61	72	97	91	88	81	74

اعرض البيانات أعلاه مستخدماً كل من العرض الجدولي والعرض البياني :

٢- أكمل جدول التوزيع التكراري الآتي ، ثم اعرض البيانات في الجدول باستخدام التمثيل البياني :

	C	f_i	X
1	1 -	2	4
2		4	
3		7	
4		12	
5		10	
6		15	
7		8	
8		6	
9		4	

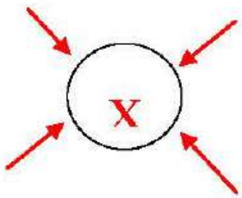
الفصل الثالث

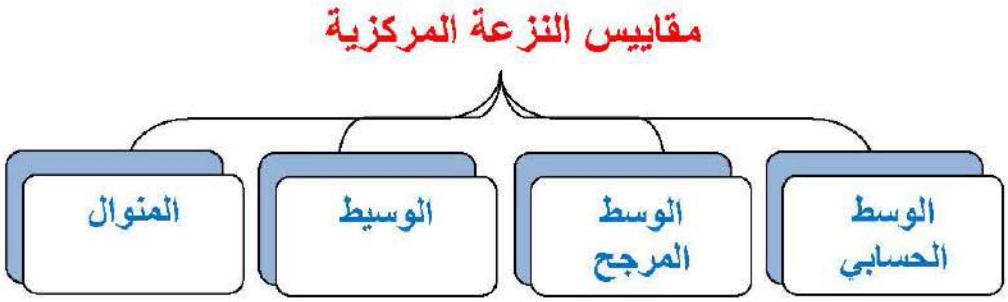
المقاييس الاحصائية

مقاييس النزعة المركزية Measures of Central Tendency

إن مصطلح النزعة المركزية يعني التمركز والتكثف نحو رقم معين .

تعرف مقاييس النزعة المركزية بأنها تلك المقاييس التي تبحث عن قيمة تتمركز حولها أغلبية البيانات ، وإن هذه القيمة المتوسطة هي رقم واحد يعبر عن جميع بيانات تلك المجموعة .





١ ـ الوسط الحسابي (المتوسط) : (The Arithmetic Mean)

وهو القيمة الناتجة عن قسمة مجموع القيم على عددها . ويرمز له بالرمز $\bar{X}$.

طرق إحتساب الوسط الحسابي :

١- في حالة البيانات غير المبوبة :

إذا كان لدينا $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots\ldots , x_n$ بيانات المتغير العشوائي x عددها n من المفردات ،فإن الوسط الحسابي لها:

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

حيث : x : القيم للمتغير

n : عدد القيم .

مثال : البيانات الآتية تمثل درجات 15 طالب في مادة الإحصاء (80, 81, 55, 32, 43, 95, 90, 36, 49, 58, 69, 75, 65, 72, 60) أوجد الوسط الحسابي لدرجات الطلاب.

الحل :

$$\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$= \frac{60 + 72 + 65 + 75 + 69 + 58 + 49 + 36 + 80 + 81 + 55 + 32 + 43 + 95 + 90}{15}$$

$$= \frac{987}{15} = \mathbf{65.8}$$

أي أن معدل درجات الطلبة هو 65.8 .

٢- في حالة البيانات المبوبة :

إذا كانت $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots\ldots , x_n$ تمثل مراكز فئات في توزيع تكراري عدد فئاته m فئة ، و $f_1, f_2, \ldots , f_n$ هي تكرارات تلك الفئات فإن الوسط الحسابي يستخرج من الصيغة الآتية :

$$\bar{X} = \frac{\sum (X)(f_i)}{\sum f_i}$$

حيث : X تمثل مراكز الفئات

f_i تمثل التكرارات

مثال : أوجد الوسط الحسابي للبيانات الآتية :

	C	f_i	X	Xf_i
1	2 – 6	2	4	8
2	7 – 11	8	9	72
3	12 – 16	6	14	84
4	17 – 21	1	19	19
5	22 – 26	5	24	110
$\sum$		22		203

الحل :

$$\bar{X} = \frac{\sum (X f_i)}{\sum f_i} = \frac{203}{22} = \mathbf{9.22}$$

خصائصه الوسط الحسابي :

١- مجموع انحرافات قيم المتغير العشوائي X عن وسطها الحسابي الذي أحتسب منها يساوي صفر .

للبيانات غير المبوبة : $\sum(x_i - \bar{x}) = 0$

البرهان :

$$\sum(x_i - \bar{x}) = \sum x_i - \sum \bar{x}$$
$$= \sum x_i - n.\bar{x}$$
$$= \sum x_i - n\frac{\sum x_i}{n}$$
$$= \sum x_i - \sum x_i = 0$$

للبيانات المبوبة : $\sum f_i(x_i - \bar{x}) = 0$

البرهان :

$$\sum f_i(x_i - \bar{x}) = \sum f_i x_i - \bar{x}\sum f_i$$
$$= \sum f_i x_i - \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}\sum f_i$$
$$= \sum f_i x_i - \sum f_i x_i = 0$$

