جامعة الموصل
كلية الزراعة والغابات
قسم الاقتصاد الزراعي

مادة بحوث العمليات
(نظري)

المرحلة الثالثة

اعداد
المدرس : صلاح فهمي شابا

إن علم بحوث العمليات من العلوم التطبيقية الحديثة التي شاع استخدامها في المجالات المتعددة وخاصة في إدارة الأعمال، لهذا نحاول من خلال هذا الفصل إعطاء فكرة عن طبيعة ومفهوم بحوث العمليات، وتطورها ومجالات تطبيقها والعوامل التي ساعدت على تطور بحوث العمليات.

I- مفهوم بحوث العمليات:

اختلفت وجهات النظر وتباينت الآراء في إيجاد تعريف محدد لبحوث العمليات، فقد عرف دانتزيج (Dantzig) بحوث العمليات " **بأنها علم الادارة أي علم اتخاذ القرارات وتطبيقاتها** "[1]، ويعد هذا التعريف تعريفا شاملا ولا يقدم مفهوما واضحا لبحوث العمليات يميزها من غيرها من المصطلحات، فبحوث العمليات ليست علم اتخاذ القرارات وتطبيقها وإنما هي أدوات تستعمل مع غيرها من الأدوات الأخرى للمساعدة في اتخاذ القرارات.

إن الخاصية التي يتميز بها هذا العلم هو إعداد نموذج علمي وعملي لنظام معين يتضمن تحديد العوامل المؤثرة و التنبؤ ومقارنة النتائج لمساعدة الإدارة في قياس دقة النظام المستخدم وبالتالي اتخاذ القرارات المناسبة والسليمة[2].

أما مورس وكمبال (Morse and Kimblall) فقد عرفا بحوث العمليات " **بأنها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الأساس الكمي الذي يمكن الإدارة من اتخاذ القرارات** "، ومن هذا التعريف يمكن تحديد العناصر الرئيسة لبحوث العمليات على النحو الأتي[3]:

- استعمال الطريقة العلمية؛
- الاعتماد على الأساس الكمي، وذلك باستعمال أدوات بحوث العمليات وأساليبها؛
- يمكن الإدارة من اتخاذ قرارات أكثر موضوعية.

وعلى هذا الأساس يمكننا وضع تعريف محدد لبحوث العمليات على أنها تطبيق الطريقة العلمية بتوفير الأساس الكمي وباستعمال أدوات بحوث العمليات وأساليبها كالبرمجة الخطية والبرمجة العددية، والبرمجة غير الخطية والتحليل الشبكي،..... وذلك لتمكين الإدارة من اتخاذ قرارات أكثر موضوعية.

وهناك بعض التعريفات الأخرى الذي قدمها كبار المتخصصين بهذا العلم لتحديد مفهومه[4]:

---

[1]. حامد سعد نور الشمرتي: " **بحوث العمليات مفهوما وتطبيقا**"، مكتبة الذاكرة، بغداد، 2010، ص 02.

[2]. فتحي خليل حمدان، رشيق رفيق مرعي، " **مقدمة في بحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، ط 4، الأردن، 2004، ص 15.

[3] . حامد سعد نور الشمرتي: مرجع سابق، ص 02.

[4] . صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد:" **تطبيقات بحوث العمليات في الإدارة**"، إثراء للنشر والتوزيع، الأردن، ط1، 2009. ص 14.

- تعريف (Wagner): " **بحوث العمليات هي المدخل العلمي الذي تستخدمه الإدارة التنفيذية لحل المشاكل** "؛
- تعريف جمعية بحوث العمليات البريطانية: " **تطبيق الطرق العلمية لحل مشاكل معقدة في إدارة نظم كبيرة تشتمل على أفراد والآلات ومواد و رأس مال في الصناعة والأعمال والحكومة والدفاع**"؛
- تعريف جمعية بحوث العمليات الأمريكية: " **أساليب تتعلق بكيفية اتخاذ قرار عملي لتصميم وتشغيل نظم (العاملين، الآلات) والتي عادة ما تتطلب تخصيص الموارد النادرة** "؛
- تعريف حمدي طه: " **حقل علمي جديد لصناعة القرار يتصف باستخدام المعرفة العلمية من خلال جهود فرق عمل تضم في عضويتها متخصصين بمختلف المعارف بغرض الاستخدام الأفضل للموارد المحدودة** "؛

خلاصة القول بعد استعراض هذه التعريفات المختلفة، فإننا نرى أنها جميعا تتمحور حول فكرة معينة يمكن أن تصاغ بالآتي كتعريف إجرائي لبحوث العمليات: " **أساليب كمية رياضية يعتمدها متخذو القرارات من المدراء على اختلاف مستوياتهم الإدارية لغرض حل المشاكل الإدارية المختلفة في المؤسسات والشركات بكافة أنواعها الصناعية والتجارية والزراعية والخدمات عن طريق تقييم للبدائل المختلفة بصيغة علمية وطريقة منهجية منظمة ومن ثم التوصل إلى حلول مثلى** ".

II- التطور التاريخي لبحوث العمليات:

نشأت بحوث العمليات خلال الحرب العالمية الثانية واستخدمت للمرة الأولى أثناء الحرب العالمية الثانية في عام 1940 في المملكة المتحدة حيث عهدت الإدارة العسكرية في بريطانيا إلى فريق من العلماء والباحثين وذوي اختصاصات مختلفة مهمة دراسة العمليات المرتبطة بالدفاع الجوي والبري ودراسة المشاكل الإستراتيجية والتعرف على أفضل استخدام ممكن للمعدات الحربية المتاحة[1] .

فقد عمل فريق من العلماء المتخصصين في بحوث العمليات في استغلال الموارد المتاحة من القوى العاملة والمعدات للقوات البريطانية ضد العدوان ، ثم طورت هذه العلوم وطبقتها للاستفادة منها في بقية قطاعات الحياة المختلفة مما أدى بها إلى جني ثمار ما توصلت إليه من نتائج جيدة في كل قطاعات الحياة الاقتصادية " الصناعية والزراعية

[1]. دلال صادق الجواد ، حميد ناصر الفتال:" **بحوث العمليات**"، دار اليازوري العلمية للنشر والتوزيع، الأردن ، 2008 ، ص 16 .

والخدمية "، مما حمل ببقية الدول الأخرى على الاهتمام بهذا العلم ومنها الولايات المتحدة الأمريكية التي هي الأخرى استفادت من تطبيقاته في قطاعات الحياة الأخرى بعد أن أسهمت في تطوير بقية الغازه ومواصلة اكتشافها [1].

وفي هذه الفترة أيضا ظهر الاهتمام بشكل جدي بدارسة النمو الاقتصادي لتلك البلدان وبذلك استخدمت " البرامج الخطية " التي تعد إحدى أساليب بحوث العمليات في تخصيص موارد أو طاقات محدودة للحصول على أهداف معينة، وفي الحقيقة لقد تم تطوير الأساليب الرياضية لتشمل ميادين واسعة من المتغيرات المؤثرة في المشاكل المدروسة. وبذلك ساعدت هذه الأساليب على حسن استخدام هذه الموارد للحصول على نتائج أفضل مما لو أضيفت موارد جديدة. ومما ساعد على حل المشاكل المعقدة تطور علوم الحاسب وظهور الحاسب الإلكتروني وتطوره السريع وتطور نظم تخزين المعلومات واستخدام الحاسبات على نطاق واسع إلى سرعة تطوير أساليب بحوث العمليات حيث أن النماذج الرياضية قد تكون نماذج معقدة غالبا وتتضمن عمليات حسابية كثيرة مما يعتذر حلها يدويا وبدون تطور هذه العلوم واستخدام الحاسبات ما أمكن تطبيق أساليب بحوث العمليات وتطويرها في شكلها الحالي حيث ساعدت الحاسبة في حل النماذج المعقدة في وقت قصير وبدقة.

وتهتم بحوث العمليات بدارسة مشاكل الأمثلية (optimization problems) التي تهدف إلى تعظيم أو تدنية دالة الهدف التي تمثل عدد محدد من المتغيرات (أو الدوال) بحيث تكون هذه المتغيرات مستقلة عن بعضها البعض أو مرتبطة ببعضها من خلال أحد أو مجموعة من القيود، لقد عرفت أساليب الأمثلية منذ 150 عام سبقت وطبقت في كثير من المجالات سواء الاقتصادية منها أو الهندسية أو الفيزياء. وقد أعطت النظرية الكلاسيكية في تحديد الأمثلية نتائج رائعة في مجال النظرية الكلاسيكية للإنتاج والاستهلاك. إلا أنه في الآونة الأخيرة ظهرت حالات مهمة في مجال تحديد الأمثلية في المجال الاقتصادي والعسكري والمالية العامة والتصنيع يصعب حلها في الأسلوب الكلاسيكي لتحديد الأمثلية مما أدى إلى تطوير هذه الأساليب ضمن ما يعرف في مشاكل البرمجة الرياضية التي تعد إحدى أساليب بحوث العمليات فظلا عن الأساليب الاحتمالية. وبذلك فهي تدور حول استخدام التحليل الكمي لمساعدة الإدارة على اتخاذ القرارات مستخدمة الأساليب الرياضية المتقدمة والأدوات العلمية

[1] . حامد سعد نور الشمرتي ، مرجع سابق. ص 01 .

لحل تلك المشاكل التي تتعلق بالعمليات الخاصة بأي نظام يهدف تقديم الحل الأمثل لهذه المشاكل[1].

