جامعة الموصل
كلية الزراعة والغابات
قسم الاقتصاد الزراعي

مادة بحوث العمليات
(عملي)

المرحلة الثالثة

يعد أسلوب التخصيص واحد من أساليب بحوث العمليات التي تحل بموجبها الكثير من المشاكل في الحياة العملية، وتهدف إلى اختيار أفضل تخصيص يؤدي إلى الوصول إلى الأدنى من التكاليف وفي نفس الوقت تعد من الحالات الخاصة لنماذج النقل.

وان كفاءة التخصيص هي إحدى معايير الإدارة العليا لما لها من أثار على تحقيق أهداف الشركة بأقل التكاليف ولهذا تعتبر مشكلة التخصيص حالة خاصة من مشاكل البرمجة الخطية التي تتعلق بتحديد أفضل توزيع كتوزيع المدراء على المشاريع أو الباعة على المناطق الجغرافية المحلية أو العقود على المتعهدين أو الأعمال على الآلات أو تخصيص المحامين على الزبائن وغيرها.

I- مفهوم وشروط مشكلة التخصيص:

تعرف مشكلة التخصيص بأنها وسيلة تساهم في تحقيق الاستخدام الأمثل للموارد المتاحة بهدف تحقيق أقصى العوائد أو تخفيض التكاليف إلى أدنى مستوى ممكن، وتعد مشكلة التخصيص من مشاكل التوزيع السهلة المعالجة والمقيدة في الوقت إذا تعود بساطة استخدامها إلى شروطها التي تقتضي وجود عدد من العمليات (أعمال، أفراد،...) بهدف توزيعها على التسهيلات المتاحة بحيث تخصص عملية واحدة لكل نوع من التسهيلات (الإمكانات المتاحة كالمكائن مثلاً)[1].

إن بساطة استخدامها تعود بالدرجة الرئيسة إلى شروط تطبيقها وهي[2]:

- تساوي عدد الأشخاص مع عدد العمليات أو الوظائف المطلوب إنجازها؛
- الوسيلة المتوفرة (عامل، الآلة) تؤدي عمل واحد، وعدم السماح لها بالقيام بأكثر من ذلك؛
- كلفة انجاز كل مهمة من قبل كل وسيلة من الوسائل معروفة ومحددة مسبقا؛
- تحقق شرط عم السلبية، حيث يفترض عدم وجود قيم سالبة.

إن مجالات تطبيق نموذج التخصيص في الحياة العملية كثيرة ومن أهمها[3]:

- تخصيص المدراء للمشاريع؛
- تخصيص مندوبي البيع إلى المناطق البيعية المختلفة؛
- تخصيص الأعمال للمكائن أو الخطوط الإنتاجية؛
- تخصيص المحاسبين للشركات في مكاتب التدقيق والمحاسبة؛
- توزيع العقود على المتعهدين أو المقاولين؛
- تخصيص وسائل نقل معينة لنقل السلع من مكان لأخر.

[1] . محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص 12.

[2]. منعم زمزير الموسوي، مرجع سابق، ص 269.

[3]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، ص 281.

وهناك تطبيقات أخرى كثيرة لهذا الأسلوب منشورة في المجلات المتخصصة في بحوث العمليات ثم تقديم حلول لبعض المشاكل المستعصية من خلالها.

II- طرق حل مشاكل التخصيص (التعيين):

هناك طريقتان رئيسيتان لحل مشاكل التخصيص وهما:

- ✓ طريقة التوافيق المختلفة (العد الكامل)؛
- ✓ طريقة الحل المباشر (المختصر) أو الطريقة الهنكارية.

II-1- طريقة التوافيق المختلفة (العد الكامل):

تعتبر هذه الطريقة من ابسط الطرق المستخدمة في حل مشاكل التخصيص وتعتمد على تعداد جميع بدائل التخصيص المحتملة ثم نختار التخصيص الذي يعطي اقل تكاليف خدمة ممكنة.

إن عدد البدائل المحتملة لكل مشكلة تخصيص تساوي العاملي (Factorial) عدد الصفوف أو عدد الأعمدة، فإذا كان عدد الصفوف يساوي 3 مثلاً فإن: (3!= 3x2x1=6) أي إن هناك 6 بدائل محتملة لعملية التخصيص.

مثال رقم (01): يقوم معمل للخياطة بعمليتين هما التفصيل والخياطة ،فإذا كانت البيانات التالية تمثل الوقت المستغرق للأداء في القسمين من قبل عاملين كالأتي :

المهام / العاملون	الوقت المستغرق / بالدقائق	
	تفصيل	خياطة
خالد	6	5
علي	8	10

المطلوب : تخصيص كل عامل للقيام مهمة معينة، بحيث يؤدي ذلك إلى تقليل الوقت اللازم لإنجاز تلك المهام.

الحل: إن الاحتمالين الخاصين بتحقيق الهدف هما (2!= 2x1=2) ويمكن تمثيل هذين الاحتمالين كالآتي:

الاحتمالات	العاملون		التكلفة بالدقائق
	تفصيل	خياطة	
الأول	خالد	علي	6+10=16
الثانـي	علي	خالد	8+5=13

إذن يعتبر البديل الثاني هو الأفضل لإنجاز المهمتين بأقل التكاليف.

مثال رقم (02): إذا توفر لدينا ثلاثة أجهزة لإنجاز ثلاثة وظائف مختلفة وأعطيت لنا المعلومات الواردة في الجدول الآتي عن تكاليف إنجاز هذه الوظائف على هذه الأجهزة المطلوب استخدام طريقة العد الكامل لتحديد أفضل تخصيص لتقليل التكاليف:

الأجهزة	الوظائف		
	1	**2**	**3**
A	19	11	17
B	13	7	11
C	11	5	13

الحل: تجري عملية التخصيص على وفق طريقة التوافيق المختلفة وذلك بتسجيل جميع البدائل الممكنة مع التكاليف المقابلة لكل بديل، بما ان عدد الصفوف يساوي (3) فإن: (3!= 3x2x1=6) أي إن هناك 6 بدائل محتملة لعملية التخصيص.

البدائل	الأجهزة			التكاليف الإجمالية
	A	**B**	**C**	
الأول	1	2	3	19+7+13=39
الثاني	1	3	2	19+5+11=35
الثالث	2	1	3	11+13+13=37
الرابع	2	3	1	11+11+11=33
الخامس	3	1	2	17+13+5=35
السادس	3	2	1	17+7+11=35

اقل كلفة إجمالية

يتضح من الجدول أعلاه أن جميع البدائل قد تم حسابها وأن البديل الأفضل هو الرابع أي أن يخصص الجهاز (A) لإنجاز الوظيفة الثانية و الجهاز (B) للوظيفة الثالثة والجهاز (C) للوظيفة الأولى لأن هذا الترتيب سيجعل من الكلفة الإجمالية (33 وحدة نقدية).

إن من أبرز عيوب طريقة التوافيق المختلفة أنها تستخدم فقط لإيجاد الحل الأمثل في حالة المسائل ذات المتغيرات قليلة العدد فتصبح غير كفؤة في حالة المسائل الكبيرة ذات المتغيرات الأربعة وما فوق، لهذا السبب تم تطوير أسلوب أكثر كفاءة في إيجاد الحل الأمثل على يد الرياضي المجري (د.كوينج) الذي بني نموذجها وعرفت بالطريقة الهنكارية والتي تتميز بقدرتها على التعامل مع المشاكل ذات المتغيرات الكثيرة [1].

II-2- طريقة الحل المباشر (المختصرة) أو الطريقة الهنكارية:

تعتمد إجراءات الحل وفق هذه الطريقة على ما يسمى (المصفوفة المتناقصة)، والتي تستلزم طرح وإضافة أرقام ملائمة من هذه المصفوفة، ومن خلالها نستطيع أن نحقق الحل الأمثل، وتعتمد خطوات الوصول إلى الحل الأمثل على هدف مشكلة التخصيص حيث تختلف تلك الخطوات في حالة الوصول إلى أدنى كلفة عما هي عليه في حالة الوصول إلى أقصى الإيرادات.هناك شرطين ينبغي تحقيقهما وهما:

- **الشرط الأول:** تحقيق صفر واحد في كل صف وصفر وحدا على الأقل في كل عمود؛

[1]. اكرم محمد عرفان المهتدي؛ مرجع سابق، ص 161.

- **الشرط الثاني:** سحب المستقيمات على الأصفار بمعنى تغطية الأصفار بمستقيمات، ابتداء من أكبر عدد من الأصفار ثم التدرج إلى أقل عدد من الأصفار ويجب أن يكون عدد المستقيمات المسحوبة على الأصفار مساوياً لعدد الصفوف والأعمدة.