٢- عند إضافة عدد ثابت k إلى كل قيمة من قيم المفردات (المشاهدات) فإن قيمة الوسط الحسابي تزداد بمقدار العدد الثابت . أي إن :

$$X_i = y_i + k \longrightarrow \bar{x} = \bar{y} + k$$

البرهان :

$$X_i = y_i + k$$
$$\sum x_i = \sum y_i + n.k$$

نقسم طرفي المعادلة على n

$$\frac{\sum X_i}{n} = \frac{\sum y_i}{n} + \frac{n.k}{n}$$

$$\bar{x} = \bar{y} + k$$

٣- عند ضرب عدد ثابت k إلى كل قيمة من قيم المفردات (المشاهدات) فإن قيمة الوسط الحسابي تكون مساوية لحاصل ضرب العدد الثابت في الوسط الحسابي .

$$X_i = y_i . k \longrightarrow \bar{x} = \bar{y} . k$$

البرهان :

$$X_i = y_i . k$$

$$\sum x_i = \sum y_i \cdot n.k$$

$$\frac{\sum X_i}{n} = \frac{\sum y_i}{n} \cdot \frac{n.k}{n}$$

نقسم طرفي المعادلة علىn

$$\bar{x} = \bar{y} . k$$

٤- اذا ضربت كل مشاهدة من المشاهدات بقدار ثابت a واضيف لها مقدار ثابتb فان الوسط الحسابي الجديد = الوسط الحسابي الاصلي مضروب في a ومضاف له b.

$$x_i = ay_i + b \longrightarrow \bar{x} = a\bar{y} + b$$

البرهان :

$$\sum x_i = \sum (ay_i + b)$$

$$\sum X_i = a\sum y_i + \sum b$$

$$\sum x_i = a\sum y_i + n.b$$

$$\frac{\sum X_i}{n} = a\frac{\sum X_i}{n} + \frac{n.k}{n}$$

نقسم طرفي المعادلة علىn

$$\bar{x} = a\bar{y} + b$$

٥- الوسط الحسابي لمجموع قيم متغيرين = مجموع الوسطين الحسابيين للمتغيرين .

$$z_i = x_i + y_i \longrightarrow \bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$$

$$z_i = x_i + y_i$$

$$\sum z_i = \sum (x_i + y_i)$$

$$\sum z_i = \sum x_i + \sum y_i$$

نقسم طرفي المعادلة على n

$$\frac{\sum z_i}{n} = \frac{\sum X_i}{n} + \frac{\sum y_i}{n}$$

$$\bar{z} = \bar{x} + \bar{y}$$

٦- لا يمكن ايجاده في التوزيعات التكرارية والجداول المفتوحة (غير المنتهية) .

٧- الوسط الحسابي يتأثر بالقيم المتطرفة .

٨- مجموع مربعات انحرافات قيم المتغير العشوائي X عن وسطها الحسابي الذي أحتسب منها يكون أقل ما يمكن .

٩- يتأثر الوسط الحسابي بالقيم المتطرفة (صغيرة أو كبيرة) التي تقع على جانبي التوزيع .

H. W.

١) الآتي توزيع تكراري لدرجات 92 طالب في مادة الاحصاء التربوي ، المطلوب ايجاد متوسط درجات الطلبة في مادة الاحصاء :

	C	F_i
1	21 – 30	4
2	31 – 40	7
3	41 – 50	10
4	51 – 60	15
5	61 – 70	18
6	71 – 80	12
7	81 – 90	6
8	91 – 100	18

٢) الآتي توزيع تكراري لدرجات (25) طالب في مادة الاحصاء التربوي ، استخرج معدل درجات الطلبة مستخدماً

أ) حالة البيانات غير المبوبة ب) البيانات المبوبة :

80, 84, 48, 77, 65, 71, 20, 55, 67, 65, 88, 35, 24, 31, 44, 90, 66, 45, 78, 79, 74, 70, 44, 56, 50

٣) أ) أكمل جدول التوزيع التكراري أدناه

ب) ارسم المدرج والمضلع التكراري

ج) استخرج الوسط الحسابي

	C	F_i	X
1	10 -	4	14.5
2		7	
3		10	
4		25	
5		18	
6		12	
7		6	
8		18	

٤) جد قيمة z التي تجعل قيمة الوسط الحسابي في المجموعة z ,37 ,31 ,28 ,25 ,20 مساوٍ إلى 30 .

٥) إذا علمت أن الوسط الحسابي للتوزيع التكراري الآتي هو 39 ، جد قيمة f.

	C	f_i
1	10 – 19	2
2		4
3		6
4		8
5	50 - 59	F

٦) صنف صف إل عدد من الطلاب والطالبات ، بحيث كان متوسط عمر الذكور فيه 20 سنة ، ومتوسط عمر الاناث 19.5 سنة ، أوجد متوسط عمر الذكور والاناث معاً .

٢- الوسط الحسابي المرجح (s الموزون) :(Weighted Mean)

يستخدم الوسط الحسابي المرجح ($\overline{X}_w$) عندما تكون بعض المفردات أكثر أهمية من الأحرى مما يستوجب أخذ هذه الأهمية بنظر الاعتبار عند استخراج الوسط الحسابي .

ومن الأمثلة عليه (استخراج معدل الطالب الجامعي في فصل دراسي)، إذ أن الأمر يتطلب احتساب معدل درجات الطالب موزونة بعدد الساعات الاسبوعية لكل مادة من المواد التي تدخل في حساب المعدل .