III- أسباب ظهور بحوث العمليات ووظائفها:

يمكن إجمال أسباب ظهور وتطور أساليب بحوث العمليات واستخدامها على نطاق واسع اليوم بالآتي[2]:

- إن المدراء في عالم اليوم يحتاجون إلى وسائل تساعدهم في اتخاذ قرارات أكثر رشدا وعقلانية بعد أن تعقدت المشاكل وتضخمت وأصبحت متداخلة ومتشعبة، إن أسلوب الارتجال والحكم الشخصي لوحده لا يكفيان للتصدي لهذه المشاكل وحلها بطريقة فعالة، وأساليب بحوث العمليات تمثل أداة فاعلة في أيدي هؤلاء المدراء؛
- إن الرغبة في الوصول إلى حلول مثلى سواء كانت تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف يقتضي اعتماد أساليب علمية دقيقة، فليس بالإمكان اعتماد التجربة والخطأ في مجال الإنتاج والتوزيع وغيرها من العمليات حيث أن عالم اليوم لم يعد فيه متسع لاتخاذ قرارات غير صائبة ومن ثم تعديلها بدون تكاليف عالية، بعبارة أخرى يجب أن يكون القرار صائبا من أول مرة؛
- النجاح الباهر الذي تحقق في العمليات العسكرية أثناء الحرب العالمية الثانية وغيرها من الحروب في مجال اختيار الأسلحة المناسبة أو توزيع القطعات العسكرية والقيام بأعمال الدفاع المدني أثناء الحروب وكذا تطوير الأسلحة الجديدة، كل هذا شجع على تطبيق نفس الأساليب في الأعمال المدنية التي أعطت بدورها نتائج ممتازة؛
- التوسع الكبير في استخدام أجهزة الحاسوب التي تتسم بالسرعة العالية والدقة الأمر الذي أدى إلى حل النماذج التي تحتوي على معادلات معقدة وكثيرة المتغيرات، مما ساعد في توسع وازدياد التطبيقات لبحوث العمليات في حل المشاكل الإدارية. كذلك فإن تطوير البرمجيات الكثيرة التي تسهل كثيرا حل المشاكل المختلفة قد ساهم في تطوير المناهج المختلفة في هذا العلم ووفر وسيلة مساعدة للطلاب و الباحثين؛
- حاجة العلوم المختلفة الأخرى لأساليب بحوث العمليات فلا يوجد تخصص تقريبا إلا وتجد أن بعض هذه الأساليب على الأقل موجودة في مناهجه فالحاسوب والهندسة بكل

---

[1] . محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني: " **بحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، ط2، الأردن، 2011، ص 12.

[2] . صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق. ص 16.

فروعها وإدارة الأعمال والرياضيات والإحصاء وغيرها من العلوم تعتبر بحوث العمليات واحدة من أهم موادها الدراسية؛

- التقدم التكنولوجي المتسارع؛
- تطور المنشآت الصغيرة وزيادة المنظمات الصناعية والزراعية والتجارية والإدارية والإجتماعية والحيوية الأخرى التي استخدمت التحليل الكمي لمعالجة الكثير من المشكلات التي واجهتها[1]؛
- إستمرار كثير من الباحثين في بحوثهم، وقد أدى ذلك إلى إبتكار الكثير من أساليب بحوث العمليات حيث إبتكر جورج دانتزج (Gearge Dantzig) طريقة السمبليكس لحل نموذج البرمجة الخطية في عام 1947 نتيجة استمراره في البحث.

يمكن أن نجمل الوظائف الرئيسية لأساليب بحوث العمليات في ميدان الأعمال كالآتي[2]:

- تسهيل عملية اتخاذ القرار ومساعدة المدراء ولكن ليس إحلال الحلول محلهم؛
- توفير حلول لمختلف المشاكل الإدارية؛
- تعتبر أداة فعالة في مجال البحث العلمي في ميادين الأعمال؛
- تساعد في تخصيص الموارد بشكل فاعل على الاحتياجات الكثيرة؛
- المساعدة في اختيار الاستراتيجيات المختلفة في الإنتاج والتسويق والتمويل؛
- المساعدة في تخفيض التكاليف في كثير من القرارات الإدارية؛
- يوفر أداة مهمة لدراسة ردود الفعل وتحليل الحساسية للكثير من القرارات المتخذة.

IV- شروط تطبيق بحوث العمليات:

إن اساليب بحوث العمليات كافة يمكن أن تطبق في مختلف المؤسسات الإنتاجية منها والخدمية، بشرط توفر على النحو الآتي[3]:

- **محدودية الموارد:**

وتعني أن الموارد التي تستعملها المؤسسة سواء كان ذلك في العملية الإنتاجية أم التجارية وما شابه ذلك تتصف بكونها محدودة الكمية من حيث توفرها وسهولة الحصول عليها، بمعنى أخر أن الموارد المتوفرة تحت تصرف المؤسسة لا يوجد منها كميات كبيرة إلى درجة بحيث يمكن الحصول عليها في أية لحظة ومن دون عناء وكلفة ، وينطبق هذا الشرط على: الموارد

---

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري: " **بحوث العمليات والأساليب الكمية نظرية وتطبيق**"، دار جليس الزمان، عمان، 2008. ص 15.

[2]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق. ص 17.

[3]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص ص: 04-05.

المالية، الموارد البشرية ذات الكفاءة العالية، الموارد الأولية، مساحات الأراضي ذات الموصفات النادرة (يتواجد فيها النفط أو مناجم و الذهب ..).

- **تعدد البدائل:**

يقصد بهذا الشرط أن هناك أكثر من بديل أو طريقة يتم بموجبها استغلال المورد المتوفر، فعند الحديث عن المستلزمات الأساسية لعملية الإنتاج وبالتحديد عن المواد الأولية الداخلة في صنع المنتج، يعني هذا الشرط أن هناك أكثر من طريقة لاستغلال هذه المواد الأولية، ومن الجدير بالذكر هنا إن اختيار البديل الأفضل أو الأمثل يخضع لمعايير متعددة أهمها أن يحقق البديل أعلى الفوائد والمنافع أو اقل التكاليف والخسائر وهو ما يعرف بالبديل الأمثل.

V- المجالات التطبيقية لبحوث العمليات:

يوجد العديد من المجالات التطبيقية لبحوث العمليات في الكثير من النواحي الإقتصادية والصناعية والزراعية والتجارية ومن أهمها[1]:

- **الإدارة الصناعية:**

حين تتعامل المصانع مع الإنتاج فهناك مشكلتان تظهران وهما إما تعظيم الأرباح أو تقليل التكلفة ولحل هاتان المشكلتان نستخدم الأساليب الكمية في الحل ويتم تطبيق بحوث العمليات أيضا في تحديد كمية الإنتاج وزيادة الطاقة الإنتاجية والسيطرة على المحزون.

- **الإدارة العسكرية:**

تستخدم بحوث العمليات في هذه الناحية بحيث تحدد أفضل الطرق للنقل بأقل الخسائر الممكنة وأيضا وضع التكتيك الدفاعي الذي يعتمد على أسلوب البرمجة الخطية.

- **الإدارة الزراعية:**

تستخدم في التوزيع الأمثل للمياه على الأراضي الزراعية ومساعدة البلدان التي تقل فيها الموارد المائية في السيطرة على المخزون المائي وتوزيعه بشكل أفضل على السكان والزراعة والصناعة.

- **إدارة الخدمات:**

تستخدم بحوث العمليات في النواحي الخدمية مثل المستشفيات ووسائل النقل وبعض الدوائر الحكومية في صفوف الانتظار، وأيضا في تنظيم وصول القطارات والطائرات.

[1] . فتحي خليل حمدان:" **بحوث العمليات مع تطبيقات باستخدام الحاسوب**"، دار وائل للنشر، ط1، الأردن، 2010. ص ص: 18-19.

- **إدارة التسويق:**

تستخدم بحوث العمليات في التسويق بحيث نستطيع التنبؤ بالطلب عند مستويات المحزون المتدنية واختيار المنتج الذي يحقق أعلى عائد وفي تحديد الأساليب التسويقية للمنتجات.

- **الإدارة المالية:**

تطبق بحوث العمليات في الإدارة المالية لمساعدة المالي في نواحي عديدة منها التخطيط لزيادة أرباح المنظمة والتخطيط للمشروع وزيادة رأس المال بالإضافة إلى تحليل التدفق النقدي.

VI- مراحل التحليل الكمي:

تقوم المنهجية العلمية لبحوث العمليات في عملية اتخاذ القرارات على الخطوات التالية[1]:

- **تعريف المشكلة قيد البحث:**

أي أن يتم تعريف المشكلة الذي سيتحذ القرار فيها لأن ذلك يقود إلى الهدف الذي تسعى الإدارة لتحقيقه. فلو كانت المشكلة إنتاجية تتعلق بخط إنتاجي معين فإن الهدف هو تحديد أفضل كمية إنتاجية ستنجم عن تشغيل هذا الخط بحيث تحقق الشركة أهدافها في الحصول على أعلى ربح ممكن أو تكلفة ممكنة. فتحديد وتشخيص المشكلة من المهام الأولى في عملية اتخاذ القرار الإداري.

- **بناء النموذج الرياضي:**

بعد الانتهاء من تحديد المشكلة موضوع القرار وبيان العلاقات المتداخلة فيها يتم وضع المشكلة بصيغة نماذج رياضية تمثل مكونات المشكلة المراد حلها، وتشتمل على متباينة الهدف المطلوب تحقيقه ومتباينات القيود الملازمة للمشكلة التي تحكم الإدارة في اتخاذ القرار.

