**جامعة الموصل**

**كلية الزراعة والغابات**

**قسم الاقتصاد الزراعي**

**المرحلة الرابعة**

# اقتصاد قياسي /١ عملي

اعداد

م. صلاح فهمي شابا

م.م. ايمان فيصل محمد

# طريقة المربعات الصغرى

تعتمد طريقة المربعات الصغرى العادية على الحصول على مقدرات , الانحدار حيث تمثل $\alpha$معلمة القاطع، , $\beta$ معلمة الميل. بحيث يتم تصــغير مجموع مربعات البوا قي إلى آدني قيمه لها. بحيث يجري تعريف مكون يطلق علية مجموع المربعات البوا قي وبعد ذلك يشــر ع في الحصــول على , $\alpha$، , $\beta$ بحيث يتم تصــغير هذا المكون إلى أدنى قيمه له.

طريقة المربعات الصــغرى تعطينا مقدرات الانحدار , $\alpha$، , $\beta$ ولكن لا تعطينا مقدرة التباين وهذا يعتبر من نقاط ضعف طريقة المربعات الصغرى.

المعيار الخاص في المربعات الصغرى العادية: النموذج المقدر هو كما يلي

u هي البوا قي والتي تســــاوي من النموذج $u_i = Y_i - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X)$ نموذج الانحدار ممكن أن يمر من خلال انتشــــار البيانات الخاصة بـ X ,Y، الخط المقدر هنا هو الذي يعطي Y المقدرة

إذا أخذنا إحداثيات القيم Y,X إحداثيات النقطة الأولى تنقسم إلى قسمين، قسم من المحور الأفقي في النموذج المقدر، هذا عبارة عن الجزء الثاني عبارة عن قيمة البوا قي. فالمشـاهدة Y هي حصـيلة جمع +u أي أن أي مشــاهده مكونه من جانبين، جانب الخط المقدر والبواقي. البواقي بحكم أنها مقدرة العنصــر العشــوائي يمكن أن تكون موجبة وممكن أن تكون سالبه وكذلك من الناحية النظرية يمكن أن تساوي الصفر.

للحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية يجب أن نحصل أولا على البواقي:

$$u_t^2 = (\hat{Y} - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X))^2$$

مجموع مربعات البواقي $=\sum u^2$

يتم التوصــــل إلى الخط الذي تكون فيه مجموع مربعات البواقي اصــــغر ما يمكن [ اختيار الخط الذي يدني مجموع مربعات البواقي إلى أصغر ما يمكن]. باستخدام الرياضيات فأن شرط الدرجة الأولى يتطلب أجراء التفاضـل بالنسبة للمجاهيل $\alpha$ $\beta$ نسـتخدم التفاضـل الجزئي وبعد ذلك نسـاوي المعادلات التي تم أل تحصـل عليها بالصفر ثم نطبق المعادلات الآنية للحصول على قيم المقدرات.

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial\hat{\alpha}} = (2)\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)(-1) = 0$$

نساوي بالصفر $\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$

بادخال المجموع Σ وحيث ان α عدد ثابت فأن n α = Σ α ثم بقسمة المعادلة على n نحصل على مايلي:

$$\sum Y_i - \sum_i \hat{\alpha} - \hat{\beta}\sum_i X = 0$$

$$\frac{\partial\left(\sum u_i^2\right)}{\partial\hat{\beta}} = (2)(\sum(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X)(-X) = 0$$

نساوي بالصفر $(\sum X(Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}X) = 0$

$$-\sum XY + \sum X\alpha + \sum \beta X^2 = 0$$

بالتعويض بقيمة α نحصل على

$$\sum XY = \sum X\left(\frac{\sum Y}{n} - \beta\frac{\sum X}{n}\right) + \beta\sum X^2$$

بالضرب في n

$$n\sum XY = \sum X \sum Y - \beta(\sum X)^2 + \beta\ n\sum X^2$$

$$n\sum XY - \sum X \sum Y = -\beta(\sum X)^2 + \beta\ n\sum X^2$$
$$= \beta\ n\sum X^2 - \beta(\sum X)^2$$