أولا : تحقيق أدنى كلفة

وتتميز هذه الطريقة بأنها تتكون من عدد من الخطوات المتسلسلة التي تكفل الوصول إلى الحل الأمثل، وهذه الخطوات لمشاكل التخفيض هي[1]:

1. ترتيب المعلومات في مصفوفة؛
2. التأكد من موازنة المصفوفة (عدد الصفوف يساوي عدد الأسطر)؛
3. نطرح أقل قيمة في كل صف من باقي قيم ذلك الصف في المصفوفة؛
4. نطرح أقل قيمة في كل عمود من باقي قيم ذلك العمود في المصفوفة، ولابد من تحقيق صفر واحد على الأقل في كل عمود وفي كل صف وهو الشرط الأول؛
5. تغطية الأصفار بمستقيمات ابتداء من أكبر عدد من الأصفار ثم التدرج إلى الأقل، ويجب أن يكون عدد المستقيمات المسحوبة على الأصفار مساوي لعدد الصفوف أو الأعمدة وهذا يمثل الشرط الثاني؛ ونكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل؛ ونقوم بعملية التعين أو التخصيص وذلك بأن نأخذ الأصفار الواقعة على نقاط التقاء الصفوف والأعمدة ونجري التعيينات على أساس واحد إلى واحد والقصد من أخذ الأصفار في هذه الحالة، هو لأنها تمثل أصلاً اقل التكاليف؛
6. إذا كان عدد المستقيمات المغطية للأصفار أقل من عدد الصفوف أو الأعمدة، فهذا يعني عدم الوصول إلى الحل الأمثل، أي أننا لا نستطيع القيام بكافة التعيينات، ومن أجل الاستمرار بالحل فإننا نقوم بتطوير الحل أي طرح أصغر قيمة (باستثناء الصفر) من كل القيم غير المغطاة بمستقيمات من بقية القيم غير المغطاة وفي نفس الوقت إضافة هذه القيمة التي طرحتها إلى نقاط تقاطع المستقيمات، أما القيم المغطاة فتدرج كما هي في الجدول الجديد وتتم العملية باستمرار إلى أن تحقق الحل الأمثل،
7. وضع سياسة التخصيص ثم حساب مجموع التكاليف.

مثال رقم (03): ترغب إحدى الشركات بتخصيص أربعة أوامر عمل إلى أربعة مجاميع من العاملين بحيث يكون وقت الإنجاز الكلي (بالساعة) اقل ما يمكن علما أن الوقت اللازم لإنجاز كل أمر عمل من قبل كل مجموعة من المجاميع الأربعة موضحة في الجدول أدناه والمطلوب: إجراء عملية التخصيص اللازمة بطريقة الحل المباشر:

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، ص ص: 222 – 223.

مجاميع العمل \ أوامر العمل	أمر *A*	أمر *B*	أمر *C*	أمر *D*
مجموعة 1	5	7	9	10
مجموعة 2	12	8	5	6
مجموعة 3	6	9	11	9
مجموعة 4	7	13	8	6

الحل:

تحديد أصغر قيمة في كل صف وطرحها من بقية القيم الصف:

5	7	9	10
12	8	5	6
6	9	11	9
7	13	8	6

وتصبح المصفوفة كما يلي:

0	2	4	5
7	3	0	1
0	3	5	3
1	7	2	0

تحديد أصغر قيمة في كل عمود وطرحها من بقية القيم العمود:

0	2	4	5
7	3	0	1
0	3	5	3
1	7	2	0

وتصبح المصفوفة كما يلي:

0	0	4	5
7	1	0	1
0	1	5	3
1	5	2	0

الآن نجد أن هناك على الأقل صفر واحد في كل صف وكل عمود وعليه الشرط الأول محقق، يمكن اختبار الحل بتغطية هذه الأصفار بمستقيمات، هنا يمكن تغطية الاصفار جميعها بأربعة مستقيمات مبتدئين أولا بالصف الأول (صفرين) ثم العمود الأول (صفرين) ثم الصف الثاني والصف الرابع كما في الآتي:

	2			
	0	0	4	5	1
3	7	1	0	1
	0	1	5	3
	1	5	2	0	4

إذن تحقق الشرط الثاني عدد المستقيمات تساوي عدد الأعمدة أو الصفوف أي تحقق الحل الأمثل ومنه يمكن الآن إجراء عملية التخصيص وكالآتي:

زمن الانجاز	أمر العمل	أمر				مجموعة العمل
7	B			B	~~A~~	مجموعة 1
5	C		C			مجموعة 2
6	A				A	مجموعة 3
6	D	D				مجموعة 4
24 ساعة						مجموع التكاليف

إن أجراء عملية التخصيص ونبدأ بالصف أو العمود الذي فيه صفر واحد لذا نضع مربع على الموجود في الصف الثاني وهذا يعني تخصيص أمر العمل (C) إلى مجموعة العمل الثانية، وبما أنه لا يوجد صفر أخر في العمود (C) فإننا ننتقل إلى الصف الثالث ونضع مربع على الصفر الوحيد فيه ولكن هنا يجب أن نشطب الصفر الموجود في نفس العمود (بالصف الأول) دلالة على أنه لا يمكن تخصيص أمر العمل (A) إلى المجموعة الأولى لأنها قد خصصت للمجموعة الثالثة، ثم ننتقل إلى الصف الرابع ونضع مربع على الصفر الوحيد فيه أي تخصيص أمر العمل (D) إلى المجموعة الرابعة وكذا الأمر مع الصفر الباقي في الصف الأول أي أنه سوف يخصص أمر العمل (B) للمجموعة الأولى ، وإن الوقت الكلي اللازم لانجاز العمل سيكون 24 ساعة.

ثانيا: تحقيق أقصى عائد

لا تختلف خطوات الحل عندما يكون الهدف تحقيق أقصى عائد (إيراد)عن خطوات الحل حينما يكون الهدف تقليل التكاليف، إلا عند البدء بالحل، حيث يتم بموجب هذه الهدف طرح كل القيم (العوائد) في مصفوفة العوائد من أكبر قيمة في المصفوفة كلها فنحصل على مصفوفة تكاليف ومن ثم يتم إتباع نفس الخطوات السابقة التي تم تطبيقها في حالة التكاليف وصولاً إلى الحل الأمثل.[1]

مثال رقم (04): مؤسسة تجارية ترغب في تعيين عدد من العمال لإنجاز عدد من الوظائف، فإذا كان عدد العمال أربعة وكانت الأرباح الناتجة عن قيام العمال بالوظائف هي كالتالي:

4	3	2	1	الوظائف / العمال
5	4	15	6	**A**
1	6	7	9	**B**
7	1	11	5	**C**
10	9	18	14	**D**

المطلوب: إيجاد الحل بطريقة الحل المباشر لمسألة الأرباح.

الحل: لأن المسألة تعظيم الأرباح، لذا يتم طرح جميع الأرقام من أعلى رقم في الجدول وهو (18) لتصبح مسألة التكاليف وإتباع الخطوات السابقة في حالة التدنئة:

[1]. فتحي خليل حمدان ، رشيق رفيق مرعي ، مرجع سابق، ص 168.

12	3	14	13
9	11	12	17
13	7	17	11
4	0	9	8

طرح أقل قيمة في كل صف لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم الصف:

12	3	14	13
9	11	12	17
13	7	17	11
4	0	9	8

وتصبح المصفوفة كما يلي:

9	0	11	10
0	2	3	8
6	0	10	4
4	0	9	8

طرح أصغر قيمة في كل عمود لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم العمود:

9	0	11	10
0	2	3	8
6	0	10	4
4	0	9	8

وتصبح المصفوفة كما يلي:

9	0	8	6
0	2	0	4
6	0	7	0
4	0	6	4

نغطي كل صف و كل عمود يحتوي على صفر بأقل عدد من المستقيمات:

9	0	8	6
0	2	0	4
6	0	7	0
4	0	6	4

بما أن عدد المستقيمات المسحوبة أقل من عدد صفوف أو أعمدة المصفوفة، لذا الشرط الثاني غير محقق لذلك لا بد من تطوير الحل، وذلك باختيار أقل قيمة من القيم غير مغطاة وهي (4) وطرحها من باقي القيم الغير مغطاة ونظيف هذه القيمة إلى نقطة التقاطع المستقيمات، وتصبح المصفوفة كالآتي:

5	0	4	2
0	6	0	4
6	4	7	0
0	0	2	0

وهنا عدد المستقيمات المسحوبة على الأسطر والأعمدة تساوي أربعة ومنه الشرط الثاني محقق وعليه الجدول أعلاه جدول حل أمثل ومنه يمكن قيام بسياسة التخصيص كالآتي:

الربح	*الوظيفة*	*الوظائف*				العمال
15	**2**			2		**A**
6	**3**		3		~~1~~	**B**
7	**4**	4				**C**
14	**1**	~~4~~		~~2~~	1	**D**
42						**مجموع الأرباح**

III- حالات خاصة في مشاكل التخصيص:

هناك عدد من الحالات الخاصة في مشاكل التخصيص وهي:

III-1- عدم تساوي الصفوف والأعمدة:

لا يتحققا أحيانا شرط أساسي من شروط التخصيص وهو ضروري تساوي الصفوف والأعمدة، لذلك يتم اللجوء في هذه الحالة إلى إضافة صف أو عمود وهمي إلى جهة النقص بقيمة الصفر سواء أكان الهدف تخفيض أدنى كلفة أو أقصى عائد.

مثال رقم (05): تنوي شركة مقاولات إنشاء أربعة مشاريع إسكانية في أربعة مناطق مختلفة، فإذا كان لدى الشركة ثلاث وسائل لحفر وتسوية هذه الأرضي، فإذا كان تقدير الشركة لتكاليف إنجاز هذه المهام بالآلاف الدنانير هي كما في الجدول التالي:

المدينة 4	المدينة 3	المدينة 2	المدينة 1	*المشاريع* / *الوسائل*
11	8	12	9	**A**
9	18	5	16	**B**
20	9	4	7	**C**

المطلوب: إيجاد أفضل تخصيص يحقق أقل تكاليف بطريقة الهنكارية

الحل: نلاحظ في هذا المثال بأن عدد الوسائل أقل من المهام وهذا يعني ضرورة استحداث صف وهمي لموازنة مشكلة التخصيص كما يلي:

المدينة 4	المدينة 3	المدينة 2	المدينة 1	*المشاريع* / *الوسائل*
11	8	12	9	**A**
9	18	5	16	**B**
20	9	4	7	**C**
0	0	0	0	**D** وهمي

طرح أقل قيمة في كل صف لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم الصف:

9	12	8	11
16	5	18	9
7	4	9	20
0	0	0	0

وتصبح المصفوفة كما يلي:

1	4	0	3
11	0	13	4
3	0	5	16
0	0	0	0

لا يتم طرح أقل قيمة في كل عمود لأنها تساوي صفر، إختبار مثالية الحل بتغطية جميع الأصفار بأقل عدد من الخطوط المستقيمة.