- **حل النموذج:**

بعد صياغة النموذج الرياضي يتم حله لاستخراج النتائج الأولية وتحديد كونه أمثلا أم لا، فإذا لم يكن كذلك فالأمر يتطلب تطويره حتى الوصول إلى الحل الأمثل لأنه المحقق للأهداف المقترحة.

- **تطبيق وإعتماد النتائج:**

بعد الوصول إلى الحل الأمثل نظريا يتم تطبيق الحل الأمثل عمليا من خلال مجموعة الإجراءات والتعليمات الذي يقدمها متخذ القرار للعاملين للتقيد بها مراعيا توفر المهارات والمستلزمات الضرورية التي يتطلبها التنفيذ، ثم متابعة التنفيذ للتأكد من أن القرار المتخذ كان فعلا هو العلاج للمشكلة.

وبناء على ماسبق تحتاج المرحلة الأولى من مراحل الدراسة إلى تعريف واضح للمشكلة والتي تتحدد بثلاث خطوات رئيسية وعلى النحو الأتي[2]:

---

[1]. أكرم محمد عرفان المهتدي: " **الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الإدارية بحوث العمليات**"، دار صفاء للنشر والتوزيع، ط1، عمان، 2004، ص ص: 14-15.

[2]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص ص: 07-08.

- تحديد واضح للأهداف المراد تحقيقها من خلال الدراسة؛
- تحديد واضح للبدائل المتعلقة باتخاذ القرار؛
- تحديد واضح للمحددات أو المتطلبات اللازمة لتحقيق الأهداف.

أما المرحلة الثانية فتتطلب تحديد شكل النموذج المطلوب فإذا كان النموذج المقدر صياغته هو من صيغ النماذج الرياضية فيمكن اللجوء إلى موضوع البرمجة الخطية لدراسة المشكلة بينما إذا كانت الدراسة معقدة وكبيرة فمن الممكن اللجوء إلى نماذج المحاكاة التي تعد في هذه الحالة أكثر ملائمة.

أما المرحلة الثالثة والمتعلقة بإيجاد حل للنموذج المقترح (الحل هنا يعني إيجاد قيم المتغيرات للقرار) وهنا الحل يمثل النتيجة المثلى (Optimal) باستعمال نماذج الحل الأمثل.

أما المرحلة الرابعة فإنها تتعلق باختبار النتائج و يتم ذلك مثلا بمقارنة النتائج مع سلسلة زمنية سابقة لمتغيرات القرار التي يشملها النموذج أو بعض النتائج التاريخية، وبعدها يتم تطبيق النتائج التي تم التوصل إليها في الحياة العملية وتأخذ شكل التوجيهات أو التعليمات إلى الإدارات المختلفة للوصول إلى النتائج التي رسمت في المرحلة الأولى.

تعتبر البرمجة الخطية من المواضيع الأساسية والمهمة في بحوث العمليات وتكمن أهميتها في كونها وسيلة لدارسة سلوك عدد كبير من الأنظمة، يقدم نموذج البرمجة الخطية طريقة كفؤءة لتحديد القرار الأمثل (أو الاستراتيجية المثلى) من بين عدد كبير من البدائل، التي يخضع كل منها إلى مجموعة من المحددات والقيود، وبشكل يساهم بتحقيق أهداف الإدارة. وهي أداة بيانية ورياضية تهتم ببناء النماذج الرياضية لمشكلة من المشاكل بإحدى الطرق الآتية: طريقة البيانية، الطريقة المبسطة، طريقة النقل، طريقة التعين والتخصيص ....الخ.

I- مفهوم البرمجة الخطية:

تعد البرمجة الخطية إحدى الوسائل المهمة في حل كثير من المشاكل الإدارية والإقتصادية والعسكرية، وقد ازداد تطبيقها في الآونة الأخيرة نظرا للتقدم التكنولوجي الذي ساعد على تطوير الحسابات الالكترونية المستخدمة في حل مشاكل البرمجة. تم تطويرها وإستخدامها بصورة فعلية في سنة 1947 على يد العالم الرياضي جورج دانتزنغ (George Dantzing)، لحل بعض مشكلات التخطيط في السلاح الجو الأمريكي، في حين أن العالم الرياضي الفرنسي جين بابتستي فورير (Jean Baptise Fourier) قد تنبه لمساهماتها المحتملة في عام 1923. وقد كان أول استخدام أو تطبيق للبرمجة الخطية من قبل الإقتصادي جورج ستلجر (George Stigler) وذلك في بداية الأربعينات، حيث هدف إلى تحديد مكونات الغذاء اليومي (Diet) والتي ستزود الجسم بالحد الأدنى من احتياجاته من الفيتامينات والحديد والمواد الأخرى، وبأقل تكلفة ممكنة[1].

ويمكن تعريف البرمجة الخطية بأنها أسلوب رياضي لتوزيع مجموعة من الموارد والإمكانيات المحدودة على عدد من الحاجيات المتنافسة على هذه الموارد ضمن مجموعة من القيود والعوامل الثابتة بحيث يحقق هذا التوزيع أفضل نتيجة ممكنة، أي يكون توزيعها مثاليا[2].

إن تعبير **البرمجة** يعني وضع خطوات لحل مسألة أو موضوع ما لبلوغ وتحقيق هدف معين، أما تعبير **خطية** فيعني افتراض تغير الظاهرة التي نقوم بدراستها بصورة خطية (على شكل خط مستقيم) وكثيرا ما يستخدم هذا الافتراض لتقريب الواقع إلى صياغة رياضية سهلة.

ومما تجدر الإشارة إليه هو أن الغاية من تطبيق أسلوب البرمجة الخطية هي الوصول إلى حل نموذج البرمجة الخطية (ونموذج البرمجة الخطية هو عبارة عن مجموعة من المعادلات والمتباينات بالإضافة إلى دالة الهدف)[3]، ولا تنسى أن لكل مجموعة من المعادلات حلا، وعادة ما تكون للمعادلات

[1] . جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 25.

[2] . عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي: " **المدخل لبحوث العمليات**"، دار وائل للنشر، الأردن، 2001، ص 21.

[3] - Gérald Baillargeon ,"**Programmation linéaire appliquée** ", les édition SMG ,Québec , Canada,1996 .p 05 .

الآنية حلول أي إيجاد قيم المتغيرات، وفي حالة حل نموذج البرمجة الخطية دائما نسعى إلى إيجاد الحل الأمثل وتكون الحلول على ثلاث أنواع[1]:

- **الحل:** وهو حل ممكن الوصول إليه في أية مجموعة من المعادلات.
- **الحل الممكن:** وهو الحل الذي يمكن إيجاده بعد التوصل إلى الحل في الحالة الأولى وهذا الحل يحقق القيود كافة بشكل عام.
- **الحل الأمثل:** وهو الحل الذي يمكن إيجاده بعد التوصل إلى الحل الممكن، وهذا الحل يحقق القيود كافة بوجود دالة الهدف.

وبهذا الصدد يجب التأكد من أن الحل الممكن لا يتحقق بعد وجود الحل، ولا يمكن تحقيق الحل الأمثل إلا بعد أن يتحقق الحل الممكن.

II- متطلبات وفروض نموذج البرمجة الخطية:

II-1- متطلبات استخدام البرمجة الخطية:

تتطلب مشكلة البرمجة الخطية خمس خصائص أساسية هي[2]:

- **تحديد الهدف:** أي ما تسعى لتحقيقه وهو إما زيادة الأرباح أو تقليل الكلفة، معبر عنه بصيغة رياضية يطلق عليها دالة الهدف وتصاغ دالة الهدف بالشكل التالي:

حالة تعظيم: $Max\ (Z) = 2x + 3y$

حالة تدنئة: $Min\ (Z) = 2x + 3y$

- **توفير عدد من البدائل:** تستخدم البرمجة الخطية عندما تكون لدينا بدائل لحل المشكلة فإذا كان هناك بديل واحد لحل المشكلة إذاً لا داعي لاستخدام البرمجة الخطية؛
- **محدودية الموارد:** نحتاج لاستخدام البرمجة الخطية عندما تكون الموارد محددة (نادرة) كالموارد البشرية، أو المواد، أو ساعات اشتغال الآلات.وهي بمثابة شروط لتحقيق الهدف، فإذا كان لدينا 300 ساعة في القسم الأول وكنا نحتاج لساعتين لإنتاج المنتوج الأول وثلاثة ساعات لإنتاج المنتوج الثاني فيعبر عن المشكلة كآلاتي:

$$2x_1 + 3x_2 \leq 300$$

---

1. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 10.
2. محمد دباس الحميد، محمد العزاوي: " **الأساليب الكمية في العلوم الإدارية**"، دار اليازوري، الأردن، 2013. ص ص: 09-10.