فإذا كانت $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots\ldots , x_n$ بيانات المتغير العشوائي x قوامها (عددها) n من المفردات ، وكانت $w_1, w_2, \ldots , w_n$ تمثل أوزان هذه البيانات فإن الوسط الحسابي المرجح يمكن استخراجه كما يأتي :

$$\overline{X}_w = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$$

حيث : $\overline{X}_w$ هو الوسط الحسابي المرجح

$\sum w_i x_i$ هو مجموع حاصل ضرب كل مفردة بوزنها

$\sum w_i$ هو مجموع أوزان المفردات

مثال : طالب جامعي في السنة الثالثة كانت درجاته في نهاية الفصل كالاتي:

اسم المادة	قياس وتقويم	علم النفس	اللغة العربية	E	ارشاد تربوي	صحة
الدرجة	72	80	90	65	65	70
عدد الساعات	3	3	2	2	2	2

فما هو معدله في الفصل الدراسي ؟

الحل :

$$\overline{X}_w = \frac{\sum w_i x_i}{\sum w_i}$$

$$= \frac{70.2+65.2+65.2+90.2+80.3+72.3}{14}$$

$$= \frac{1036}{14}$$

$$= 74$$

ملاحظة : إن الوسط الحسابي الاعتيادي هو حالة خاصة من الوسط الحسابي المرجح

امثلة وتدريبات مشتركة بين الطلبة عن كيفية احتساب الوسط الحسابي للبيانات المبوبة وغير المبوبة مع واجبات تتعلق بهذا الموضوع

٣ – الوسيط : (The Median)

هي القيمة التي تفصل القيم الى مجموعتين متساويتين أحدهما أكبر من القيمة والأخرى أصغر من القيمة . ويرمز له بالرمز (Me) .

أصغر ← → أكبر

X x x (x) x x x

المجموعة الدنيا   الوسيط   المجموعة العليا

أصغر ← → أكبر

X x x (**x x**) x x x

المجموعة الدنيا   الوسيط   المجموعة العليا

طرق حسابه :

أ – في حالة البيانات غير المبوبة :

إذا كان لدينا $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots\ldots , x_n$ بيانات المتغير العشوائي x عددها n من المفردات ، ورتبت تصاعدياً أو تنازلياً فإن الوسيط يحتسب من :

١- إذا كانت n عدداً فردياً فإن الوسيط هو القيمة التي يكون ترتيبها $\frac{n+1}{2}$

٢- إذا كانت n عدداً زوجياً فإن الوسيط هو متوسط للقيمتين التي يكون ترتيبهما

$$\frac{n}{2} , \frac{n}{2} + 1$$

خطوات استخراجه في حالة البيانات غير المبوبة :

١- ترتب البيانات تصاعدياً أو تنازلياً .

٢- تحديد قيمة n هل هي عدد فردي أم زوجي .

٣- تحديد ترتيب الوسيط .

٤- القيمة التي تقابل ترتيب الوسيط تكون هي الوسيط إذا كان n فردي ، ومتوسط القيمتين إذا كان n زوجي .

مثال : أوجد الوسيط لدرجات خمسة طلاب في امتحان مادة الإحصاء إذا علمت أن الدرجات هي :

84, 87, 76, 82, 80

الحل :

١- ترتب البيانات ترتيباً تصاعدياً : 76 , 80, 82, 84, 87

٢- تحديد قيمة n : n = 5 (عدد فردي)

٣- تحديد ترتيب الوسيط : الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{n+1}{2} = \frac{5+1}{2} = 3$

٤- استخراج قيمة الوسيط : $Me = X_3 = 82$

مثال ٢ : أوجد الوسيط للقيم الآتية : 84, 87, 76, 82, 80, 88

الحل : ترتب البيانات ترتيباً تصاعدياً 76 , 80, 82, 84, 87, 88

n = 6 (عدد زوجي)

الوسيط هو القيمة التي ترتيبها $\frac{n}{2} , \frac{n}{2} + 1 = \frac{6}{2} , \frac{6}{2} + 1$

$= X_3 , X_4 = 82 , 84$

$$Me = \frac{82 + 84}{2} = 83 \qquad = 83$$

ب – في حالة البيانات المبوبة :

إذا كانت $x_1 , x_2 , x_3 , \ldots\ldots , x_n$ تمثل مراكز فئات في توزيع تكراري عدد فئاته m فئة ، وكانت $f_1, f_2, \ldots , f_n$ تمثل التكرارات المقابلة لتلك الفئات ، وافرض أن $F_1, F_2 , \ldots , F_n$ تمثل التكرارات المتجمعة الصاعدة المقابلة للحدود العليا لفئات التوزيع ، ولتكن $\frac{\sum f_i}{2}$ تمثل ترتيب الوسيط في هذا التوزيع ، فإذا كان $F_1 < \frac{\sum f_i}{2} < F_2$

عندئذٍ يقال أن قيمة الوسيط هي الفئة التي تسلسلها هو K ، وسوف يتم حساب قيمة الوسيط وفق الصيغة الآتية :

$$\boxed{Me = L.L. + \frac{\frac{\sum f_i}{2} - F_1}{f_2} \, (L.)}$$

حيث :

L L. : الحد الأدنى الحقيقي للفئة الوسيطية.