1	4	0	3	3
11	0	13	4	
3	0	5	16	
0	0	0	0	1
	2			

بما أن عدد المستقيمات المسحوبة أقل من عدد صفوف أو أعمدة المصفوفة، لذا الشرط الثاني غير محقق لذلك لا بد من تطوير الحل، وذلك باختيار أقل قيمة من القيم غير مغطاة وهي (3) وطرحها من باقي القيم الغير مغطاة ونظيف هذه القيمة إلى نقطة التقاطع المستقيمات، وتصبح المصفوفة كالآتي:

	1	7	0	3	4
	8	0	10	1	
2	0	0	2	13	
	0	3	0	0	1
		3			

وهنا عدد المستقيمات المسحوبة على الأسطر والأعمدة تساوي أربعة ومنه الشرط الثاني محقق وعليه الجدول أعلاه جدول حل أمثل ومنه يمكن قيام بسياسة التخصيص كالآتي:

الوسائل	*المشاريع*				*الوظيفة*	*الكلفة*
A			م3		**م3**	8
B		م2			**م2**	5
C	م1	~~م2~~			**م1**	7
D وهمي	~~م1~~		~~م3~~	م4	**م4**	0
مجموع التكاليف						20

III-2- تعدد الحلول المثلى:

قد تكون هناك بعض المشاكل التي ينجم عن حلها وجد أكثر من حل أمثل واحد أي أكثر من حل بديل له نفس الكلفة الكلية وهذا يعني مرونة عالية لدى متخذ القرار للإختيار والمناورة بالموارد المتاحة، وتحصل هذه الحالة عندما يكون بالإمكان تأشير أكثر من قيمة صفرية في نفس الوقت أو بعبارة أخرى تخصيص أكثر من وسيلة لمهمة واحدة .

مثال رقم (06): حل مشكلة التخصيص التالية بحيث تكون الكلفة الكلية أقل ما يمكن (التكاليف بالآلف الوحدات النقدية) بطريقة الهنكارية .

الوسائل / *المهمات*	**1**	**2**	**3**	**4**
A	10	15	16	18
B	14	13	16	10
C	11	9	8	18
D	13	13	11	9

المطلوب: إيجاد أفضل تخصيص يحقق أقل تكاليف بطريقة الهنكارية

طرح أقل قيمة في كل صف لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم الصف:

10	15	16	18
14	13	16	10
11	9	8	18
13	13	11	9

وتصبح المصفوفة كما يلي:

0	5	6	8
4	3	6	0
3	1	0	10
4	4	2	0

طرح أصغر قيمة في كل عمود لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم العمود:

0	5	6	8
4	3	6	0
3	1	0	10
4	4	2	0

وتصبح المصفوفة كما يلي:

0	4	6	8
4	2	6	0
3	0	0	10
4	3	2	0

نغطي كل صف و كل عمود يحتوي على صفر بأقل عدد من المستقيمات:

0	4	6	8
4	2	6	0
3	0	0	10
4	3	2	0

بما أن عدد المستقيمات المسحوبة أقل من عدد صفوف أو أعمدة المصفوفة، لذا الشرط الثاني غير محقق لذلك لا بد من تطوير الحل، وذلك باختيار أقل قيمة من القيم غير مغطاة وهي (2) وطرحها من باقي القيم الغير مغطاة ونظيف هذه القيمة إلى نقطة لتقاطع المستقيمات، وتصبح المصفوفة كالآتي:

0	4	6	10
2	0	4	0
3	0	0	12
2	1	0	0

وهنا عدد المستقيمات المسحوبة على الأسطر والأعمدة تساوي أربعة ومنه الشرط الثاني محقق وعليه الجدول أعلاه جدول حل أمثل ومنه يمكن القيام بسياسة التخصيص كالآتي:

الوسائل	المهمات				الحل الأمثل الأول	الكلفة	الحل الأمثل البديل	الكلفة
A	1				**1**	10	**1**	10
B		2		4	**2**	13	**4**	10
C		2	3		**3**	8	**2**	9
D			3	4	**4**	9	**3**	11
مجموع التكاليف						40		40

يتم اختيار أحد البدائل الاثنين ، إذا أن مجموع التكاليف للبدلين متساوي وهو **(40)**.

IV- طرق أخرى لحل مشكلة التخصيص:

هناك طريقتان لحل مشاكل التخصيص وهما:

IV-1- طريقة النقل:

في هذه الطريقة تعامل مشكلة التخصيص على أنها مشكلة نقل، وتعتبر قيم العرض والطلب جميعها مساوية إلى واحد، نجد الحل الابتدائي بأحد الطرق الثلاث المعروضة في الفصل السابق ثم نجد الحل الأمثل.[1]

مثال رقم (07): في جدول التخصيص الآتي استخدم طريقة النقل في إيجاد اقل التكاليف.

الآلات / العمال	1	2	3
A	9	13	7
B	14	14	6
C	10	13	8

1. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص 189.

الحل: باستخدام أقل التكاليف وهي القريبة من الحل الأمثل نجد:

العمال \ الآلات	1	2	3	العرض
A	9 (1)	13	7	1
B	14	14	6 (1)	1
C	10	13 (1)	8	1
الطلب	1	1	1	3 /3

ومنه أفضل تخصيص هو (A) في الآلة: 1 و(B) في الآلة: 3 و(C) في الآلة: 2 ، والكلفة الإجمالية هي 28 =(9)1+(6)1+(13)1

IV-2- طريقة البرمجة الخطية:

لتوضح مشكلة التخصيص على وفق أسلوب البرمجة الخطية نعتمد التالي:

مثال رقم (08): الوقت الذي يحتاجه المهندس في صيانة محطة عمل

المهندس \ *المحطة*	1	2	3	العرض
A	8	10	7	1
B	3	8	5	1
C	10	12	11	1
الطلب	1	1	1	3/3

فإذا كانت (X_{iJ}) تمثل تخصيص المهندس (i) للمحطة (j) فإن نموذج البرمجة الخطية يكون بالشكل الآتي:

$$Min(z) = 8x_{11} + 10x_{12} + 7x_{13} + 3x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + 10x_{31} + 12x_{32} + 11x_{33}$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

ويمكن إيجاد الحل الأمثل لهذا النموذج بإستخدام طريقة السمبليكس.

V- تمارين محلولة

التمرين الأول: ترغب إدارة شركة لخدمات الصيانة في تخصيص أربعة عمال مدربين للعمل على أربعة ألآت معينة، وأن تكاليف اشتغال العمال على الآلات المذكورة هي كما يلي:

الآلات / العمال	A	B	C	D
علاء	5	7	9	6
ماهر	14	13	10	4
محمد	15	11	12	5
أحمد	10	17	9	11

حل التمرين الأول:

تحديد أصغر قيمة في كل صف وطرحها من بقية القيم الصف:

5	7	9	6
14	13	10	4
15	11	12	5
10	17	9	11

وتصبح المصفوفة كما يلي:

0	2	4	1
10	9	6	0
10	6	7	0
1	8	0	2

تحديد أصغر قيمة في كل عمود وطرحها من بقية قيم العمود:

0	2	4	1
10	9	6	0
10	6	7	0
1	8	0	2

وتصبح المصفوفة كما يلي:

0	0	4	1
10	7	6	0
10	4	7	0
1	6	0	2

الآن نجد أن هناك على الأقل صفر واحد في كل صف وكل عمود وعليه الشرط الأول محقق، يمكن اختبار الحل بتغطية هذه الأصفار بمستقيمات.

0	0	4	1
10	7	6	0
10	4	7	0
1	6	0	2

بما أن عدد المستقيمات المسحوبة أقل من عدد صفوف أو أعمدة المصفوفة، لذا الشرط الثاني غير محقق لذلك لا بد من تطوير الحل، وذلك باختيار أقل قيمة من القيم غير مغطاة وهي (4) وطرحها من باقي القيم الغير مغطاة ونظيف هذه القيمة إلى نقطة التقاطع المستقيمات، وتصبح المصفوفة كالآتي:

0	0	4	5
6	3	2	0
6	0	3	0
1	6	0	6

إذن تحقق الشرط الثاني عدد المستقيمات تساوي عدد الأعمدة أو الصفوف أي تحقق الحل الأمثل ومنه يمكن الآن إجراء عملية التخصيص وكالآتي:

مجموعة العمل	الآلات				الآلة	التكلفة
علاء	A	~~B~~			A	5
ماهر				D	D	4
محمد		B		~~D~~	B	11
أحمد			C		C	9
مجموع التكاليف						29

التمرين الثاني: لدى أحد المؤسسات أربعة مدراء وثلاثة معامل ترغب في التوصل إلى التخصيص الأمثل للمدراء بحيث يحقق من ذلك أكبر عائد ممكن وطبق للبيانات التالية عند العائد المتحقق شهريا بالآلف الدنانير من كل حالة:

المديرين / *المعامل*	A	B	C
1	1	4	7
2	8	3	1
3	5	6	2
4	4	1	7

المطلوب: استخدم الطريقة الهنكارية لإيجاد أفضل تخصيص.

حل التمرين الثاني: نلاحظ أن عدد المعامل أقل من عدد المدراء، إذن نضيف معمل رابع وهمي لتحويل المصفوفة إلى مصفوفة مربعة (عوائد صفرية)، وذلك بطرح أكبر قيمة بها والبالغة (8) من باقي القيم.