- **وجود علاقة خطية:** الخطية في البرمجة يجب أن تتوفر في دالة الهدف وفي القيود (الموارد)، بحيث أن أي تغير في كميات الإنتاج يؤدي إلى زيادة الأرباح أو تقليل التكليف بشكل خطي (طردي) مع زيادة كمية الإنتاج، وكذلك الموارد تستنفذ بشكل خطي مع زيادة كمية الإنتاج؛
- **القيود غير السالبة:** إن هذا الشرط يلبي إحدى فرضيات البرمجة الخطية وهو شرط عدم السلبية. ولذلك لا يمكن أن يكون أحد القيود ينتج متغيرات سالبة كما يلي:

$$2x_1 + 3x_2 \leq -300$$

II-2- فروض نموذج البرمجة الخطية:

تمثل الافتراضات، الشروط العلمية الواجب توفرها في المشكلة حتى نستطيع حلها بواسطة البرمجة الخطية، أو هي المتطلبات الفنية لمشكلة البرمجة الخطية وهي[1]:

- يفترض النموذج إمكانية النسبة و التناسب في كل مكوناته (دالة الهدف والقيود الفنية)؛
- تحقيق خاصية الجمع التي تعني أن القيمة الكلية لأي مؤشر ما هي إلا حاصل جمع قيمه الجزئية؛
- يعالج نموذج البرمجة الخطية الحالات المتصفة بالتأكد التام، وهذا يعني أن القيم التي تأخذها مؤشرات النموذج هي كلها قيم محددة ومعروفة ولا يطرأ عليها تغيير خلال فترة الدراسة.

وهناك فروض أخرى منها ما يلي[2]:

- **الخطية:** يشترط ان تكون العلاقة في دالة الهدف والقيود علاقة خطية؛
- **المحدودية:** محدودية الموارد والأنشطة، أي أن هناك ندرة فيها وأنه لا يوجد عدد نهائي من الأنشطة البديلة والموارد المتاحة؛
- **عدم السلبية:** عدم إمكانية أن يكون حجم النشاط سالبا؛
- **الاستقلالية:** أن اختيار أي نشاط لا يستلزم بالضرورة اختيار نشاط آخر، أي استقلالية عناصر الإنتاج؛

III- مجالات استخدام البرمجة الخطية:

تستخدم البرمجة الخطية في كل المسائل الإقتصادية التي تهدف إلى البحث عن قيم المتغيرات الإقتصادية بهدف إيجاد أمثلية الاستخدام في وجود مجموعة من القيود المالية أو التقنية أو هما معا.

---

[1] . مكيد علي: " **بحوث العمليات وتطبيقاتها الاقتصادية دروس ومسائل محلولة**"، الجزء الأول، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2015. ص 10.

[2] . محمد دباس الحميد، محمد العزاوي، مرجع سابق، ص ص: 08-09 .

ومن المواضيع التي تستخدم فيها البرمجة الخطية هي مجالات العلوم الإقتصادية والمالية والتجارية وعلوم التسيير عامة كما يلي[1]:

- **في حالة التعظيم:**
  - ✓ تعظيم الأرباح؛
  - ✓ تعظيم الإنتاج؛
  - ✓ تعظيم طاقات التخزين؛
  - ✓ تعظيم إستخدام رؤوس الأموال؛
  - ✓ تعظيم إستخدام اليد العاملة.

وغير ذلك من المسائل الواقعية التي يكون هدفها التعظيم.

- **في حالة التدنئة:**
  - ✓ تدنئة التكاليف؛
  - ✓ تدنئة الخسائر؛
  - ✓ تدنئة عدد الموظفين؛
  - ✓ تدنئة الأجور الإجمالية.

كما تستخدم في الكثير من مجالات الإدارة وغير ذلك من المسائل الهادفة إلى عقلنة استخدام الموارد.

وللبرمجة الخطية تطبيقات عديدة ظهرت وما تزال تظهر كل يوم لحل الكثير من المشكلات في عالم الأعمال منها[2]:

- **التطبيقات التسويقية:** مثل اختيار وسائط الإعلانات، وبحوث التسويق؛
- **التطبيقات المالية:** مثل التخطيط المالي، تحليل الأوراق والأسهم المالية، أو اختيار المحفظة الاستثمارية؛
- **تطبيقات إدارة الإنتاج:** مثل الإنتاج المختلط (المزيج الإنتاجي)، تخطيط الإنتاج، النقل والتخصيص، أو قرار الشراء أو الصنع.
- **مشاكل المزج؛**
- **مشاكل تخطيط المشروعات.**

وغيرها من التطبيقات التي كان للبرمجة الخطية فيها دوراً بارزاً في مساندة صانعي القرارات في منظمات الأعمال من أجل حل المشكلات التي يواجهونها في المنظمة.

---

[1] . راتول محمد: " **بحوث العمليات** "، ديوان المطبوعات الجامعية، ط2، الجزائر، 2006.

[2] . جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 27.

IV- صياغة أو بناء نموذج البرمجة الخطية:

إن صياغة مشكلة إدارية معينة بشكل مسألة برمجة خطية تقتضي كما أشرنا سابقا تطوير نموذج رياضي يمثل الحالة أو المشكلة الإدارية، وبهذا فإنه يجب فهم الموقف الإداري أو المشكلة فهما دقيقاً وهي الخطوة الأولى لحلها، إن صياغة نموذج البرمجة الخطية يمكن أن تجمل خطواته بالآتي:

- ✓ الفهم الكامل والدقيق للمشكلة الإدارية التي يواجهها المدير ؛
- ✓ تشخيص دالة الهدف والقيود المحددة؛
- ✓ تحديد متغيرات القرار ؛
- ✓ استخدام متغيرات القرار في كتابة العبرات الرياضية لكل من دالة الهدف والقيود.

IV-1- صياغة النموذج الرياضي للبرمجة الخطية:

من اجل صياغة نموذج البرمجة الخطية يجب توفر ثلاث مجموعات من العناصر الأساسية وهي:

- **تحديد الهدف بصورة كمية:**

ويعبر عنه بدالة الهدف وهي عبارة عند الدالة المطلوب تعظيمها أو تدنيتها وهي عادة ما تكون في صورة نقدية أو طبيعية ويتوقف ذلك على طبيعة المشكلة المطلوبة تحليلها ويجب أن يكون بالإمكان التعبير عن الهدف كمياً كأن يكون الهدف تحقيق اكبر ما يمكن من الربح أو تأمين اصغر ما يمكن من الكلفة أو توفير أعظم ما يمكن من الوقت والجهد؛

- **تحديد القيود:**

يجب أن تكون الموارد المتاحة محددة، كما يجب أن تكون تلك الموارد قابلة للقياس ويتم التعبير عنها بصيغة رياضية على شكل متراجحات أو معادلات، أو خليط منها وتسمى يالقيود الهيكلية؛

- **شرط عدم السلبية:**

إذ يجب أن تكون المتغيرات القرارية في المشكلة قيد الدراسة متغيرات موجبة أو صفرية وغير سالبة.

ويمكن وضع الصيغة العامة للبرمجة الخطية كالآتي[1]:

$$Max\_or\_Min(z)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$Subject\_to$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(\leq,=,\geq)b_i \qquad (i=1,2,........,m)$$

$$x_j \geq 0 \qquad (j=1,2,........,n)$$

إذ أن: a_{ij},b_i,c_j ثوابت تحدد من سياق المشكلة؛

[1] . محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص 20.

Z : تمثل دالة الهدف؛

X_j: المتغيرات المطلوب اتخاذ القرار بحقها؛

b_i: تمثل الموارد المحددة؛

a_{ij}: كمية الموارد المحددة من النوع i واللازم تخصيصها لكل وحدة واحدة من النشاط أو الفعالية j.

C_j: تمثل الربح أو الكلفة نتيجة تخصيص المورد i لإنتاج وحدة واحدة من النشاط أو الفعالية j.

IV-2- تركيب نموذج البرمجة الخطية:

وتعد مرحلة تركيب النموذج من أهم مراحل البرمجة الخطية إذ تعد مرحلة عملية أكثر منها فنية وتعتمد على خبرة الباحث ومقدرته على صياغة المشاكل بشكل نموذج برمجة خطية، ولتوضيح هذه المرحلة سنورد المثال الآتي:

مثال رقم (01): تنتج إحدى الشركات نوعين من السلع، نوع A ونوع B، تصنع كل سلعة على ثلاث مراحل كل مرحلة في احد الأقسام الثلاثة الموجودة في الشركة، فإذا كان تصنيع السلعة A يحتاج إلى ساعتين عمل في القسم الأول وساعة عمل في القسم الثاني وأربع ساعات عمل في القسم الثالث ويحتاج تصنيع السلعة B إلى ساعتين عمل في كل قسم كما أن عدد ساعات العمل المتاحة في القسم الأول هي 160 ساعة عمل أسبوعيا وفي القسم الثاني 120 ساعة عمل أسبوعيا وفي القسم الثالث 280 ساعة عمل أسبوعيا وإذا كان ربح الوحدة الواحدة من السلعة A هو 2 دينار ومن السلعة B هو 3 دينار.

المطلوب: نموذج برمجة خطية لتحديد حجم الإنتاج الأمثل من السلعتين إذا كان هدف الشركة هو الحصول على أكبر ربح ممكن.

الحل: لتسهيل فهم المشكلة نضعها على شكل جدول (هذه الخطوة في التمارين الأولى لتعلم الحل بسهولة).

السلعة	الوقت اللازم للتصنيع			ربح الوحدة بالدينار
	القسم الأول	القسم الثاني	القسم الثالث	
A	2	1	4	**2**
B	2	2	2	**3**
ساعات العمل المتاحة	**160**	**120**	**280**	

تكوين النموذج:

- ✓ تحديد المتغيرات المجهولة والتعبير عنها برموز جبرية، ولذلك:

نفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة A هو X_1.

نفرض عدد الوحدات المنتجة من السلعة B هو X_2.

- ✓ تحديد القيود والتعبير عنها بمعادلات أو متراجحات أو خليط منها:

والقيود هنا هي أن الوقت اللازم للتصنيع في كل قسم محدود ويجب أن نتجنب تجاوز هذا الحد، لاحظ أن الوقت اللازم للتصنيع يتوقف على الكمية المنتجة من السلعة A و السلعة B.