معادلة ٢,٧ تسمى المعادلات الطبيعية ونستطيع استخراج قيم β α منها

بالتعويض نحصل على

$$\boxed{\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum^{n} X_i \sum Y_t}{n\sum X^2 - (\sum X)^2} =}$$

من الممكن الحصول على المقدرات باستخدام الانحرافات كما يلي:

$$\sum\ y_i = \sum(Y - \overline{Y})^2 \qquad = \sum Y_i^2 - n\overline{Y}^2$$
$$\sum xy = \sum(X - \overline{X})(Y - \overline{Y}) = \sum XY - n\overline{XY}$$
$$\sum x^2 = \sum(X - \overline{X})^2 \qquad = \sum X^2 - n\overline{X}$$

**حيث ان:**

$$\sum Y_i X_i = \sum X_i(\overline{Y}_i - \hat{\beta}\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum Y_i X_i = n\overline{X}(\overline{Y} - \hat{\beta}\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum Y_i X_i = n\overline{X}\overline{Y} - \hat{\beta}n\overline{X}\overline{X}) + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum Y_i X_i - n\overline{X}\overline{Y} = -\hat{\beta}n\overline{X}\overline{X} + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum XY - n\overline{XY} = -\hat{\beta}n\overline{X}^2 + \hat{\beta}\sum X_i^2$$

$$\sum xy = \beta\left[nX^2 - \sum X^2\right]$$

$$\sum xy = \beta\sum x^2$$

$$\sum xy$$

**مثال (١)**

| X | Y | $X^2$ | x | y | XY | xy | $x^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 4 | -2 | -4 | 8 | 8 | 4 |
| 3 | 7 | 9 | -1 | -1 | ٢١ | 1 | 1 |
| 1 | 3 | 1 | -3 | -5 | ٣ | 15 | 9 |
| 5 | 9 | 25 | 1 | 1 | ٤٥ | 1 | 1 |
| 9 | 17 | 81 | 5 | 9 | ١٥٣ | 45 | 25 |
| **$\sum X=$ 20** | **$\sum Y$ =40** | **$\sum X^2=$ 120** | | | **230 $\sum XY=$** | **$\sum xy=70$** | **$\sum x^2=40$** |

حل التمرين :

$$\hat{\beta} = \frac{n\sum_{i=1}^{n} X_i Y_i - \sum^{n} X_i \sum Y_t}{n\sum X_i^2 - \left(\sum X\right)^2} =$$

$$\hat{\beta} = \frac{(5)(230) - (20)(40)}{5(120) - (20)^2} = 1.75$$

$$\hat{\alpha} = \bar{Y} - \hat{\beta}\bar{X} = 8 - 1.75(4) = 1$$

$$\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta} X =$$

باستخدام الانحرافات

$$\hat{\beta} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{70}{40} = 1.75$$

| | X | Y | x | y | xy | $x^2$ | XY | $X^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ١٠٠ | ٥٥ | 30 | -45 | 1650 | 900 | 5500 | 10000 |
| 2 | ٩٠ | ٧٠ | 20 | -30 | 1400 | 400 | 6300 | 8100 |
| 3 | ٨٠ | ٩٠ | 10 | -10 | 900 | 100 | 7200 | 6400 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | ٧٠ | ١٠٠ | 0 | 0 | 0 | 0 | 7000 | 4900 |
| 5 | ٧٠ | ٩٠ | 0 | 10- | 0 | 0 | 6300 | 4900 |
| 6 | ٧٠ | ١٠٥ | 0 | 5 | 0 | 0 | 7350 | 4900 |
| 7 | ٧٠ | ٨٠ | 0 | -20 | 0 | 0 | 5600 | 4900 |
| 8 | ٦٥ | ١١٠ | -5 | 10 | -550 | 25 | 7150 | 4225 |
| 9 | ٦٠ | ١٢٥ | -10 | 25 | -1250 | 100 | 7500 | 3600 |
| 10 | ٦٠ | ١١٥ | -10 | 15 | -1150 | 100 | 6900 | 3600 |
| 11 | ٥٥ | ١٣٠ | -15 | 30 | -1950 | 225 | 7150 | 3025 |
| 12 | ٥٠ | ١٣٠ | -20 | 30 | -2600 | 400 | 6500 | 2500 |
| **المجموع** | **840** | **1200** | | | **-3550** | **2250** | **80450** | **61050** |
| | **X=70** | **Y=100** | | | | | | |
| | | | | | **β=-3550/2250=-1.6** | | | |