$\frac{\sum f_i}{2}$: مجموع التكرارات مقسوم على 2 (ترتيب الوسيط)

$F_1\uparrow$: التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية .

f_2 : تكرار الفئة الوسيطية .

L. : طول الفئة .

خطوات إيجاد الوسيط :

١- عمل جدول توزيع تكراري متجمع صاعد .

٢- نستخرج ترتيب الوسيط = $\frac{\sum f_i}{2}$

٣- تحديد الفئة الوسيطية : وهي الفئة التي يكون تكرارها المتجمع الصاعد يساوي ترتيب الوسيط أو أكبر منه .

٤- تطبيق القانون .

مثال : أوجد الوسيط لجدول التوزيع التكراري الآتي جبرياً وبيانياً :

	C	F_i
1	20 – 29	4
2	30 – 39	6
3	40 – 49	2
4	50 – 59	10
5	60 – 69	12
6	70 – 79	8
7	80 – 89	3

الحل :

١) ايجاد التكرار المتجمع الصاعد:

	C	f_i	$F_i\uparrow$
1	20 – 29	4	4
2	30 – 39	6	10
3	40 – 49	2	12
4	50 – 59	10	22
5	60 – 69	12	34
6	70 – 79	8	42
7	80 – 89	3	45

٢) نستخرج ترتيب الوسيط $\frac{\sum f_i}{2} = \frac{45}{2} = 22.5$

٣) نحدد الفئة الوسيطية وهي (69 – 60)

٤) تطبيق القانون

$$Me = L.\,L. + \frac{\frac{\sum f_i}{2} - F_1\uparrow}{f_2}\,(L.)$$

$$= 59.5 + \frac{22.5 - 22}{12}\,(10)$$

$$= 59.5 + 0.41 = 59.91$$

لايجاد الوسيط بيانياً بالرسم

١) نرسم المحورين الافقي والعمودي .

٢) نعين على المحور الافقي الحدود العليا للفئات ، وعلى المحور العمودي التكرارات المتجمعة الصاعدة .

٣) نعين نقاط أعلى كل حد أعلى للفئة ارتفاعها يساوي التكرار المتجمع الصاعد لتلك الفئة

٤) نصل بين هذه النقاط .

خصائص الوسيط :

١- لا يتأثر اطلاقاً بالقيم المتطرفة .

٢- يمكن تعيينه هندسياً .

٣- يمكن حسابه في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة س طرف واحد أو طرفين .

H. W.

١) استخرج الوسط الحسابي المرجح للتوزيعات الآتية :

X_i	10	18	15	11	19	22	20
W_i	1	4	3	2	5	7	6

X_i	1	0	2	2	3	1	4
W_i	2	4	3	5	3	2	2

٢) في جدول التوزيع التكراري الآتي :

أ) رسم المدرج والمضلع التكراري لهذا التوزيع .

ب) أوجد الوسط الحسابي .

ج) أوجد الوسيط جبرياً وبيانياً .

	C	f_i
1	11 – 15	3
2	16 – 20	8
3	21 – 25	15
4	26 – 30	25
5	31 – 35	20
6	36 – 40	17
7	41 – 45	6
8	46 – 50	10

٣) الآتي توزيع تكراري لكميات الكهرباء المستهلكة (كيلو واط) من قبل 40 دار سكنية خلال شهر واحد

الاستهلاك (كيلو واط)	800 -	900 -	1000 -	1100 -	1200 -	1300 فأكثر
عدد الدور	7	8	15	5	3	2

جد الوسط والوسيط للكمية المستهلكة من الكهرباء ثم تحقق من ذلك بالرسم .

٤) أ) أكمل جدول التوزيع التكراري أدناه ، وارسم المدرج والمضلع التكراري ، واستخرج الوسيط جبرياً وبيانياً .

	C	F_i	X
1	10 -	4	14.5
2		7	
3		10	
4		25	
5		18	
6		12	
7		6	
8		18	

٥) جد قيمة z التي تجعل قيمة الوسط الحسابي في المجموعة 20, 25, 28, 31, 37, z مساوٍ إلى 30 ، ثم استخرج الوسيط .

٤ – المنوال : (The Mode)

يعرف المنوال بأنه القيمة الأكثر تكراراً وشيوعاً بين مجموعة من القيم ، ويرمز له بالرمز (Mo) .

طرق حساب المنوال :

١ – في حالة البيانات غير المبوبة :

لتكن x_n , …… , x_3 , x_2 , x_1 بيانات المتغير العشوائي x في توزيع تكراري قوامها (عددها) n من المفردات ، ولنفرض أن x_j قيمة من قيم هذه المجموعة لوحظ أنها تكررت أكثر من غيرها ، عندئذٍ وبحسب تعريف المنوال فإن x_j تمثل المنوال لهذه المجموعة .

أ- إذا لم تتكرر أية قيمة فلا يوجد منوال :

مثال : أوجد المنوال للقيم الآتية : 15, 12, 16, 22, 17 ,18, 19

الحل : لا يوجد منوال لهذه القيم لعدم وجود قيمة مكررة فيها .

ب- إذا تكرر أحدى القيم أكثر من غيرها فإن هناك منوال واحد .