بالنسبة للقسم الأول: الوقت اللازم للتصنيع (المتاح) = (عدد الوحدات المنتجة من السلعة A)* (الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعة A)+ (عدد الوحدات المنتجة من السلعةB)* (الوقت اللازم لتصنيع الوحدة الواحدة من السلعة B)، ويجب أن لا يتجاوز عدد الساعات العمل المتاحة في القسم الأول وكما في المتراجحة الآتية:

$$2x_1 + 2x_2 \leq 160$$

وبنفس الطريقة بالنسبة للقسمين الثاني والثالث أيضا وكما في المتراجحات الآتية:

بالنسبة للقسم الثاني:

$$x_1 + 2x_2 \leq 120$$

بالنسبة للقسم الثالث:

$$4x_1 + 2x_2 \leq 280$$

ولأن عدد الوحدات المنتجة لا يمكن أن يكون سالبا، وعلى النحو الآتي:

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

✓ تحديد دالة الهدف:

$$z = 2x_1 + 3x_2$$

وتهدف إلى انتاج الكميات المثلى من x_1, x_2 التي تجعل دالة الهدف Z اكبر ما يمكن Maximize ودائما تختصر بـ Max

البرنامج الخطي:

$$Max(z) = 2x_1 + 3x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 160 \\ x_1 + 2x_2 \leq 120 \\ 4x_1 + 2x_2 \leq 280 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

V- حل نموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة الحل البياني:

يمكن حل النموذج الرياضي بطريقة الرسم البياني عندما يكون النموذج الرياضي متكون من متغيرتين فقط ويسمى أحياناً بالطريقة الهندسية، أما استخدام هذه الطريقة في الحياة العملية معدومة لأن عدد المتغيرات التي تؤثر في اتخاذ القرارات كثيرة جداً، ولكن استخدام هذه الطريقة تعتبر مدخلاً لفهم واستيعاب طريقة الحل، حيث تعطي تصوراً عن صورة احتمالات الحل الأمثل للنموذج الرياضي، وكما ذكرنا فإن هذه الطريقة تستخدم فقط في حالة احتواء النموذج الرياضي على متغيرتين فقط لأن مجال الرسم يعتمد أساساً على الإحداثيات المتعامدة (X_1,X_2)[1].

وتعتبر هذه الطريقة من الطرق البسيطة والتي تعطي نتائج دقيقة إلا أنها طريقة غير كفوءة في معالجة مشكلات البرمجة الخطية في الحياة العملية.

V-1 – خطوات إيجاد الحل الأمثل:

وتتكون عملية الحل بطريقة الحل البياني من عدد من الخطوات التي لابد من مراعاة تسلسلها للوصول إلى الحل النهائي:

- ✓ تحويل كل متراجحات القيود إلى معادلات، وعملية التحويل هذه تجعل القيد في صيغة معادلة خطية يمكن تمثيلها بخط مستقيم؛
- ✓ تحديد نقاط تقاطع كل قيد مع المحورين والتوصيل بين هاتين النقطتين بخط مستقيم لكل قيد، وتسمى المنطقة التي تشترك فيها جميع القيود المتعلقة بالمشكلة بمنطقة الحلول الممكنة؛
- ✓ إذا كانت متراجحات القيود من نوع أصغر أو يساوي، وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التعظيم، نشطب المناطق التي لاتحقق القيود وهي توجد إلى يمين المستقيم، فإن منطقة الحل الممكنة يجب أن تكون محدودة من اليمن وباتجاه نقطة الأصل وبالتالي فهي تأخذ شكل المضلع، والحل الأمثل يقع على أحد رؤوس المضلع الأبعد عن نقطة الأصل؛
- ✓ إذا كانت متراجحات القيود من نوع أكبر أو يساوي، وهي في الغالب مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية التي يكون هدفها التدنئة، نشطب المناطق التي لا تحقق القيود وهي توجد إلى يسار المستقيم، فإن منطقة الحل الممكنة تكون خارج المضلع بدلاً من أن تقع داخله أي أن منطقة الحل الأمثل تكون غير محددة من اليمين ونقطة الحل الأمثل هي الأقرب عن نقطة الأصل؛
- ✓ إذا كانت متراجحات القيود في المشكلة خليط من ($\geq$ ، $\leq$) معاً، فإنها تكون مترافقة مع مسائل البرمجة الخطية بنوعيها التعظيم والتدنئة، ولهذه الحالة منطقة حل ممكنة على شكل مضلع؛

[1]. سهيلة عبد الله سعيد: "**الجديد في الأساليب الكمية وبحوث العمليات**"، دار الحامد، ط1، الأردن، 2007. ص 38.

- ✓ إيجاد إحداثيات كل نقطة من النقاط المضلع بمنطقة الحل الكلية، أي نجد قيم X_1 و X_2 عند كل نقطة؛
- ✓ نجد قيمة (Z) التي تمثل قيمة دالة الهدف عند كل نقطة من النقاط المضلع عن طريق تعويض إحداثيات النقطة رؤوس المضلع في دالة الهدف؛
- ✓ نحدد نقطة الحل الأمثل، وهي النقطة التي قيمة (z) عندها أكبر ما يمكن في حال كانت دالة الهدف التعظيم (Maximization)، أو النقطة التي قيم (z) عندها أقل ما يمكن في حالة كانت دالة الهدف تخفيض (Minimization).
- ✓ ويمكن إيجاد الحل الأمثل بطريقة مباشرة عندما يكون منطقة الحل عبارة عن مضلع متعدد الرؤوس، وذلك بجعل دالة الهدف معدومة معدومة، أي نساويها إلى الصفر، ونرسم مستقيمها على نفس المعلم، يمر هذا المستقيم من نقطة المبدأ، نسمي هذا المستقيم (Δ)، نحرك المستقيم (Δ) بصفة متوازية اتجاه رؤوس المضلع المحصل عليه من المستقيمات، وتكون النقطة التي تحقق أكبر قيمة للدالة الإقتصادية (دالة الهدف) هي آخر نقطة يصل إليها المستقيم (Δ) عند سحبه إلى الأعلى بشكل موازي لأصله، وهي نقطة حاصلة من التقاطع عدة مستقيمات مولدة وعكس في حالة التدنئة[1].

وفيما يلي توضيح لتطبيق هذه الخطوات على نموذج البرمجة الخطية:

مثال رقم (01): أوجد قيم X_1 و X_2 المثلى التي تجعل دالة الهدف اكبر ما يمكن للبرنامج التالي بإستخدام الطريقة البيانية:

$$Max(z) = 4x_1 + 3x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 21 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

الحل: لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

- ✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معدلات كما يلي:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \end{cases}$$

- ✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

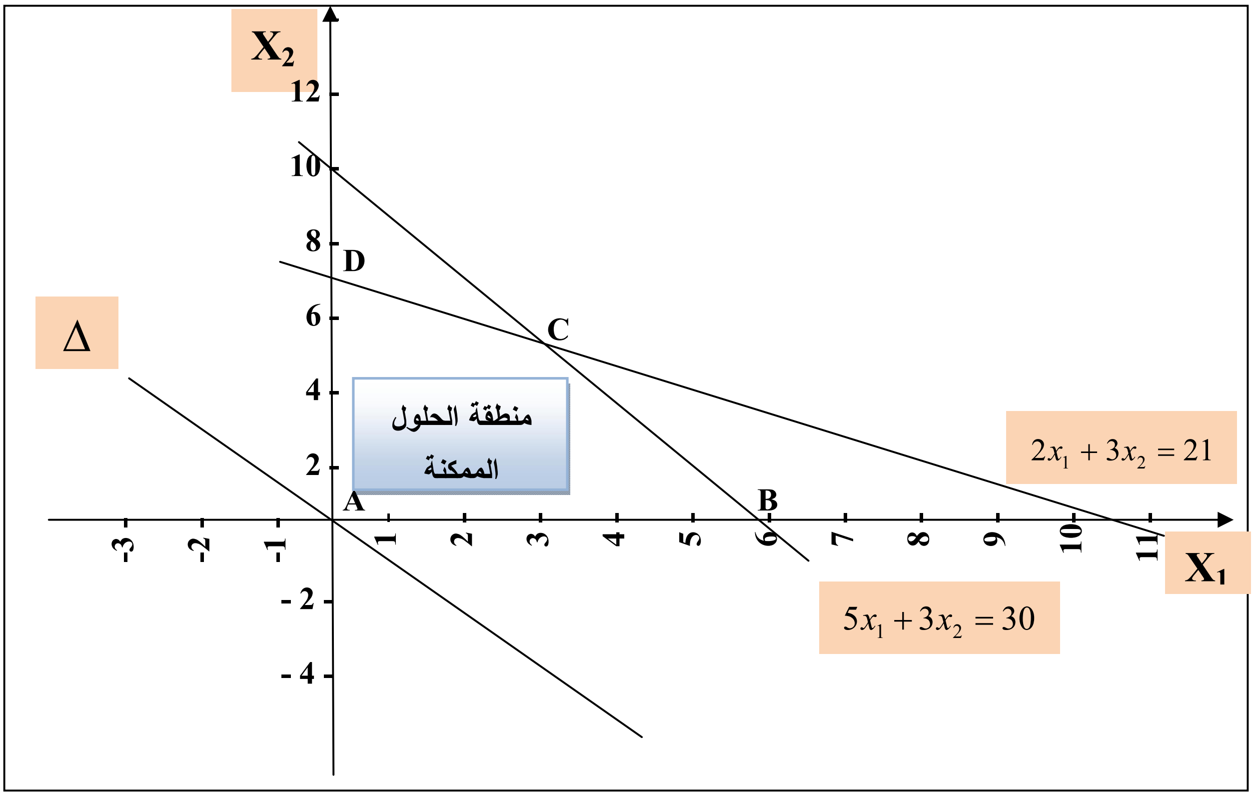
[1] . محمد راتول، مرجع سابق، ص 26.