المعامل / المديرين	A	B	C	D وهمي
1	1	4	7	0
2	8	3	1	0
3	5	6	2	0
4	4	1	7	0

وبطرح كل القيم من اكبر قيمة موجودة في المصفوفة وهي (8) نحصل على مصفوفة التكاليف الآتية:

المعامل / المديرين	A	B	C	D وهمي
1	7	4	1	8
2	0	5	7	8
3	3	2	6	8
4	4	7	1	8

طرح أقل قيمة في كل صف لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم الصف:

7	4	1	8
0	5	7	8
3	2	6	8
4	7	1	8

وتصبح المصفوفة كما يلي:

6	3	0	7
0	5	7	8
1	0	4	6
3	6	0	7

طرح أقل قيمة في كل عمود لا يوجد به صفر وطرحها من بقية القيم العمود:

6	3	0	7
0	5	7	8
1	0	4	6
3	6	0	7

وتصبح المصفوفة كما يلي:

6	3	0	1
0	5	7	2
1	0	4	0
3	6	0	1

اختبار مثالية الحل بتغطية جميع الأصفار بأقل عدد من الخطوط المستقيمة.

6	3	0	1
0	5	7	2
1	0	4	0
3	6	0	1

1

2

3

بما أن عدد المستقيمات المسحوبة أقل من عدد صفوف أو أعمدة المصفوفة، لذا الشرط الثاني غير محقق لذلك لا بد من تطوير الحل، وذلك باختيار أقل قيمة من القيم غير مغطاة وهي (1) وطرحها من باقي القيم الغير مغطاة ونظيف هذه القيمة إلى نقطة التقاطع المستقيمات، وتصبح المصفوفة كالآتي:

3	5	2	0	0	
	0	5	8	2	4
2	1	0	5	0	
	2	5	0	0	1

وهنا عدد المستقيمات المسحوبة على الأسطر والأعمدة تساوي أربعة ومنه الشرط الثاني محقق وعليه الجدول أعلاه جدول حل أمثل ومنه يمكن قيام بسياسة التخصيص كالآتي:

الوسائل	*المشاريع*				*البديل1*	*العائد*	*البديل2*	*العائد*
1			C	D	**C**	**7**	**D وهمي**	0
2	A				**A**	**8**	**A**	8
3		B		D	**B**	**6**	**B**	6
4			C	D	**D وهمي**	**0**	**C**	7
مجموع العوائد						21		21

تحقق المعامل الثلاثة اكبر عائد مقداره 21000 دينار وواضح أن كلا البديلين يحقق نفس العائد فيمكن الأخذ بأي منهما.

VI- تمارين مقترحة:

التمرين الأول: يرأس مدير أحد الأقسام، ثلاثة موظفين، ورغب المدير في إنجاز هؤلاء الموظفين الثلاثة ثلاث مهام مختلفة. ويختلف الموظفون في درجة مهارتهم وكفاءتهم وتختلف المهام من حيث درجة صعوبتها، ويوضح الجدول الأتي، تقديرات الوقت الذي حددها المدير والخاصة إنجاز كل موظف لمهمة معينة :

المهام / *الموظفون*	*A*	*B*	*C*
عصام	8	26	17
وسام	13	28	4
قيس	38	19	18

المطلوب: تخصيص كل عامل للقيام مهمة معينة، بحيث يؤدي ذلك إلى تقليل الوقت اللازم لإنجاز تلك المهام .

التمرين الثاني: ترغب شركة الصناعات الإلكترونية في تعيين عدد من مندوبي البيع لإنجاز مهمة بيع عدد من السلع، فإذا كان عدد مندوبي البيع أربعة، وكانت تكاليف إنجاز هذه المهام (بعشرات الدنانير) كالأتي:

السلع / *مندوبو البيع*	*ثلاجة*	*تلفزيون*	*مكيف*	*مجمدة*
أسامة	1	4	6	3
أكرام	9	7	10	9
سلام	4	5	11	7
علي	8	7	8	5

***المطلوب*:** إيجاد أفضل تخصيص باستخدام طريقة الحل المباشر، بحيث تحقق الشركة أدنى كلفة ممكنة.

التمرين الثالث: فكرت شركة المقاولات الحديثة بإنجاز عدد من المشاريع الإنشائية، فإذا كان عدد المشاريع أربعة وعدد المقاولين المسؤولين عن إنجاز تلك المشاريع أربعة، وتمثل المصفوفة أدناه العوائد (بآلاف الدنانير) لكل مقاول:

المشاريع المقاولون	***A***	***B***	***C***	***D***
خليل	18	10	6	2
ماهر	10	14	8	4
محمود	16	4	14	8
سامر	12	12	4	6

المطلوب: إيجاد أفضل سياسة تخصيص، بحيث تحقق الشركة أقصى العوائد.

الفصل السابع

تحليل الحساسية
(تحليل ما بعد الأمثلية)

كان الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية الذي تم تناوله في الفصول السابقة يتم تحت مجموعة من الفروض من بينها افتراض التأكد التام من المعلومات والعلاقات المختلفة المتعلقة بالمشكلة قيد الدراسة، ويعتبر تحليل الحساسية إحدى المزايا التي تفرزها البرمجة الخطية عند الوصول إلى الحل النهائي للمشكلة، فكثير من التغيرات قد يطرأ عليها تحول مفاجئ ممكن أن يخص موضوع الأسعار في السوق أو قد يطرأ جديد في ذهن متخذ القرار من توظيفه لقدرات بشرية جديدة أو اعتماد مسلك تكنولوجي جديد..الخ، مما يتطلب إعادة حل النموذج للمشكلة بعد إضافة التغيرات الجديدة.

إن إعادة حل النموذج يكون مرهقاً ويحتاج إلى وقت طويل، ولكن يمكن استخدام طريقة لا تتطلب إعادة الحل بكامله وذلك باستخدام ما يسمى تحليل الحساسية، وقد يسمى أيضا بتحليل ما بعد الأمثلية، ويمكن تعريف مفهوم تحليل الحساسية بأنه " عبارة عن دراسة تأثير التغيرات في مكونات المشكلة على نموذج البرمجة الخطية[1].

وإن هذه التغيرات التي يمكن أن تحدث على نموذج البرمجة الخطية يمكن حصرها في ما يلي:

- ✓ التغيرات في معاملات دالة الهدف؛
- ✓ التغيرات في الطرف الأيمن للقيود؛
- ✓ التغيرات في معاملات متغيرات القرار في القيود؛
- ✓ إضافة متغير أو متغيرات جديدة؛
- ✓ إضافة قيد جديد أو قيود جديدة.

إن هذه التغيرات تؤدي إلى واحد من الحالات الثلاث[2]:

- ✓ يبقى الحل الأمثل للمسألة كما هو دون أن يتأثر بالتغيرات الجديدة؛
- ✓ تبقى المتغيرات الأساسية هي نفسها ولكن ربما تتغير قيمتها نتيجة للتغيرات الإضافية (الجديدة)؛
- ✓ يتغير الحل الأساسي بأكمله من جراء التغيرات الجديدة.

---

[1]. دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص 121.

[2]. سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سابق، 131.

I– التغيرات في معاملات دالة الهدف ومدى الأمثلية:

I-1- التغيرات في معاملات دالة الهدف:

مثال رقم (01): لو فرضنا أن لدينا المشكلة الآتية:

$$Max(z) = 40x_1 + 30x_2 + 25x_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 100 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 240 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 360 \end{cases}$$
$$x_1; x_2; x_3 \geq 0$$

وكانت النتائج في جدول الحل الأخير(جدول الحل الأمثل) كالأتي (يترك حل المشكلة كتمرين للطالب):

	C_J	40	30	25	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
25	X_3	0	0,5	1	2,5	0	-0,5	70
0	S_2	0	0,5	0	-0,5	1	-0,5	10
40	X_1	1	0,5	0	-1,5	0	0,5	30
Z_J		40	32,5	25	2,5	0	7,5	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	-2,5	0	-2,5	0	-7,5	Z=2950

والحل الأمثل للمشكلة هو الآتي:

$$X_1 = 30\ ;\ X_3 = 70\ ;\ S_2 = 10\ ;\ S_2 = S_3 = 0 ; Z = 2950$$

لو نفرض أن قيمة (X_1) في دالة الهدف ارتفعت من (40) إلى (42) فإنه يمكن إعادة حساب قيم جدول الحل الأمثل (Z ; C_J–Z_J ; Z_J) وتكون النتيجة كما هو مبين في الجدول الآتي:

	C_J	42	30	25	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
25	X_3	0	0,5	1	2,5	0	-0,5	70
0	S_2	0	0,5	0	−0,5	1	-0,5	10
42	X_1	1	0,5	0	−1,5	0	0,5	30
Z_J		42	33,5	25	−0,5	0	8,5	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	−3,5	0	0,5	0	−8,5	Z=2800

نلاحظ أن احد قيم صف $\left(\Delta Z = C_J - Z_J\right)$ أكبر من صفر (0,5)، وهذا يعني بأن الحل بعد أمثل، وهذا يعني عدم بقاء المتغيرات الأساسية على حالها أي يجب تطوير الحل.