مثال : أوجد المنوال للقيم الآتية : 15, 12, 16, 22, 15 ,18, 19

الحل : المنوال (Mo) = 15 لأنها القيمة الأكثر تكراراً .

ج- إذا كان لقيمتين من قيم التوزيع نفس العدد من التكرارات فإن هناك منوالين .

مثال : أوجد المنوال للقيم الآتية : 15, 12, 16, 22, 15 ,18, 19,19

الحل : يوجد منوالان هما 19 , 15 لأن لهما نفس التكرارات .

٢ – في حالة البيانات المبوبة :

إذا كانت x_n ,…… , x_2 , x_1 تمثل مراكز فئات في توزيع تكراري عدد فئاته m فئة ، و … ,f_1, f_2 , f_n هي تكرارات تلك الفئات **فإن المنوال يستخرج بإتباع الخطوات الآتية :**

١- تحديد الفئة المنوالية : : وهي الفئة التي تقابل أعلى تكرارٍ بين الفئات .

٢- تحديد الفرق ما بين تكرار الفئة المنوالية والفئة السابقة لها ، وليكن f_1 .

٣- تحديد الفرق ما بين تكرار الفئة المنوالية والفئة اللاحقة لها ، وليكن f_2 .

٤- تطبيق العلاقة الآتية لإيجاد المنوال :

$$Mo = L.L. + \frac{f_1}{f_1 + f_2}(L.)$$

حيث .L.L الحد الأدنى الحقيقي للفئة المنوالية .

.L طول الفئة

مثال : أوجد المنوال جبرياً وبيانياً لجدول التوزيع التكراري الآتي :

	C	f_i
1	20 – 29	2
2	30 – 39	4
3	40 – 49	7
4	50 – 59	10
5	60 – 69	8
6	70 – 79	5
7	80 – 89	3

الحل :

1) 50 – 59 الفئة المنوالية

2) $f_1 = 10 - 7 = 3$

3) $f_2 = 10 - 8 = 2$

4) $Mo = L.L. + \frac{f_1}{f_1 + f_2}(L.)$

$$= 49.5 + \frac{3}{3 + 2}(10)$$

$$= 55.5$$

ولإيجاد المنوال بيانياً (بالرسم) نتبع الخطوات الآتية :

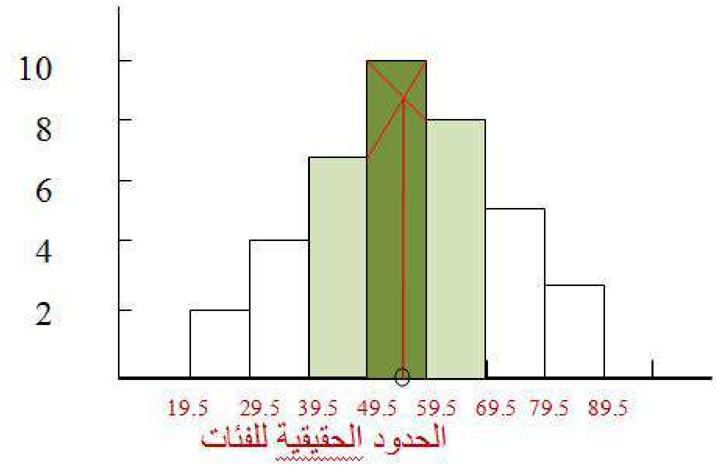
١) نرسم المدرج التكراري .

٢) نحدد الفئة المنوالية : وهي الفئة التي تقابل أكبر تكرار

٣) نحدد الفئة السابقة والفئة اللاحقة الفئة المنوالية .

٤) نرسم خط مستقيم يصل بداية عمود المنوال (العمود الأعلى تكراراً) ببداية العمود الذي بعده ، وخط مستقيم آخر يصل نهاية عمود المنوال بنهاية العمود السابق له .

٥) من نقطة تقاطع المستقيمين نرسم مستقيم عمودي على المحور الافقي ، نقطة تقاطعهما تمثل المنوال .



خصائص المنوال :

١- لا يتأثر بالقيم المتطرفة (صغيرة أو كبيرة) التي تقع على جانبي التوزيع .

٢- يمكن ايجاده بسهولة لأنه القيمة الأكثر تكراراً بين القيم .

٣- يمكن ايجاده في التوزيعات التكرارية المفتوحة (غير المنتهية) والجداول المفتوحة .

العلاقة بين مقاييس النزعة المركزية:

تحدد العلاقة بالقانون الاتي:

$$\boxed{\overline{X} - Mo = 3(\overline{X} - Me)}$$

مثال : في احد التوزيعات التكرارية إذا كانت قيمة $Mo=17$ و $\overline{X}=12$, جد Me

الحل :

$$\overline{X} - Mo = 3(\overline{X} - Me)$$

$$12 - 17 = 3(12 - Me)$$

$$-5 = 36 - 3Me$$

$$3Me = 36 + 5$$

$$3Me = 41$$

$$Me = \frac{41}{3}$$

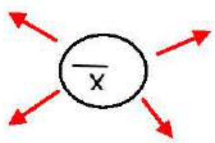
امثلة وتدريبات مشتركة بين الطلبة عن كيفية احتساب الوسيط والمنوال ومقاييس التشتت مع واجبات تتعلق بهذا الموضوع

الفصل الرابع

مقاييس التشتت

وردت كلمة تشتت في الأدبيات الاحصائية بمعنى مبعثر(Scattered) أي انتشار قيم مجموعة من البيانات .