$2x_1+3x_2=21$	
x_1	x_2
0	7
10,5	0

$5x_1+3x_2=30$	
x_1	x_2
0	10
6	0

على نفس المعلم نرسم المستقيم (Δ) وهو المستقيم المحصل عليه عند وضع الدالة الإقتصادية في أدنى قيمة لها وهي: Z=0 أي: المستقيم (Δ) يمر من النقطتين:

$4x_1+3x_2=0$	
x_1	x_2
3	−4
−2,25	3



بعد هذا تحدد منطقة الحلول الممكنة وحسب ما هو مطلوب من القيود وهي المنطقة التي تحقق جميع القيود في وقت واحد، وهي كما مبين في الشكل المقابل (A,B,C,D).

أي نقطة توجد إلى يمين المستقيمين لا تحقق القيود، كما أن قيد عدم السلبية يجعل كل المناطق التي هي أدنى من المحور الأفقي وكل المناطق التي هي على يسار المحور العمودي مرفوضة وبالتالي فإنه لا توجد سوى منطقة واحدة هي التي تحقق جميع القيود آنيا وتشمل جميع النقاط الموجودة داخل

المنطقة (A,B,C,D) أي المنطقة غير المشطبة وتسمى هذه المنطقة بمنطقة الحلول الممكنة أو منطقة الحلول المقبولة.

عند تحريك المستقيم (Δ) إلى الأعلى نجد أن آخر نقطة يصلها في منطقة الحلول المقبولة هي النقط (C) وبالتالي تشكل لنا هذه النقطة الحل الأمثل للمسألة وهي نقطة تقاطع المستقيمين (1) و(2)، إذ نجد قيمة المتغيرتين وذلك إما هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة قيمة المتغيرتين وذلك إما هندسيا بإنزال شاقول من هذه النقطة على المحور الأفقي فنجد قيمة X_1 وإمداد مستقيم موازي للمحور الأفقي من النقطة (Δ) فنجد قيمة X_2 عند نقطة تقاطعه مع المحور العمودي، وإما أن نجد قيمة المتغيرين بحل معادلتي المستقيمين حلا مشتركا كما يلي:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30........(1) \\ 2x_1 + 3x_2 = 21........(2) \end{cases}$$

بطرح المعادلة (1) من المعادلة (2) نجد:

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 = 21 \end{cases}$$

$$3x_1 = 9 \Rightarrow x_1 = 3$$

بالتعويض في إحدى المعادلات نجد: $x_2 = 5$

وبالتالي فإن قيمتي المتغيرين اللذين يحققان أعلى قيمة للدالة الإقتصادية هما: $C:(x_1 = 3, x_2 = 5)$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

القيد الأول: قيد محقق تماما $5\times3+3\times5=30$

القيد الثاني: قيد محقق تماما $2\times3+3\times5=21$

ومنه لا توجد طاقة غير مستعملة ، ولمعرفة القيمة العظمى للدالة الاقتصادية يكفي أن نعوض القيمتين المحصل عليهما في هذه الدالة فنحصل على ما يلي:

$$Z_C = 4x_1 + 3x_2 = 4\times3+3\times5 = 27$$

وهي أعلى قيمة للدالة الاقتصادية، ولا يمكن أن توجد أية قيم أخرى للمتغيرتين تعطيان أعلى من هذه القيمة وتحقق في نفس الوقت جميع القيود، والجدول يوضح ذلك:

نقاط	أحداثي نقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A:(x_1 = 0, x_2 = 0)$	$Z_A = 0$
B	$B:(x_1 = 6, x_2 = 0)$	$Z_B = 24$
C	$C:(x_1 = 3, x_2 = 5)$	$Z_C = 27$
D	$D:(x_1 = 0, x_2 = 7)$	$Z_D = 21$

$$8x_1 + 4x_2 = 100$$
$$2x_1 + 4x_2 = 70$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن: $B:(x_1 = 5, x_2 = 15)$

وبتعويض قيم إحداثيات الزوايا الأربعة (A,B,C,D) في دالة الهدف، نتوصل إلى الحل الأمثل والذي سيتحقق عند النقطة (B) لأنها أقل تكاليف كما يظهر في الجدول التالي:

قيمة دالة الهدف	أحداثي نقاط	نقاط
$Z_A = 21{,}25$	$A:(x_1 = 0, x_2 = 25)$	A
$Z_B = 16{,}50$	$B:(x_1 = 5, x_2 = 15)$	B
$Z_C = 23$	$C:(x_1 = 25, x_2 = 5)$	**C**
$Z_D = 33{,}75$	$D:(x_1 = 45, x_2 = 0)$	D

ولتأكيد النتيجة عند تحريك المستقيم (Δ) إلى الأعلى نجد أن النقطة الأولى التي يصلها في منطقة الحلول المقبولة هي النقط (B) وبالتالي تشكل لنا هذه النقطة الحل الأمثل للمسألة.

وبالتالي فإن قيمتي المتغيرين اللذين يحققان أعلى قيمة للدالة الإقتصادية هما: $B:(x_1 = 5, x_2 = 15)$

يمكن التحقق من أن هذه النتيجة تحقق جميع القيود:

القيد الأول: قيد محقق تماما $8 \times 5 + 4 \times 15 = 100$

القيد الثاني: قيد محقق تماما $2 \times 5 + 4 \times 15 = 70$

القيد الأول: قيد محقق $2 \times 5 + 8 \times 15 = 130 \succ 90$

القيمة العظمى للدالة الاقتصادية يكفي أن نعوض القيمتين المحصل عليهما في هذه الدالة فنحصل على مايلي:

$$Z_B = 0{,}75x_1 + 0{,}85x_2 = 0{,}75 \times 5 + 0{,}85 \times 15 = 16{,}50$$

V-2- حالات خاصة في الحل البياني:

أن مشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة يمكن تطبيقها في مجالات واسعة وبنجاح، إلا أن هناك حالات خاصة يجب مراعاتها، ومن هذه الحالات هي:

- **تعدد الحلول المثلى:**

ونحصل على هذا النوع من الحلول عندما تكون هناك أكثر من نقطة واحدة في منطقة الحلول الممكنة تعطي القيمة نفسها لدالة الهدف التي تكون أعلى القيم في حالة كون دالة الهدف من نوع التعظيم أو تكون أقل القيم حين تكون دالة الهدف من نوع تدنئة.

مثال رقم (03): أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Max(z) = x_1 + 2x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

لإيجاد حل لهذا البرنامج نتبع الخطوات التالية:

✓ نستخرج المستقيمات وذلك بتحويل المتراجحات إلى معدلات كما يلي:

$$x_1 + 2x_2 = 10$$

$$x_1 + x_2 = 1$$

$$x_2 = 4$$

✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

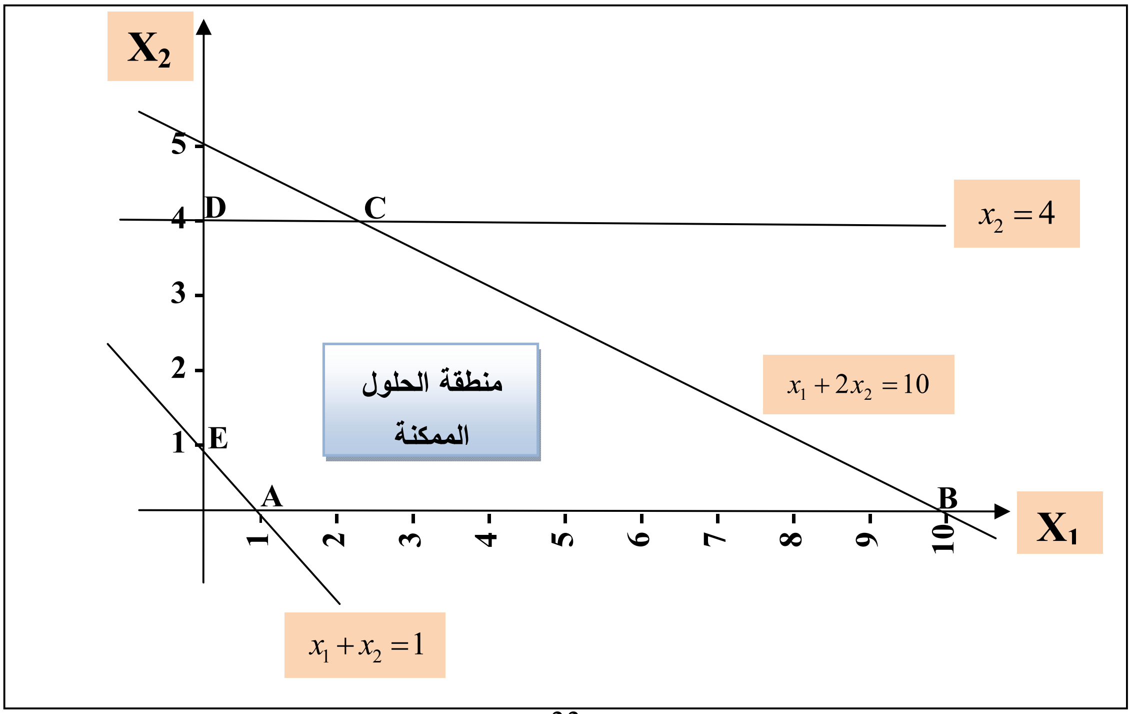
$x_2 = 4$ هو خط مستقيم موازي للمحور الأفقي .