I-2- مدى الأمثلية:

يهدف مدى الأمثلية إلى تحديد الحد الأعلى و الحد الأدنى لمعاملات متغيرات القرار في دالة الهدف والتي ضمن حدودها يبقى الحل أمثل، ولتحديد مدى الأمثلية نتبع الخطوات التالية[1]:

- في جدول الحل الأمثل نستبدل معامل المتغير الذي نبحث له عن مدى الأمثلية بمعامل مجهول القيمة، ونرمز له بالرمز $(C_j ; j=1,2,\ldots\ldots,n)$ ؛
- نعيد حساب صف (Z) وصف (C−Z)؛
- من صف (C−Z) نختبر أمثلية الحل، حيث يجب أن تكون جميع قيم صف (C−Z) أقل من أو تساوي صفر $(C-Z \leq 0)$ في حالة كانت طبيعة دالة الهدف تعظيم، أو تكون جميع قيم صف (C−Z) أكبر من أو تساوي صفر $(C-Z \geq 0)$، في حال كانت طبيعة دالة الهدف تخفيض، وهذا يتطلب تكوين متراجحات جانبها الأيسر أية قيمة في صف (C−Z) تحتوي على (C_j)، وجانبها الأيمن صفر، وإشارتها حسب طبيعة دالة الهدف؛
- يتم حل المتراجحات التي تكونت في الخطوة السابقة، ومن نتيجة الحل نحدد حدود المعامل (C_j).

مثال رقم (02): من المثال السابق حدد مدى الأمثلية للمعاملات $(X_1 ; X_2 ; X_3)$.

✓ **مدى الأمثلية لـ** (X_1): نتبع نفس الخطوات نعيد حساب صف $\left(\Delta Z = C_J - Z_J\right)$، ونضع مكان المتغير (X_1) بـ C_1 :

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود المكاوي، مرجع سابق، ص114.

	C_J	C_1	30	25	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
25	X_3	0	0,5	1	2,5	0	-0,5	70
0	S_2	0	0,5	0	−0,5	1	-0,5	10
C_1	X_1	1	0,5	0	−1,5	0	0,5	30
Z_J		C_1	$12,5+0,5C_1$	25	$62,5-1,5C_1$	0	$-12,5+0,5C_1$	**Z= 1750**
ΔZ		0	$17,5-0,5C_1$	0	$-62,5+1,5C_1$	0	$12,5-0,5C_1$	**$+30C_1$**

من صف(ΔZ) نختبر أمثلية الحل ونقوم بتكوين متراجحات من قيمة (ΔZ) التي تحتوي على C_1:

$$17,5-0,5C_1 \le 0..........(1) \Rightarrow C_1 \ge 35$$
$$-62,5+1,5C_1 \le 0..........(2) \Rightarrow C_1 \le 41,67$$
$$12,5-0,5C_1 \le 0..........(3) \Rightarrow C_1 \ge 25$$

وبناء على هذه النتائج نستطيع تحديد مدى الأمثلية لمعامل (X_1):

$$25 \le 35 \le C_1 \le 41,67$$

نستبعد الحد 25 فيصبح : **$35 \le X_1 \le 41,67$**

وهنا يعني أن الحل يبقى أمثل مادامت معامل (X_1) بين(41,67) و(35) ولإثبات ذلك لما فرضنا($X_1=42$) وهي خارج المجال الذي توصلنا إليه وبالتالي جدول الحل غير أمثل.

✓ **مدى الأمثلية لـ** (X_2): نتبع نفس الخطوات نعيد حساب صف (ΔZ)، ونضع مكان المتغير (X_2) بـ C_2 :

	C_J	40	C_2	25	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
25	X_3	0	0,5	1	2,5	0	-0,5	70
0	S_2	0	0,5	0	−0,5	1	-0,5	10
40	X_1	1	0,5	0	−1,5	0	0,5	30
Z_J		40	32,5	25	2,5	0	7,5	
ΔZ		0	$C_2-32,5$	0	−2,5	0	−7,5	**Z= 2950**

من صف(ΔZ) نجد:

$$C_2 - 32,5 \leq 0 \Rightarrow C_2 \leq 32,5$$

وبناء على هذه النتائج نستطيع تحديد مدى الأمثلية لمعامل (X_2):

غير محدود $\leq X_2 \leq 32,5$

قاعدة عامة: عندما يكون (X_i ; i=1, ...n) متغير غير أساسي عند الحل الأمثل (غير داخل في الحل)، يتم تحديد مدى الأمثلية لمعامله في دالة الهدف بموجب القاعدة التالية:

قيمة (Z) المقابلة له $\leq C_i \leq$ غير محدود

- ✓ **مدى الأمثلية لـ** (X_3): نتبع نفس الخطوات نجد:

$$\mathbf{24 \leq X_3 \leq 40}$$

II– التغيرات في الطرف الأيمن للقيود (الموارد المتاحة) ومدى الإمكانية:

II-1- سعر الظل: سعر الظل هو عبارة عن مقدار الزيادة أو النقص في قيمة دالة الهدف (Z) الناتج عن زيادة أو نقص الموارد المتاحة، أيضاً هو عبارة عن الربح الإجمالي الناجم عن إضافة وحدة واحدة جديدة من الموارد النادرة[1].

يمكن الحصول على المعلومات المتعلقة بأسعار الظل من قيم صف (z)، فإن سعر الظل المورد الأول هو (2,5) المقابل لـ (S_1)، وسعر الظل المورد الثاني هو (0) المقابل لـ (S_2)، وسعر الظل الثالث هو (7,5)، وهذه النتائج تعني أن زيادة وحدة واحدة من أي مورد ستؤدي إلى زيادة قيمة دالة الهدف بمقدار سعر الظل وستؤثر هذه الزيادة على نتيجة الحل الأساسي (عمود الطرف الأيمن) في جدول الحل الأمثل حيث يمكن إيجاد قيم عمود الطرف الأيمن الجديد (B) باستخدام العلاقة التالية:

الكميات الجديدة = القيم الأصلية + مقدار التغير في كمية المورد (i) X القيم المقابلة في عمود S_i الممثل للمورد (i).

مثال رقم (03): بالعودة للمثال الأول:

- نفرض على سبيل المثال زيادة (b_1) بوحدة واحدة، ستؤدي إلى زيادة الربح (2,5) دينار وتصبح قيمة دالة الهدف (Z=2952,5) حيث يمكن إيجاد قيم عمود الطرف الأيمن الجديد باستخدام العلاقة السابقة:

---

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود المكاوي، مرجع سابق، ص120.

$$NewB = \begin{pmatrix} 70 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} + (1)\begin{pmatrix} 2,5 \\ -0,5 \\ -1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 72,5 \\ 9,5 \\ 28,5 \end{pmatrix}$$

ويمكن حساب قيمة (Z) الجديدة على النحو التالي:

$$Z = 25(72,5) + 0(9,5) + 40(28,5) = 2952,5$$

- نفرض أن ساعات العمل (b_3) قد ازدادت بمقدار (10) ساعات من 360 ساعة إلى 370 ساعة عمل كيف تؤثر على قيمة (Z) التي تمثل الأرباح.

إيجاد قيم عمود الطرف الأيمن الجديد بإستحدام العلاقة السابقة:

$$NewB = \begin{pmatrix} 70 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} + (10)\begin{pmatrix} -0,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 5 \\ 35 \end{pmatrix}$$

وبناء على القيم الجديدة للطرف الأيمن يتم إعادة حساب (Z) الجديدة:

$$Z = 25(65) + 0(5) + 40(35) = 3025$$

سعر الظل لـ (b_3) هو (7,5) أي تزداد (Z) بـ (10X7,5=75) أي:

$$Z = 2950 + 75 = 3025$$

II-2- مدى الإمكانية:

يهدف مدى الإمكانية إلى تحديد الحد الأعلى والحد الأدنى لقيم الطرف الأيمن لقيود نموذج البرمجة الخطية (الموارد المتاحة) ولتحديد مدى الإمكانية نتبع الخطوات التالية:

- من جدول الحل الأمثل نجد مدى التغير في الطرف الأيمن للقيد (i)، $(\Delta b_i ; i = 1,2 .... m)$ وهو عبارة عن حاصل قسمة قيم عمود الطرف الأيمن على القيم المقابلة لها في عمود متغير الفجوة التابع للقيد الذي نبحث في إيجاد مدى الإمكانية لطرفه الأيمن؛
- نحدد طرفي مدى الإمكانية (الحد الأعلى والأدنى) باستخدام الصيغة التالية:

مدى الإمكانية = الكمية الأصلية للطرف الأيمن للقيد (i) – مدى القيد

مثال رقم (4): وبتطبيق الخطوات السابقة على المثال الأول نحصل على الآتي:

أولا: مدى الإمكانية للكمية التي تمثل الطرف الأيمن للقيد الأول و التي سنرمز لها بالرمز **(b_1):**

أ. نجد مدى التغير (Δb_1) على النحو الآتي:

$$\Delta_1 b_1 = \frac{70}{2,5} = 28$$

$$\Delta_2 b_1 = \frac{10}{-0,5} = -20$$

$$\Delta_3 b_1 = \frac{30}{-1,5} = -20$$

ب. نجد المدى: إن الكمية الأصيلة الطرف الأيمن في القيد الأول هي 100 وحدة، لذلك فإن المدى:

$$R_1 = 100 - (28) = 72$$

$$R_2 == 100 - (-20) = 120$$

$$R_3 = 100 - (-20) = 120$$

وبناء على النتائج السابقة فإن مدى الإمكانية للقيد الأول هي:

$$\mathbf{72 \leq b_1 \leq 120}$$

ثانيا: مدى الإمكانية لـ (b_3) التي تمثل القيد الثالث: التي تمثل القيد الثالث بنفس الطريقة السابقة نحصل على:

$$\mathbf{300 \leq b_3 \leq 380}$$

ثالثا: مدى الإمكانية لـ (b_2):

إذا كان متغير الفجوة التابع للأحد القيود ضمن مزيج الحل الأساسي (داخل في الحل) في جدول الحل الأمثل، فإن هذا يشير إلى وجود كمية إضافية من هذا المورد ويعني ذلك أن الحد الأعلى لمدى الإمكانية الخاص بهذا المورد (غير محدد) والحد الأدنى يساوي الكمية الأصلية للمورد مطروحاً منه قيمة المتغير الفجوة التابع للقيد في الجدول الأمثل.