ويعرف التشتت بأنه الدرجة التي تتجه بها البيانات الكمية للتباعد والانتشار عن بعضها البعض ، أو حول قيمة متوسطة وغالباً ما تكون أحد مقاييس النزعة المركزية (الوسط ،والوسيط) .



وإن الهدف من دراسة التشتت هو تكوين فكرة عن مدى تجانس قيم مجموعة من المفردات ، وهذا يعني أن دراسة التشتت أمر مفيد في اجراء المقارنة بين قيم مجموعة أو أكثر من البيانات عن ظاهرة معينة .

فعلي سبيل المثال : إن الوسط الحسابي للمجاميع الآتية هو (9)

المجموعة ١ : 7, 8, 9, 10, 11 المجموعة ٢ : 3, 6, 9, 12, 15

المجموعة ٣ : 1, 5, 9, 13, 17

نلاحظ أن المجموعة الأولى أكثر تجانساً (أقل انتشاراً) من والمجوعتين الثانية والثالثة كذلك فإن المجموعة الثانية أكثر تجانساً من المجموعة الثالثة ، كما موضح في الشكل :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
المجموعة ١							×	×	×	×	×						
المجموعة ٢			×			×			×			×			×		
لبمجموعة٣	×				×				×				×				×
									$\bar{x}$								

نلاحظ من المثال إنه أمكن اجراء المقارنة بين المجموعات الثلاث بعد أن كانت المقارنة بينهما على أساس الوسط الحسابي عديمة الفائدة .

مثال : كانت درجات الحرارة ثلاثة من المحافظات الشمالية هي كالآتي :

المحافظة الأولى : $-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$

المحافظة الثانية : $-3, -2, -1, 0, 2, 4, 7$

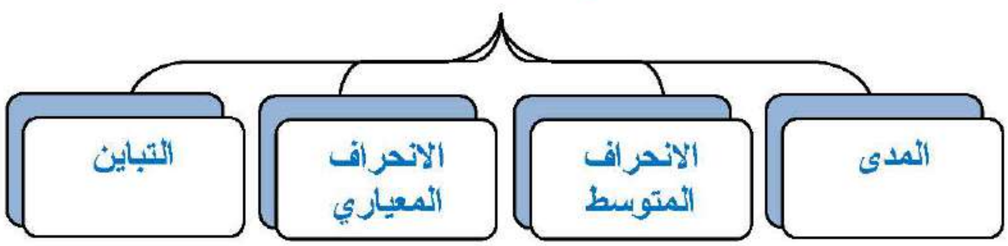
المحافظة الثالثة : $-1, 0, 0, 1, 2, 2, 3$

في أية محافظة كان الجو أكثر استقراراً ؟

مقاييس التشتت

تعرف مقاييس التشتت بأنها المقاييس التي تبحث في مقدار الاختلافات بين البيانات وهي على الأنواع الاتية :

أنواع مقاييس التشتت



١- المدى (Range):

هو الفرق ما بين اكبر قيمة واصغر قيمة في المجموعة ، ويرمز له بالرمز R .

فإذا كانت $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ تمثل بيانات مجموعة من المفردات قوامها (عددها) n وإن x_l أكبر قيمة فيها ، وإن x_s أصغر قيمة فيها عندئذٍ فإن المدى في هذه المجموعة هو :

$$\boxed{R = x_l - x_s}$$

مثال : أوجد المدى للبيانات الآتية : 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12

الحل : الندى هو الفرق ما بين أكبر قيمة وأصغر قيمة

$$R = x_l - x_s$$

$$R = 12 - 3 = 9$$

٢- الانحراف المتوسط :

ويعرف بأنه مجموع الانحرافات المطلقة لقيم متغير عشوائي عن نقطة اختيارية مثل A مقسوماً على عدد هذه القيم . وغالباً ما نختار النقطة A لأن تكون أحد مقاييس النزعة المركزية الثلاثة (الوسط الحسابي ، الوسيط ، المنوال) . ويرمز له بالرمز M.D .

طرق حساب الانحراف المتوسط :

١- في حالة البيانات غير المبوبة :

لتكن $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ تمثل بيانات مجموعة من المفردات قوامها (عددها) n، وكانت A ثابت اختياري ، عندئذٍ يمكن حساب الانحراف المتوسط لهذه المجموعة وفق القانون الآتي :

$$M.D = \frac{\sum |x_i - A|}{n}$$

حيث A : أي مقياس من مقاييس النزعة المركزية .

خطوات استخراج الانحراف المتوسط :

١- تحديد قيمة مقياس النزعة المركزية (الوسط، الوسيط، المنوال).

٢- ايجاد الفرق بين كل قيمة من قيم المتغير (البيانات) وقيمة A .

٣- ايجاد القيمة المطلقة للفرق ، ثم ايجاد المجموع وقسمته على n .