**خصائص مقدرات المربعات الصغرى العادية (OLS)**

الخصائص الإحصائي التي تتميز فيها مقدرات المربعات الصغرى العادية.

تتميز المقدرات $\alpha$ $\beta$ بثلاث خواص أساسيه:

١) الخطية ٢)عدم التحيز ٣) الكفاءة

١) الخطية: تعتبر داله خطية للعنصر العشوائي التابع Y . أهمية هذه الخاصة أنها تعطينا درجه من البساطة في أجراء الحسابات حيث انه لحساب $\alpha$ $\beta$ نستعمل المتغير التابع في صوره خطيه فقط هذه لتبسيط الحسابات.

٢) عدم التحيز: مقدرات (OLS) مقدرة غير متحيزة للمعلمة $\alpha$ . عدم التحيز يتطلب بأن القيمه المتوقعة لـ و التي هي قيمة المعلومة الحقيقية بمعنى آخر متوســـــط = $\alpha$ . إذا جمعت عينات كثيرة وفي كل عينه نحسب يتم أخذ المتوسط. ذلك المتوســـط نظريا يجب أن يتساوى مع المعلمة الحقيقية. مقدرات (OLS) مقدرة غير متحيزة للمعلمة $\beta$ حيث أن أي أن توقع يجب أن يســـــاوي المعلم ه الحقيقية بمعنى آخر متوســـط قيم أو في المتوسط تساوي القيمة الحقيقية للمعلمه $\beta$.

هذه الأوضـــاع كلها نظريه بحتة في الواقع لا يكون عندنا عدد من العينات، بكون في الواقع عينه واحدة فقط وتعطينا قيمه واحدة ، قيمه واحدة يعتمد عليها في التحليل، من الناحية النظرية نقول أن هذه المقدرات يتوقع أنها تســـاوي القيمة الحقيقية من الناحية الأخرى القيمة الحقيقة لا نعرفها وبالتالي هذه الخصائص خصائص نظريه بحتة.

على الرســم البياني، رســم دالة احتمال ، خاصــية عدم التحيز تقول أن توزيع احتمال يأخذ هذا الشــكل يتمركز حول القيمة الحقيقية، لـ $\beta$ يعني أن القيمة المتوقعة لـ تســاوي $\beta$ وأن قيمة $\beta$ تساوي المعلمة الحقيقية ونفس التحليل ينطبق على $\alpha$.

تباين المقدرات: تباين اي قيمة تتوزع حول وسط معين هو معدل تشتت هذه القيم عن الوسط ويكون القانون الخاص بتباين مقدرة القاطع:

بإجراء بعض الخطوات يمكن إن نبرهن إن تباين يساوي

من المعادلة نلاحظ إن تباين  تعتمد على تباين u فإذا زاد تباين u  توقع زيادة تباين   لان  هناك علاقة طرديه بين تباين   وتباين   u    . وتوجد صيغه أخرى لتباين   على انه يساوي :

اما  القانون الخاص بتباين

يمكن إن نثبت إن التباين الخاص بـ يساوي

ومن المعادلة نلاحظ إن تباين     يعتمد طرديا على    تباين   u     وعكسـيا على مجموع مربعات انحرافات المتغير المستقل، فكلما   ازدادت درجة انتشـــار المتغير المســـتقل ( آي بيانات X مختلفة كثيرا عن بعضها) نتوقع إن يزيد المكون الموجود في المقام وبالتالي ينخفض تباين   مما يشعر إلى دقة التقديرات.