فمثلا: نلاحظ أن متغير الفجوة التابع للمورد الثاني(S_2) هو متغير أساسي وقيمته (10)، فإن الحد الأعلى لمدى إمكانية (b_2) مفتوح وحده الأدنى يساوي الكمية الأصلية (240−10=230) ومنه مدى الإمكانية:

$$\mathbf{230 \leq b_2 \leq} \text{ **غير محدد** }$$

ملاحظة:

- في حالة إشارة القيد يساوي أو أكبر من أو يساوي فإن المدى التغير له هو عبارة عن حاصل قسمة عمود الطرف الأيمن على القيم المقابلة لها في عمود المتغير الإصطناعي التابع له؛
- في حالة وجود أكثر من حد أعلى نأخذ القيمة الأصغر، وفي حالة وجود أكثر من حد أدنى نأخذ القيمة الأكبر.

III- التغيرات في معاملات متغيرات القرار في القيود:

إن التغير قد يشمل معاملات متغيرات القرار فإذا حدث أي تغير في معاملات هذه المتغيرات فإن ذلك سوف يؤدي إلى تغير عناصر المصفوفة، وعليه فإنه سوف يكون من الصعب معرفة اثر هذه التغيرات مباشرة على الحل الأمثل، وسوف لن تزودنا بأي معلومات عن اثر هذا التغير، وعليه يصعب دراسة هذا النوع من التغيرات في معاملات متغيرات القرار وفي مثل هذه الحالة يفضل إعادة حل النموذج الرياضي مجدداً بعد إدخال التغيرات (لا يمكن دراسة اثر تحليل الحساسية)[1].

IV- إضافة متغير أو متغيرات جديدة:

إن إضافة متغير جديد يؤثر على أمثلية المسألة حيث أن إضافة هذا المتغير سيضيف معاملات جديدة إلى دالة الهدف وقيود المسألة. فإن هذا المتغير الجديد المضاف قد يصبح متغيراً أساسيا إذا دخل الحل ويكون له دور في تحسين الحل (قيمة دالة الهدف)، أما إذا لم تكن له القدرة على تحسين قيمة دالة الهدف فإنه سيكون متغيراً غير أساسي وتكون قيمته صفر[2].

القيم الجديدة لعمود المتغير الجديد في جدول الحل الأمثل = مصفوفة متغيرات الفجوة في الحل الأمثلx عمود القيم الأساسية للمتغير الجديد

وبناء على هذا يتم إعادة حساب قيم صف (Z) و (ΔZ) واختبار مدى أمثلية الحل حسب طبيعة دالة الهدف.

مثال رقم (05): بالعودة للمثال السابق نفرض إضافة متغير جديد (X_4) وبربح مقداره 20 دينار وبمعاملات في القيود الثلاثة (1; 2; 4) على التوالي، فإن عملية حساب قيم عمود (X_4) تتم كما يلي:

---

[1]. محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، أحمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص128.

[2]. سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سابق، ص 144.

$$\begin{pmatrix} 2,5 & 0 & -0,5 \\ -0,5 & 1 & -0,5 \\ -1,5 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

نضع النتائج في جدول الحل الأمثل يصبح كما يلي :

	C_J	40	30	25	20	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	B
25	X_3	0	0,5	1	0,5	2,5	0	−0,5	70
0	S_2	0	0,5	0	−0,5	−0,5	1	−0,5	10
40	X_1	1	0,5	0	0,5	−1,5	0	0,5	30
Z_J		40	32,5	25	32,5	2,5	0	7,5	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	−2,5	0	−12,5	−2,5	0	−7,5	**Z=2950**

من خلال الجدول نلاحظ أن كل ($\Delta Z \leq 0$) وهذا يعني أن الحل الأمثل ومزيج الحل الأساسي وقيمة الربح لم يتغيرا، تشير هذه النتيجة إلى أن إضافة منتج جديد لم تؤثر في الربح، حيث بقيت قيمة الربح كما هي 2950 دينار ولكن هذه الحالة ليست دائمة.

V- إضافة قيد أو قيود جديدة:

إن إضافة قيد جديد لمشكلة البرمجة الخطية سيؤثر على مزيج الحل الأساسي، وعلى قيمة دالة الهدف، لتوضيح ذلك نستعين بالمثال التالي:

مثال رقم (06): من المثال الأول نضيف قيد جديد كما يلي:

$$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 300$$

وترغب المؤسسة في معرفة تأثير إدخال القيد الجديد على الحل الأمثل، ولمعرفة تأثير دخول القيد الجديد على الحل الأمثل نتبع الخطوات التالية:

1. نحول القيد الجديد إلى الصيغة النموذجية:

$$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 + S_4 = 300$$

2. إن متغير الفجوة (S_4) يكون عند الحل الأولي متغير أساسي داخل في الحل وتكون قيم صفه المقابلة للمتغيرات الأخرى هي على النحو الأتي:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 300 \end{pmatrix}$$

3. يبين الجدول الحل الأمثل أن (X_1) و (X_3) دخل الحل، لذلك نطبق على صف متغير الفجوة (S_4) القاعدة بكيفية إيجاد قيم صف المتغيرات الأخرى عند دخول أحدها في الحل فنقوم بإيجاد تأثير دخول المتغيرتين (X_1) و (X_3) على صف (S_4) الجديد معتمدين على نتائج الحل النهائي قبل إضافة القيد وعلى النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 300 \end{pmatrix} - \left[2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 1 \\ 2,5 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0 \\ 70 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \\ 0 \\ -1,5 \\ 0 \\ 0,5 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,5 \\ 0 \\ -0,5 \\ 0 \\ -0,5 \\ 1 \\ 70 \end{pmatrix}$$

وبناء على هذه النتائج يكون جدول الحل الأمثل على النحو الآتي:

	C_J	40	30	25	0	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	B
25	X_3	0	0,5	1	2,5	0	−0,5	0	70
0	S_2	0	0,5	0	−0,5	1	−0,5	0	10
40	X_1	1	0,5	0	−1,5	0	0,5	0	30
0	S_4	0	−0,5	0	−0,5	0	−0,5	1	70
Z_J		40	32,5	25	2,5	0	7,5	0	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	−2,5	0	−2,5	0	−7,5	0	Z=2950

من خلال الجدول نلاحظ أن كل $(\Delta Z \leq 0)$ وهذا يعني أن الحل الأمثل لكن مزيج الحل الأساسي قد تغير بإضافة المتغير الفجوة (S_4) إلى الحل ولكن قيمة الربح لم تتغير، ولكن هذه الحالة ليست دائما.

ملاحظة:

1. إذا كانت في عمود الثوابت (B) قيمة سالبة مثلا (70−) بدلا من (70)، مما يجعل الحل غير ممكن، يتطلب ذلك تطبيق طريقة المبسطة للنموذج المقابل (Dual) لتتخلص من قيمته السالبة؛

2. يمكن تأكد من القيد هل هو قيداً فائضاً (لا يؤثر على الحل) أو قيد لا يتحقق.

فمثلا بالعودة للقيد المضاف السابق:

$$3X_1 + 2X_2 + 2X_3 \leq 300$$

بتعويض قيم (X_1 ;X_2 ;X_3) نحصل على :

$$3(30) + 2(0) + 2(70) = 230 \prec 300$$

نجد أن القيد يتحقق، وعليه يمكن اعتبار هذا القيد قيداً فائضا لا تأثير له على الحل.

VI– تمارين محلولة

التمرين الأول : لتكن لدينا المشكلة الآتية:

$$Max(z) = 20x_1 + 25x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \leq 40 \\ x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ 3x_1 + x_2 \leq 30 \end{cases}$$
$$x_1 ; x_2 \geq 0$$

جدول الحل الأمثل البرنامج المقابل هو:

	C_J	20	25	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
0	S_1	0	0	1	$-\frac{7}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6
25	X_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	6
20	X_1	1	0	0	$-\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	8
Z_J		20	25	0	11	3	
ΔZ		0	0	0	-11	-3	**Z=310**

المطلوب:

1. نفرض أن دالة الهدف للمشكلة قد تغيرت إلى:

$$Max(z) = 20x_1 + 45x_2$$

استخرج جدول الحل الأمثل لهذه المشكلة حدد مدى الأمثلية لمعامل X_1 و X_2 ؛

2. نفرض أن الجانب الأيمن للمشكلة قد تغير إلى 40 ، 23 ، 30 على التوالي ؛ أوجد القيم الجديدة للطرف الأيمن وإعادة احتساب قيمة Z ؛

3. أوجد مدى الإمكانية لكل من b_1 , b_2 , b_3 ؛

حل التمرين الأول:

1. نلاحظ أن قيمة (X_2) في دالة الهدف ارتفعت من (25) إلى (45) فإنه يمكن إعادة حساب قيم جدول الحل الأمثل (Z ; $C_J - Z_J$; Z_J) وتكون النتيجة كما هو مبين في الجدول الآتي:

	C_J	20	45	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
0	S_1	0	0	1	$\frac{-7}{5}$	$\frac{-1}{5}$	6
45	X_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	6
20	X_1	1	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	8
Z_J		20	45	0	23	−1	
ΔZ		0	0	0	-23	1	Z=430

نلاحظ أن احد قيم صف $\left(\Delta Z = C_J - Z_J\right)$ أكبر من صفر (1)، وهذا يعني بأن الحل لا يمثل الحل الأمثل، وهذا يعني عدم بقاء المتغيرات الأساسية على حالها أي يجب تطوير الحل، المتغيرة الداخلة هي (S_3) والخارجة هي (X_1) والجدول الجديد هو على الشكل الأتي:

	C_J	20	45	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
0	S_1	$\frac{1}{2}$	0	1	$\frac{-3}{2}$	1	10
45	X_2	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	10
0	S_3	$\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	0	20
Z_J		$\frac{45}{2}$	45	0	$\frac{45}{2}$	0	Z=450
ΔZ		$\frac{-5}{2}$	0	0	$\frac{-45}{2}$	0	

ومن الجدول أعلاه هو جدول حل أمثل لأن $\left(\Delta Z \le 0\right)$ بعد تغير معامل (X_2) في دالة الهدف .