$x_1 + x_2 = 1$

x_1	x_2
0	1
1	0

$x_1 + 2x_2 = 10$

x_1	x_2
0	5
10	0



نلاحظ أن منطقة الحل الممكن قد تحددت بالنقاط (ABCDE)، حيث إحداثيات النقطة A هي: (0; 1) والنقطة B هي: (0; 10) أما النقطة D هي: (4; 0) و E هي: (1; 0).

أما النقطة C متولد من تقاطع مستقيم القيد الأول والثاني:

$$x_1 + 2x_2 = 10$$
$$x_1 + x_2 = 1$$

وبعد القيام بالحل الجبري لهما، سنجد أن:

$$C : (x_1 = 2, x_2 = 4)$$

وبتعويض قيم إحداثيات الزوايا الخمس في دالة الهدف، نتوصل إلى الحل الأمثل والذي يحقق لنا أكبر عائد كما يظهر في الجدول التالي:

نقاط	أحداثي نقاط	قيمة دالة الهدف
A	$A : (x_1 = 1, x_2 = 0)$	$Z_A = 1$
B	$B : (x_1 = 10, x_2 = 0)$	$Z_B = 10$
C	$C : (x_1 = 2, x_2 = 4)$	$Z_C = 10$
D	$D : (x_1 = 0, x_2 = 4)$	$Z_D = 8$
E	$E : (x_1 = 0, x_2 = 1)$	$Z_E = 2$

من الجدول نجد أن النقطتين C وB تحقق لدالة الهدف قيمة عظمى مساوية إلى 10، يتضح من ذلك أن للمشكلة أكثر من حل واحد ويعود السبب في ذلك هو أن دالة الهدف تكون موازية لأحد القيود الهيكلية، أي عند رسم دالة الهدف وتحريك الرسم ينطبق الرسم في إحدى أوضاعه على أحد المستقيمات المرسومة وهنا يقال أن للمشكلة مجموعة من الحلول المثلى (تعدد الحلول المثلى).

- **عدم وجود حلول:**

هنا يحصل هذا النوع من الحلول عندما لا يمكن تعيين منطقة الحلول الممكنة ولا يوجد هنا حل أساسي ابتدائي مقبول، أي قيود لا تتقاطع في منطقة حل واحدة ، بحيث تكون منطقة تقاطع القيود عبارة عن مجموعة خالية[1] وكما يلي:

[1] - Gérald Baillargeon ,op-cit , P 55 .

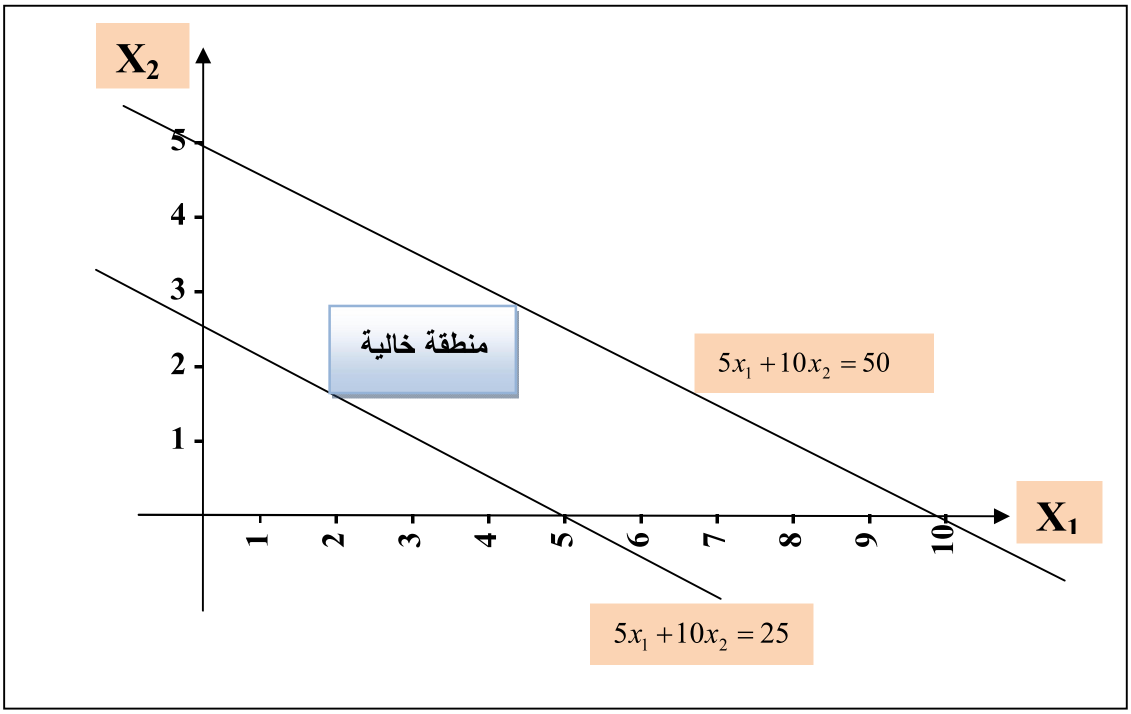
مثال رقم (04): أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Min(z) = 20x_1 + 15x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 10x_2 \leq 25 \\ 5x_1 + 10x_2 \geq 50 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

✓ على معلم متعامد نرسم هذه المستقيمات، ويكفي لذلك أن نجد نقطتين يمر بها كل مستقيم ثم نصل بينها.

$5x_1 + 10x_2 = 50$	
x_1	x_2
0	5
10	0

$5x_1 + 10x_2 = 25$	
x_1	x_2
0	2,5
5	0



من خلال الشكل نلاحظ أن القيدين متعاكسان ولا يتقاطعان نهائياً، وبذلك لا نستطيع الحصول على حل مقبول لهذه المشكلة.

- **منطقة الحل الممكن غير محدودة:**

ويعني ذلك عدم إمكانية تحديد نقطة حل أمثل وهذا يعني زيادة متغير أو أكثر من متغيرات المشكلة ومن ثم الربح دون مخالفة لأي قيد من القيود المشكلة وتعتبر هذه الحالة نظرية وبعيدة عن الواقع وبالنسبة لطريقة الرسم البياني فإن هذا يعني بأن منطقة الحل مفتوحة وبدون نهاية علماً بأن هذه الحالة تنطبق فقط على نموذج البرمجة الخطية الذي دالة الهدف له تعظيم[1].

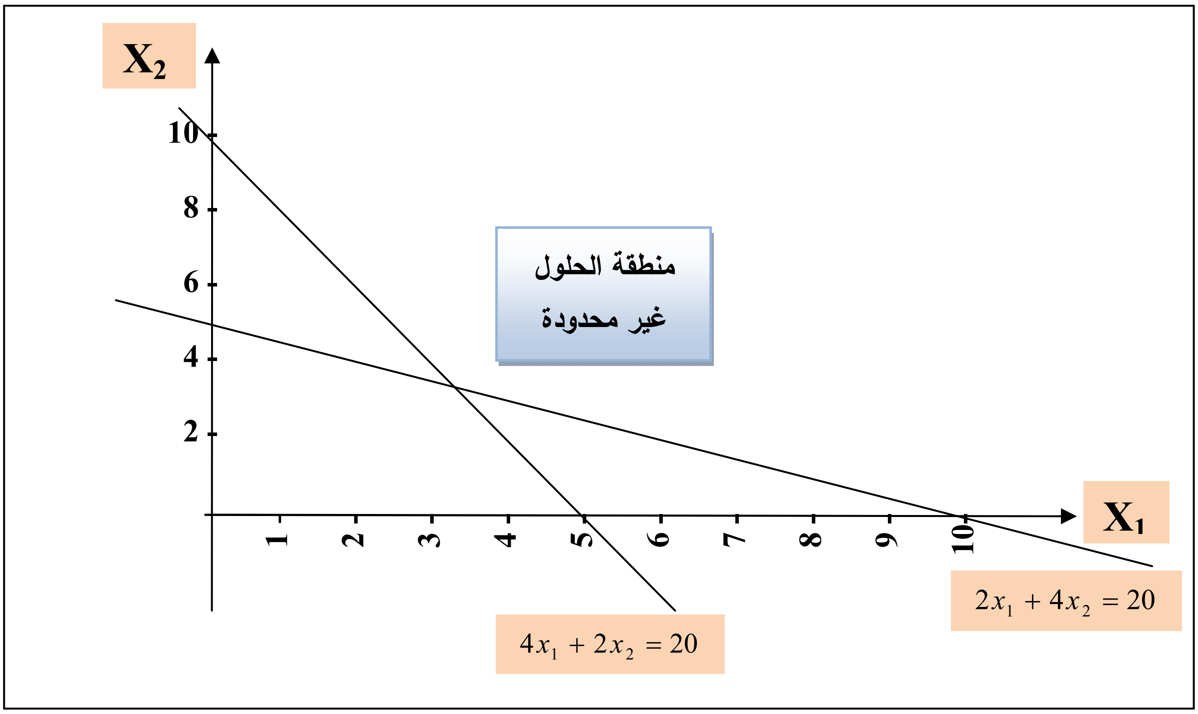
ويمكن اعتبار هذه الحالة تقع أيضا عندما تكون المشكلة بدالة هدف تعظيم ويكون هناك تناقض بين دالة الهدف والقيود فتكون هذه الأخيرة أكبر أو تساوي وتعكس الشكل القانوني(القيود أقل أو تساوي).