٣- آدني تباين:

الخاصية الثالثة لمقدرات م ص ع  تمتلك آدني تباين  هذه الخاصية لها أهمية  بالغة  في الاقتصاد القياسي لان آدني تباين يعتبر مؤشـــر إلى دقة القياســـات،  آدني تباين يعتبر مؤشـــر إلى دقة القياسات، آدني تباين يعني أعلى دقة من ناحية  القياســات.

هناك علاقة عكسية بين التباين ودقة القياسات كلما زاد التباين كلما انخفضت دقة القياسات وكلما قل ارتفعت دقة القياسات. لأن مقدرات م ص ع          تلك المقدرات تمتلك آدني تباين نعني مقارنه بمقدرات أخرى تقاس بطريقه مختلفة عن م ص ع فان مقدرات م ص ع تمتلك آدني تباين إي تتحلى بأعلى دقه. نفترض إن هناك مقدرات لـــــ     $\beta$ $\alpha$     تحصـل عليها بطريقه مختلفة ونفترض إن المقدرات الأخرى  ا ذا افترضـنا أن تلك المقدرتين  خطيه وغير متحيزة سيكون الاختلاف  في خاصية أن  مقدرات م ص ع         تمتلك أعلى دقة.

**مثال (٢):**

البيانات التالية عن الســعر وكميه البرتقال الذي تم بيعه في أحد أســواق الخضـــار  في مدة ١٢ يوم إذا رمزنا للسعر بـ X والكميه بـY

باستخدام المعادلة التالية:

$$Y = \alpha + \beta X + u$$

$$\bar{X} = 70, \sum xy = -35550$$

$$\bar{Y} = 100, \quad \sum x^2 = 2250$$

$$\hat{\beta} = \frac{-3550}{\ldots} = -1.578$$

$$\hat{\alpha} = 100 - (-1.578)70 = 210.460X + u$$

$$\hat{Y} = 210.46 - 1.578X$$

تقدير التباين $\sigma^2$ **:** حيث أن $\sigma^2$ مجهولة والتي نحتاجها لنتمكن من حساب تباين . نستخدم مقدرة $\sigma^2$ = مجموع مربعات البواقي/درجة الحرية

$$\sigma^2 = \frac{\sum u^2}{n-2} \qquad ٧,٢$$

بحساب مربعات مجموع البواقي من قيمة $\sum u^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 = 698$

إذا مقدرة التباين

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum u^2}{n-2} = \frac{698}{12-2} = 69.8$$

ومنها يمكن الحصول على مقدرات تباين .

**مثال ٣**

| **X** | **Y** | **$X^2$** | **x** | **y** | **XY** | xy | $x^2$ | Y^ | u | $u^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | | |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 4 | 4 | -2 | -4 | 8 | 8 | 4 | 4.5 | 0.50 | 0.2500 |
| 3 | 7 | 9 | -1 | -1 | ٢١ | 1 | 1 | 6.25 | 0.75 | 0.5625 |
| 1 | 3 | 1 | -3 | -5 | ٣ | 15 | 9 | 2.75 | 0.25 | 0.0625 |
| 5 | 9 | 25 | 1 | 1 | ٤٥ | 1 | 1 | 9.75 | 0.75 | 0.5625 |
| 9 | 17 | 81 | 5 | 9 | ١٥٣ | 45 | 25 | 16.75 | 0.25 | 0.0625 |
| **$\sum X=$ 20** | **$\sum Y=$40** | **$\sum X^2=$ 120** | | | **230 $\sum XY=$** | **$\sum xy=$ 70** | **$\sum x^2=$ 40** | | | **$\sum u^2=$ 1.5** |

$$u = Y - \hat{Y} = Y - (\hat{\alpha} + \hat{\beta} X) = Y - 1 - 1.75(X)$$

$X = 2\ 3\ 1\ 5\ 9$

للحصول على مقدرة التباين نستخدم المعادلة التالية .