✓ **مدى الأمثلية لـ** (X_1): نتبع نفس الخطوات نعيد حساب صف $\left(\Delta Z = C_J - Z_J\right)$، ونضع مكان المتغير (X_1) بـ C_1 :

	C_J	C_1	25	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
0	S_1	0	0	1	$\frac{-7}{5}$	$\frac{-1}{5}$	6
25	X_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	6
C_1	X_1	1	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	8
Z_J		C_1	25	0	$15-\frac{C_1}{5}$	$\frac{2C_1}{5}-5$	$Z=150+8C_1$
ΔZ		0	0	0	$\frac{C_1}{5}-15$	$5-\frac{2C_1}{5}$	

من صف(ΔZ) نختبر أمثلية الحل ونقوم بتكوين متراجحات من قيمة (ΔZ) التي تحتوي على C_1:

$$\frac{C_1}{5}-15 \le 0 .... (1) \Rightarrow C_1 \le 75$$

$$5-\frac{2C_1}{5} \le 0 .... (2) \Rightarrow C_1 \ge \frac{25}{2}$$

وبناء على هذه النتائج نستطيع تحديد مدى الأمثلية لمعامل (X_1):

$$\frac{25}{2} \le C_1 \le 75$$

$$\frac{25}{2} \le X_1 \le 75$$

وهنا يعني أن الحل يبقى أمثل مادامت معامل (X_1) بين(75) و(12,5).

✓ **مدى الأمثلية لـ** (X_2): نتبع نفس الخطوات نعيد حساب صف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$، ونضع مكان المتغير (X_2) بـ C_2 :

	C_J	20	C_2	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
0	S_1	0	0	1	$\frac{-7}{5}$	$\frac{-1}{5}$	6
C_2	X_2	0	1	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{-1}{5}$	6
20	X_1	1	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{2}{5}$	8
Z_J		20	C_2	0	$\frac{3C_2}{5}-4$	$8-\frac{C_2}{5}$	$Z = 6C_2 + 160$
ΔZ		0	0	0	$4-\frac{3C_2}{5}$	$\frac{C_2}{5}-8$	

من صف(ΔZ) نختبر أمثلية الحل ونقوم بتكوين متراجحات من قيمة (ΔZ) التي تحتوي على C_2:

$$4-\frac{3C_2}{5}\leq 0.........\ (1)\Rightarrow C_1 \geq \frac{20}{3}$$

$$\frac{C_2}{5}-8\leq 0.........\ (2)\Rightarrow C_2 \leq 40$$

وبناء على هذه النتائج نستطيع تحديد مدى الأمثلية لمعامل (X_2):

$$\frac{20}{3}\leq C_2 \leq 40$$

$$\frac{20}{3}\leq X_2 \leq 40$$

وهنا يعني أن الحل يبقى أمثل مادامت معامل (X_2) بين(40) و(6,66)، ولإثبات ذلك لما فرضنا(X_2=45) وهي خارج المجال الذي توصلنا إليه وبتالي جدول الحل غير أمثل.

2. لدينا (b_2) قد ازدادت بمقدار (3) ساعات من 20 ساعة إلى 23 ساعة عمل كيف تؤثر على قيمة (Z) التي تمثل الأرباح.

إيجاد قيم عمود الطرف الأيمن الجديد بإستحدام العلاقة السابقة:

$$NewB = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 8 \end{pmatrix} + (3)\begin{pmatrix} \frac{-7}{5} \\ \frac{3}{5} \\ \frac{-1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{5} \\ \frac{39}{5} \\ \frac{37}{5} \end{pmatrix}$$

وبناء على القيم الجديدة للطرف الأيمن يتم إعادة حساب (Z) الجديدة:

$$Z = 20\left(\frac{37}{5}\right) + 25\left(\frac{39}{5}\right) = 343$$

سعر الظل لـ (b_2) هو (11) أي تزداد (Z) بـ (3X11=33) أي:

$$Z = 310 + 33 = 343$$

3. مدى الإمكانية:

✓ مدى الإمكانية للطرف الأيمن للقيد الأول والتي سنرمز لها بالرمز **(b_1):**

بما أن متغير الفجوة التابع للقيد الأول ضمن مزيج الحل الأساسي (داخل في الحل) في جدول الحل الأمثل، فإن هذا يشير إلى وجود كمية إضافية من هذا المورد ويعني ذلك أن الحد الأعلى لمدى الإمكانية الخاص بهذا المورد (غير محدد) والحد الأدنى يساوي الكمية الأصلية للمورد مطروحاً منه قيمة متغير الفجوة التابع للقيد في الجدول الأمثل، نلاحظ أن متغير الفجوة التابع للمورد الأول(S_1) هو متغير أساسي وقيمته (6)، فإن الحد الأعلى لمدى إمكانية (b_1) مفتوح وحده الأدنى يساوي الكمية الأصلية (40−6=34) ومنه مدى الإمكانية:

$34 \leq b_1 \leq$ غير محدد

✓ مدى الإمكانية لـ (b_2):

أ. نجد مدى التغير (Δb_2) على النحو الآتي:

$$\Delta_1 b_2 = \frac{6}{\frac{-7}{5}} = \frac{-30}{7}$$

$$\Delta_2 b_2 = \frac{6}{\frac{3}{5}} = 10$$

$$\Delta_3 b_2 = \frac{8}{\frac{-1}{5}} = -40$$

ب. نجد المدى: إن الكمية الأصيلة للطرف الأيمن في القيد الثاني هي 20 وحدة، لذلك فإن المدى:

$$R_1 = 20 - \left(\frac{-30}{7}\right) = 24,28$$

$$R_2 == 20 - 10 = 10$$

$$R_3 = 20 - (-40) = 60$$

وبناء على النتائج السابقة فإن مدى الإمكانية للقيد الثاني هي:

$$\mathbf{10 \le b_2 \le 24,28}$$

✓ مدى الإمكانية لـ (b_3):

أ. نجد مدى التغير (Δb_3) على النحو الآتي:

$$\Delta_1 b_3 = \frac{6}{\frac{-1}{5}} = -30$$

$$\Delta_2 b_3 = \frac{6}{\frac{-1}{5}} = -30$$

$$\Delta_3 b_3 = \frac{8}{\frac{2}{5}} = 20$$

ب. نجد المدى: إن الكمية الأصيلة للطرف الأيمن في القيد الثالث هي 30 وحدة، لذلك فإن المدى:

$$R_1 = 30 - (-30) = 60$$

$$R_2 == 30 - (-30) = 60$$

$$R_3 = 30 - 20 = 10$$

وبناء على النتائج السابقة فإن مدى الإمكانية للقيد الثالث هي:

$$10 \leq b_3 \leq 60$$

التمرين الثاني: ليكن نموذج البرمجة الخطية الآتي:

$$Max(z) = 10x_1 + 12x_2 + 6x_3$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 80 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 59 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 \leq 120 \end{cases}$$

$$x_1; x_2; x_3 \geq 0$$

المطلوب:

1. اوجد الحل الأمثل للبرنامج المقابل ؛
2. أوجد مدى الأمثلية لـ X_3 ؛
3. نفرض أننا أضفنا متغير جديد للمشكلة الأصلية معاملات المتغير في القيود الثلاثة هي : 2 ، 2 ، 2 أما معامله في دالة الهدف يساوي 12 ، أوجد القيم الجديدة لعمود المتغير الجديد في جدول الحل الأمثل؛
4. إذا فرضنا أن القيد الجديد سيكون كالآتي :

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 40$$

ما مدى تأثير هذا القيد على المشكلة .

حل التمرين الثاني:

1. الحل الأمثل للبرنامج الخطي:

أولاً: إيجاد الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $x_1 + 2x_2 + 3x_3 + S_1 = 80$

القيد الثاني: $2x_1 + x_2 + x_3 + S_2 = 59$

القيد الثالث: $3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + S_3 = 120$

معادلة دالة الهدف:

$$Max(z) = 10x_1 + 12x_2 + 6x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

ثانياً: إيجاد جدول الحل الأساسي الأول:

T_1	C_J	10	12	6	0	0	0		
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B	$\frac{B}{X_2}$
0	S_1	1	2	3	1	0	0	80	40
0	S_2	2	1	1	0	1	0	59	59
0	S_3	3	5	4	0	0	1	120	24
Z_J		0	0	0	0	0	0		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		10	12	6	0	0	0	Z=0	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_2) والخارجة من الأساس هي: (S_3)

T_2	C_J	10	12	6	0	0	0		
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B	$\frac{B}{X_1}$
0	S_1	$\frac{-1}{5}$	0	$\frac{7}{5}$	1	0	$\frac{-2}{5}$	32	−
0	S_2	$\frac{7}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	0	1	$\frac{-1}{5}$	35	25
12	X_2	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{4}{5}$	0	0	$\frac{1}{5}$	24	40
Z_J		$\frac{36}{5}$	12	$\frac{48}{5}$	0	0	$\frac{12}{5}$		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		$\frac{14}{5}$	0	$\frac{-18}{5}$	0	0	$\frac{-12}{5}$	Z=288	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_1) والخارجة من الأساس هي: (S_2)