ففي المثال السابق : أوجد الانحراف المتوسط للبيانات الآتية باستخدام (الوسط الحسابي ، الوسيط ، المنوال) : **3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12**

الحل :

أ) باستخدام الوسط الحسابي

$$A = \bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{}$$

$$\bar{x} = \frac{54}{8} = 6.75$$

x_i	$x_i - \bar{x}$	$\lvert x_i - \bar{x} \rvert$	
3	-3.75	3.75	
4	-2.75	2.75	
5	-1.75	1.75	
7	0.25	025	

8	1.25	1.25	
9	2.25	2.25	
10	3.25	3.25	
12	5.25	5.25	
$\sum$		45.25	

$$M.D = \frac{\sum |x_i - \overline{x}|}{n}$$

$$= \frac{45.25}{8} = 5.65$$

مثال ٢ : أوجد الانحراف المتوسط للبيانات الآتية باستخدام (الوسط الحسابي ، الوسيط ، المنوال) :

2, 3, 4, 5, 6, 10, 11, 13, 12, 14

الحل :

ب) باستخدام الوسط الحسابي

if $A = \overline{x}$

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i}{}$$

$$\overline{x} = \frac{80}{10} = 8$$

x_i	$x_i - \overline{x}$	$\lvert x_i - \overline{x} \rvert$
2	-6	6
3	-5	5
4	-4	4
5	-3	3
6	-2	2
10	2	2
11	3	3
12	4	4
13	5	5
14	6	6
$\sum$		40

$$M.D = \frac{\sum |x_i - \overline{x}|}{n}$$

$$= \frac{40}{10} = 4$$

٢) باستخدام الوسيط : **if A = Me**

ترتيب الوسيط $\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1 \quad =5, 6$

$$Me = \frac{x_5 + x_6}{2}$$

$$= \frac{6 + 10}{2} = 8$$

x_i	$x_i - Me$	$\mid x_i - Me \mid$
2	-6	6
3	-5	5
4	-4	4
5	-3	3
6	-2	2
10	2	2
11	3	3
12	4	4
13	5	5
14	6	6
$\sum$		40

$$M.D = \frac{\sum \mid x_i - Me \mid}{n}$$

$$= \frac{40}{10} = 4$$

٣) باستخدام المنوال: **if A = Mo**

لا يوجد منوال وعليه الانحراف المتوسط في هذه الحالة هو

$$M.D = \frac{\sum \mid x_i - Mo \mid}{n} = \frac{80}{10} = 8$$

٢-في حالة البيانات المبوبة :

إذا كانت $x_1 , x_2 , \ldots\ldots , x_n$ تمثل مراكز فئات في توزيع تكراري عدد فئاته m فئة ، و $f_1, f_2, \ldots , f_n$ هي تكرارات تلك الفئات، ولنفرض أن A قيمة اختيارية ، عندئذٍ يمكن حساب الانحراف المتوسط باتباع الخطوات الآتية :

١) استخراج قيمة A وهي أحد مقاييس النزعة المركزية

٢) استخراج $f_i x_i$ وهو حاصل ضرب التكرار في مركز الفئة .

٣) ايجاد الفرق مابين $f_i x_i$ و A.

٤) أخذ القيمة المطلقة لها ، وايجاد المجموع لها وقسمتها على مجموع التكرارات .

٥) تطبيق القانون الآتي :

$$M.D = \frac{\sum |f_i x_i - A|}{\sum f_i}$$

وغالباً يتم اختيار A لتكون أحد مقاييس النزعة المركزية .

مثال : الآتي توزيع تكراري لدرجات مجموعة من الطلبة في مادة الاحصاء التربوي،

أوجد الانحراف المتوسط مستخدماً (الوسط ، الوسيط) :

	C	f_i
1	1 – 5	6
2	6 – 10	2
3	11 – 15	10
4	16 – 20	12
5	21 – 25	8
6	26 – 30	3

الحل :

١) في حالة الوسط : $\text{if } A = \overline{X}$

$$\overline{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} = 15$$

	C	f_i	X	$f_i X$	$f_i X - A$	$\lvert f_i X - A \rvert$
1	1 – 5	5	3	15	0	0
2	6 – 10	3	8	24	9	9
3	11 – 15	11	13	143	128	128
4	16 – 20	8	18	144	129	129

5	21 – 25	5	23	115	100	100
6	26 – 30	3	28	84	69	69
		35		525		435

$$M.D = \frac{\sum | f_i x_i - A |}{\sum f_i}$$

$$= \frac{435}{35} = 12.43$$

if A = Me ٢) في حالة الوسيط :

$$Me = L.L. + \frac{\frac{\sum f_i}{2} - F_1\uparrow}{f_2} (L.)$$

$$= 10.5 + \frac{17.5 - 8}{11} (5) = 14.82$$

	C	f_i	X	$F_1\uparrow$	f_i X	f_i X - A	| f_i X – A |
1	1 – 5	5	3	5	15	0.18	0.18
2	6 – 10	3	8	8	24	9.18	9.18
3	11 – 15	11	13	19	143	128.18	128.18
4	16 – 20	8	18	27	144	129.18	129.18
5	21 – 25	5	23	32	115	100.18	100.18
6	26 – 30	3	28	35	84	69.18	69.18
		35			525		436.08

$$M.D = \frac{\sum | f_i x_i - Me |}{\sum f_i}$$

$$= \frac{436.08}{35} = 12.4594$$

٣- الانحراف المعياري (القياسي) :

ويسمى في بعض الأحيان بالانحراف القياسي ، ويعد أفضل مقاييس التشتت على الاطلاق .