$$\sigma^2 = \frac{\sum u^2}{n-2} = \frac{1.5}{5-2} = 0.5$$

وبعد ذلك نستطيع أن نتحصل على تباين المقدرات

وللحصول على الانحراف المعياري نتحصل على الجذر التربيعي للتباين:

**تمرين**

دالة الاســتهلاك الخاص:

$$C = \hat{\alpha} + \hat{\beta}Y$$

حيث ترمز X الى الاستهلاك الخاص و Y الى الدخل.

البيانات:

| GDP<br>الدخل (اجمالي الناتج المحلي) | Private Consumption X<br>الاستهلاك الخاص | Year |
|---|---|---|
| 164.53 | 23.90 | ١٩٩٠ |
| 205.06 | 34.75 | 1991 |
| 225.40 | 54.61 | 1992 |
| 249.54 | 68.61 | 1993 |
| 385.81 | 102.39 | 1994 |
| 520.59 | 114.91 | 1955 |
| 524.72 | 126..39 | 1996 |
| 415.23 | 151.29 | 1997 |
| 372.07 | 157.37 | ١٩٩٨ |
| 351.40 | 159.35 | ١٩٩٩ |
| 313.94 | 158.59 | ٢٠٠٠ |
| 271.09 | 140.15 | ٢٠٠١ |
| 275.45 | 135.54 | ٢٠٠٢ |
| 285.15 | 139.40 | ٢٠٠٣ |
| 310.82 | 145.03 | ٢٠٠٤ |
| 391.99 | 155.87 | ٢٠٠٥ |

| | | |
|---|---|---|
| ٢٠٠٦ | 168.75 | 442.04 |
| ٢٠٠٧ | 183.92 | 461.40 |
| ٢٠٠٨ | 193.91 | 443.84 |
| ٢٠٠٩ | 185.83 | 450.03 |
| ٢٠١٠ | 191.10 | 470.70 |
| ٢٠١١ | 206.21 | 511.33 |
| ٢٠١٢ | 207.35 | 547.41 |

$$\ln C = -3.33 + 1.38 \ln Y$$

$$n = 23, \quad K = 2$$

$$SSE = 0.341$$

$$SSR = 2.44$$

$$\bar{Y} = 4.82$$

$$SE(\hat{\alpha}) = 1.29, \quad SE(\hat{\beta}) = 0.219$$

$$t_{\alpha} = \quad = \frac{-3.33 - 0}{1.29} = -2.57$$

$$t_{\beta} = \quad = \frac{1.38 - 0}{0.219} = 6.31$$

**تمرين واجب :**

**جدول : حددي نتائج الانحدار للعلاقة بين الكمية المطلوبة لسلعه والسعر كما يلي**

$$Y = \alpha + \beta X + u$$

**من البيانات التالية**

| السعر X | الكميه Y | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ١٠٠ | ٥٥ | | | | | | |
| ٩٠ | ٧٠ | | | | | | |
| ٨٠ | ٩٠ | | | | | | |
| ٧٠ | ١٠٠ | | | | | | |
| ٧٠ | ٩٠ | | | | | | |
| ٧٠ | ١٠٥ | | | | | | |
| ٧٠ | ٨٠ | | | | | | |
| ٦٥ | ١١٠ | | | | | | |
| ٦٠ | ١٢٥ | | | | | | |
| ٦٠ | ١١٥ | | | | | | |
| ٥٥ | ١٣٠ | | | | | | |
| ٥٠ | ١٣٠ | | | | | | |
| | | | | | | | |

**١- حددي معاملات النموذج. مع رسم شكل الانتشار وخط الانحدار**

**٢- قومي ببناء فترة الثقه لمعامل الميل وحددي فرضية العدم و نتائج اختبار t,F. مستخدمة ٥% مستوى الثقة.**

**٣- حددي معامل التحديد $R^2$**