T_3	C_J	10	12	6	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	B
0	S_1	0	0	$\frac{10}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{-3}{7}$	37
10	X_1	1	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{-1}{7}$	25
12	X_2	0	1	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{-3}{7}$	$\frac{2}{7}$	9
Z_J		10	12	10	0	2	2	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	−4	0	−2	−2	Z=358

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \leq 0$ ومنه الجدول الثالث هو جدول الحل أمثل، والنتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 25 ; X_2 = 9; X_3 = 0; S_1 = 37 ; S_2 = S_3 = 0; Z = 358$$

2. مدى الأمثلية لـ (X_3):

بما أن المتغير (X_3) غير أساسي عند الحل الأمثل (غير داخل في الحل)، يتم تحديد مدى الأمثلية لمعامله في دالة الهدف بموجب القاعدة التالية:

قيمة (Z) المقابلة له $\leq C_i \leq$ غير محدود

10 $\leq X_3 \leq$ غير محدود

3. إضافة متغير جديد (X_4) وبربح مقداره 12 دينار وبمعاملات في القيود الثلاثة (2; 2; 2) على التوالي، فإن عملية حساب قيم عمود (X_4) تتم كما يلي:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{-3}{7} \\ 0 & \frac{5}{7} & \frac{-1}{7} \\ 0 & \frac{-3}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{7} \\ \frac{8}{7} \\ \frac{-2}{7} \end{pmatrix}$$

نضع النتائج في جدول حل الأمثل يصبح كما يلي:

T_3	C_J	10	12	6	12	0	0	0	B	$\frac{B}{X_4}$
CB	XB	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3		
0	S_1	0	0	$\frac{10}{7}$	$\frac{10}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{-3}{7}$	37	25,9
10	X_1	1	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{8}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{-1}{7}$	25	21,87
12	X_2	0	1	$\frac{5}{7}$	$\frac{-2}{7}$	0	$\frac{-3}{7}$	$\frac{2}{7}$	9	–
Z_J		10	12	10	8	0	2	2		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	−4	4	0	−2	−2	Z=358	

من خلال الجدول نلاحظ ليس كل $(\Delta Z \leq 0)$ وهذا يعني أن الحل ليس أمثل ومزيج الحل الأساسي وقيمة الربح سوف تتغير، المتغيرة الداخلة (X_4) والخارجة (X_1) ويكون جدول الحل كالآتي:

T_4	C_J	10	12	6	12	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	S_3	B
0	S_1	$\frac{-5}{4}$	0	$\frac{5}{4}$	0	1	$\frac{-3}{4}$	$\frac{-1}{4}$	$\frac{23}{4}$
12	X_4	$\frac{7}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	0	$\frac{5}{8}$	$\frac{-1}{8}$	$\frac{175}{8}$
12	X_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{-1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{61}{4}$
Z_J		$\frac{27}{2}$	12	$\frac{21}{2}$	12	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{2}$	$Z=\frac{891}{2}$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		$\frac{-7}{2}$	0	$\frac{-9}{2}$	0	0	$\frac{-9}{2}$	$\frac{-3}{2}$	

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \le 0$ ومنه الجدول الرابع هو جدول حل أمثل، ونتائجه هي كالآتي:

$$X_2 = \frac{61}{4};\ X_4 = \frac{23}{2};\ X_1 = X_3 = 0;\ S_1 = \frac{23}{4};\ S_2 = S_3 = 0;\ Z = \frac{891}{2}$$

4. القيد الجديد:

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 40$$

✓ نحول القيد الجديد إلى الصيغة النموذجية:

$$x_1 + x_2 + x_3 + S_4 = 40$$

إن متغير الفجوة (S_4) يكون عند الحل الأولي متغير أساسي داخل في الحل وتكون قيم صفه المقابلة للمتغيرات الأخرى هي على النحو الأتي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 40 \end{pmatrix}$$

يبين جدول الحل الأمثل أن (X_1) و (X_2) داخل الحل، لذلك نطبق على صف متغير الفجوة (S_4) القاعدة بكيفية إيجاد قيم صف المتغيرات الأخرى عند دخول أحدها في الحل فنقوم بإيجاد تأثير دخول المتغيرتين (X_1) و (X_2) على الصف (S_4) الجديد معتمدين على نتائج الحل النهائي قبل إضافة القيد وعلى النحو الآتي:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\\1\\40\end{pmatrix}-\left[\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{1}{7}\\0\\\frac{5}{7}\\\frac{-1}{7}\\0\\25\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{5}{7}\\0\\\frac{-3}{7}\\\frac{2}{7}\\0\\9\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{11}{7}\\0\\\frac{-8}{7}\\\frac{3}{7}\\1\\6\end{pmatrix}$$

وبناء على هذه النتائج يكون جدول الحل الأمثل على النحو الآتي:

T_3	C_J	10	12	6	0	0	0	0	B
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	S_4	
0	S_1	0	0	$\frac{10}{7}$	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{-3}{7}$	0	37
10	X_1	1	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	$\frac{-1}{7}$	0	25
12	X_2	0	1	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{-3}{7}$	$\frac{2}{7}$	0	9
0	S_4	0	0	$\frac{11}{7}$	0	$\frac{-8}{7}$	$\frac{3}{7}$	1	6
Z_J		10	12	10	0	2	2	0	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	−4	0	−2	−2	0	Z=358

من خلال الجدول نلاحظ أن كل ($\Delta Z \leq 0$) وهذا يعني أن الحل الأمثل لكن مزيج الحل الأساسي قد تغير بإضافة متغير الفجوة (S_4) إلى الحل ولكن قيمة الربح لم تتغير، ولكن هذه الحالة ليست دائما.

يمكن التأكد من القيد هل هو قيداً فائضاً (لا يؤثر على الحل) أو قيد لا يتحقق.

فمثلا بالعودة للقيد المضاف السابق:

$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 40$$

بتعويض قيم ($X_1 ;X_2 ;X_3$) نحصل على:

$$(25)+(9)+(0)=34 \prec 40$$

نجد أن القيد يتحقق، وعليه يمكن اعتبار هذا القيد قيداً فائضا لا تأثير له على الحل.

VII– تمارين مقترحة

التمرين الأول: لتكن لدينا المشكلة الآتية :

$$Max(z) = 30x_1 + 50x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_1 + 2x_2 \leq 11 \\ x_1 + 3x_2 \leq 15 \end{cases}$$
$$x_1; x_2 \geq 0$$

المطلوب :

1. اوجد الحل الأمثل للبرنامج السابق ؛
2. نفرض أن دالة الهدف للمشكلة قد تغيرت إلى :
$$Max(z) = 35x_1 + 55x_2$$
استخرج جدول الحل الأمثل لهذه المشكلة ؛
3. حدد مدى الأمثلية لمعامل (X_1) و (X_2)؛
4. نفرض أن الجانب الأيمن للمشكلة قد تغير إلى (20 ، 11 ، 15) على التوالي ؛ أوجد القيم الجديدة للطرف الأيمن وإعادة احتساب قيمة Z ؛
5. أوجد مدى الإمكانية لكل من b_1 , b_2 , b_3 ؛
6. نفرض أننا أضفنا متغير جديد للمشكلة الأصلية معاملات المتغير في القيود الثلاثة هي: (4 ، 2 ، 3) أما معامله في دالة الهدف يساوي 40 ، أوجد القيم الجديدة لعمود المتغير الجديد في جدول الحل الأمثل ؛
7. إذا فرضنا أن القيد الجديد سيكون كالآتي :
$$x_1 + 4x_2 \leq 13$$
ما مدى تأثير هذا القيد على المشكلة .

التمرين الثاني: أفرض أن مشكلة البرمجة الخطية الآتية و أن الجدول الذي يعطي الحل الأمثل هو:

$$Max(z) = 4x_1 + 5x_2 + 5x_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 430 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 460 \\ x_1 + 4x_2 \leq 420 \end{cases}$$
$$x_1; x_2; x_3 \geq 0$$

XB	X_1	X_2	X_3	S_1	S_2	S_3	
X_2	−1/4	1	0	1/2	−1/4	0	100
X_3	3/4	0	1	0	1/2	0	230
S_3	2	0	0	− 2	1	1	20

المطلوب :

1. نفرض أن المورد الثالث انخفض من (420) إلى (400)، أوجد القيم الجديدة للطرف الأيمن وإعادة احتساب قيمة (z).

2. إذا فرضنا أن القيد الجديد سيكون كالأتي :

$$x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 600$$

ما مدى تأثير القيد على المشكلة .

التمرين الثالث: قام مدير العمليات في مؤسسة س لصناعة البرمجيات ببناء نموذج البرمجة الخطية الذي يهدف إلى مساعدة المؤسسة في تخفيض تكاليف إنتاج نوعين من البرمجيات ، وفيما يلي جدول الحل الأمثل لهذه المشكلة :

$$Min(z) = 5x_1 + 6x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1000 \\ x_1 \leq 300 \\ x_2 \leq 150 \end{cases}$$
$$x_1; x_2 \geq 0$$

Cj		5	6	0	0	M	M	
CB	***XB***	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	***b***
0	S_1	0	0	−1	1	1	−1	550
5	X_1	1	0	1	0	0	0	300
6	X_2	0	1	−1	0	1	0	700
Zj		5	6	−1	0	6	0	***Z = 5700***
Δ Z		0	0	1	0	M−6	M	

المطلوب :

1. حدد مدى الأمثلية لمعامل (X_1) و (X_2) ؛
2. أوجد مدى الإمكانية لكل من b_1 , b_2 , b_3 .