ويعرف بأنه الجذر التربيعي الموجب لمتوسط مجموع مربعات انحرافات قيم المتغير العشوائي عن وسطها الحسابي ، ويرمز له بالرمز s في حالة العينة وبالرمز 6 في حالة المجتمع .

٤- التباين :

ويعرف بأنه متوسط مجموع مربعات انحرافات قيم المتغير العشوائي عن وسطها الحسابي ، ويرمز له بالرمز S^2 في حالة العينة وبالرمز 6^2 في حالة المجتمع .

أي إنه مربع الانحراف المعياري .

طرق حساب الانحراف المعياري والتباين :

١) الانحراف المعياري والتباين للبيانات غير المبوبة:

لحساب الانحراف المعياري والتباين للعينة نستخدم القوانين الآتية :

الطريقة المطولة   الانحراف المعياري

$$S=\sqrt{=\frac{\sum(xi-\bar{x})2}{n-1}}$$

التباين

$$S^2=\frac{\sum(xi-x)2}{n-1}$$

الطريقة المختصرة   الانحراف المعياري

$$S=\sqrt{\frac{\sum(xi^{\,2}-\frac{(\sum xi)^2}{n}}{n-1}}$$

التباين

$$S^2=\frac{\sum(xi^{\,2}-\frac{(\sum xi)^2}{n}}{n-1}$$

اما لحساب الانحراف المعياري والتباين للمجتمع فنستخدم القوانين الآتية :

الطريقة المطولة   الانحراف المعياري

$$6=\sqrt{\frac{\sum(xi-x)2}{n}}$$

التباين

$$\sigma^2=\frac{\sum(xi-x)2}{n}$$

الطريقة المختصرة الانحراف المعياري $6= \sqrt{\frac{\sum(xi^2 - \frac{(\sum xi)^2}{n}}{n}}$

التباين $\sigma^2 = \frac{\sum(xi^2 - \frac{(\sum xi)^2}{n}}{n}$

ملاحظة : يتم استخدام الانحراف المعياري للمجتمع في أغلب الاحيان .

مثال : البيانات الاتية 9,8,6,5,7 تبين كمية محصول القطن في خمس مزارع احسب الانحراف المعياري والتباين لها.

الحل :

X_i	$(xi - x)$	$(xi - x)^2$
9	2	4
8	1	1
6	−1	1
5	−2	4
7	0	0
		10

$\bar{X} = \frac{35}{5} = 7$

$S = \sqrt{\frac{\sum(xi-x)2}{n-1}}$

$= \sqrt{\frac{10}{5-1}}$

$= \sqrt{\frac{10}{4}}$

$= \sqrt{2.5} \quad = 1.58$

$S^2 = 2.5$

٢) الانحراف المعياري والتباين للبيانات المبوبة:

لحساب الانحراف المعياري والتباين للعينة نستخدم القوانين الآتية :

الطريقة المطولة — الانحراف المعياري

$$S=\sqrt{\frac{\sum fi(xi-\bar{x})2}{\sum fi-1}}$$

التباين

$$S^2=\frac{\sum fi(xi-x)2}{\sum fi-1}$$

الطريقة المختصرة — الانحراف المعياري

$$S=\sqrt{=\frac{\sum fixi^{\,2}-\frac{(\sum fixi)^2}{\sum fi}}{\sum fi-1}}$$

التباين

$$S^2=\frac{\sum fixi^{\,2}-\frac{(\sum fixi)^2}{\sum fi}}{\sum fi-1}$$

اما لحساب الانحراف المعياري والتباين للمجتمع فنستخدم القوانين الآتية :

الطريقة المطولة — الانحراف المعياري

$$6=\sqrt{\frac{\sum fi(xi-x)2}{\sum fi}}$$

التباين

$$6^2=\frac{\sum fi(xi-x)2}{\sum fi-1}$$

الطريقة المختصرة — الانحرف المعياري

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum fixi^{\,2}-\frac{(\sum fixi)^2}{\sum fi}}{\sum fi}}$$

التباين

$$6^2=\frac{\sum fixi^{\,2}-\frac{(\sum fixi)^2}{\sum fi}}{\sum fi}$$

مثال: احسب الانحراف المعياري لجدول التوزيع التكراري الاتي:

C	Fi	Xi	Fixi	$(xi-\bar{x})$	$(xi-\bar{x})^2$	$Fi(xi-\bar{x})^2$
50-55	5	52.5	262,5	-18,7	349.69	1748.45
60-65	14	62.5	875	-8.7	75,69	1059.66
70-75	22	72.5	1595	1,3	1.69	37.18
80-85	9	82.5	742.5	11.3	127.69	1149.51

90–95	4	92.5	370	21.3	453.69	1814.76
	54		3845			5809.56

$$\bar{X} = \frac{\sum fixi}{\sum fi}$$

$$= \frac{3845}{54} = 71.2$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fi(xi-x)2}{\sum fi}}$$

$$= \sqrt{\frac{5809.56}{54}}$$

$$\sigma^2 = \frac{5809.56}{54}$$

$$=107.58$$

امثلة وتدريبات مشتركة بين الطلبة تكملة عن كيفية
مقاييس التشتت وحساب الانحراف المعياري والتباين
مع واجبات تتعلق بهذا الموضوع