مثال رقم (05): افترض أن لدينا مشكلة البرمجة الخطية التالية:

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

$$Max(z) = 3x_1 + 5x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ 4x_1 + 2x_2 \geq 20 \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

ويوضح الشكل أدناه الرسم البياني لهذه المشكلة:



إن منطقة الحل الممكن مفتوحة من النهاية وهي غير محدودة، فأية قيمة في المنطقة تحقق دالة الهدف وبالتالي نقول أن دالة الهدف لانهائية.

[1] . جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 52.

- **حالة حياد أحد القيود:**

وهي من المشاكل الشائعة في مشاكل البرمجة الخطية الكبيرة التي تحتوي على عدد كبير من القيود، مما ينتج عنها قيد فائض لا حاجة له وليس له أي تأثير على الحل، وهذا يعني وجود قيود لها أهمية أكثر من غيرها، لذلك فإن استخدام الأهم يغني عن استخدام الأقل أهمية.

مثال رقم (06): افترض أن لديك نموذج البرمجة الخطية التالية:

المطلوب: أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية التالية باستخدام طريقة الرسم البياني:

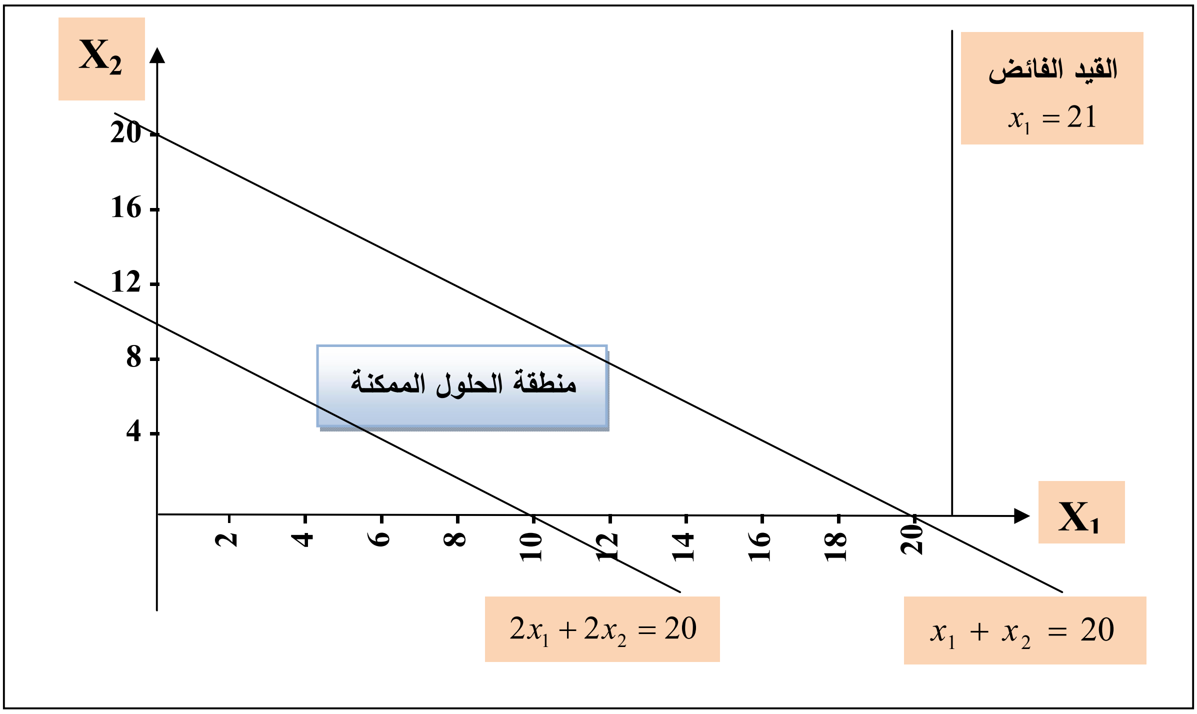
$$Max(z) = 5x_1 + 5x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 20 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 20 \\ x_1 \leq 21 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0$$

ويوضح الشكل أدناه الرسم البياني لهذه المشكلة:



نلاحظ من خلال الشكل وجود حالة القيد الفائض متمثلة بالقيد الثالث أبطلا مفعول هذا القيد ذلك أنهما أكثر تقييداً وتحديداً وهما اللذان حددا منطقة الحل الممكن.

تعرفنا في الفصل السابق إلى كيفية الوصول إلى الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية ذات المتغيرين باستخدام طريقة الحل البياني، إلا أن واقع حال المشاكل التي تواجهها المؤسسات تتصف بالتعقيد والتشابك مما يجعلها بحاجة إلى عدد كبير من القيود والمتغيرات التي يجب أن تؤخذ بعين الاعتبار عند عملية صنع القرار.لذلك لا بد من استخدام طريقة أخرى أشمل وأسهل من طريقة الحل البياني.

طريقة السمبليكس وسيلة رياضية ذات كفاءة عالية في استخراج الحلول المثلى لمشكلات البرمجة الخطية بصورة عامة، وتستخدم هذه الطريقة لحل النماذج الرياضية للبرمجة الخطية جبرياً مهما كان عدد المتغيرات وهي الأكثر استخداماً لحل النماذج الرياضية[1].

تعمل هذه الطريقة بشكل مشابه تماماً للطريقة البيانية في كيفية الوصول للحل الأمثل، حيث تقوم هذه الطريقة بفحص ذروات منطقة الإمكانات بشكل متسلسل وباستخدام مفاهيم رياضية بسيطة، ويتم بشكل متكرر، وهذا يعني إعادة نفس الإجراءات مرة تلو الأخرى ولحين الوصول للحل الأمثل.

I- آلية عمل طريقة السمبليكس:

في حالة وجود أكثر من ثلاث متغيرات في مشكلة فإنه لا يمكن استخدام الطريقة البيانية وإنما علينا استخدام طرقة أخرى المسماة بالسمبليكس التي ابتكرها دانزاك (Geroge Dantzig) عام 1947 وهي عبارة عن أسلوب اختياري تكراري لتحليل مشاكل البرمجة الخطية ويعتمد هذا الأسلوب على اختيار المتغيرات ذات التأثير الأساسي على كل من دالة الهدف والقيود ويهمل المتغيرات الأخرى التي لا تؤثر على دالة الهدف والقيود[2].

I-1- تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة الأولية إلى الصيغة النموذجية (القياسية):

قبل الحل بطريقة النموذج بطريقة السمبليكس، وتحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة الأولية إلى الصيغة النموذجية، علينا أولاً معرفة أنواع الصيغ التي يمكن كتابة البرنامج الخطي على أساسها.

---

[1]. سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سابق، ص 53.

[2]. محمد عبد العال النعيمي، رفاه شهاب الحمداني، احمد شهاب الحمداني، مرجع سابق، ص 45.

I-1- 1-الصيغة القانونية والمختلطة للبرنامج الخطي[1]:

- **الصيغة القانونية:**

هناك نوعان من صيغ البرامج الخطية وهي حسب الحالة كما يلي:

أ. **حالة التعظيم:** في هذه الحالة تكون الصيغة القانونية للبرنامج الخطي على النحو التالي:

- دالة الهدف تكون في حالة تعظيم؛
- التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أصغر أو تساوي عددا ثابتا موجبا؛
- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة القانونية تكتب كما يلي[2]:

$$Max(z) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots\dots\dots\dots C_nx_n$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots a_{1n}x_n \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots a_{2n}x_n \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots\dots a_{in}x_n \le b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$$
$$x_1; x_2; \dots\dots\dots\dots\dots; x_n \ge 0$$

أما الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي:

$$Max(z) = C'X$$
$$s/c$$
$$\{AX \le B$$
$$X \ge 0$$

حيث: C' يعبر عن سطر معاملات دالة الهدف، A تعبر عن مصفوفة القيود، أما B فتعبر عن شعاع الثوابت .

---

[1]. راتول محمد، مرجع سابق، ص 41.

[2]- J.M.Boussard, J. J.Daudin ," **la programmation linéaire dans les modèles de production**",Masson , Paris, 1998 . P 27 .

ب. **حالة التدنئة:** فحتى يأخذ البرنامج الخطي شكل الصيغة القانونية يجب أن يتميز بما يلي:

- دالة الهدف تكون في حالة تدنئة ؛
- التشكيلة الخطية لجميع القيود تكون في حالة أكبر أو تساوي عددا ثابتا موجبا؛
- جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة القانونية تكتب كما يلي:

$$Min(z) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots\dots\dots\dots C_nx_n$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots\dots a_{1n}x_n \geq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots\dots a_{2n}x_n \geq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots\dots a_{in}x_n \geq b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots\dots a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$
$$x_1; x_2; \dots\dots\dots\dots\dots; x_n \geq 0$$

أما الصيغة القانونية بالشكل المصفوفي تكون كما يلي:

$$Min(z) = C'X$$
$$s/c$$
$$\{AX \geq B$$
$$X \geq 0$$

- **الصيغة المختلطة:** وشروط هذه الصيغة:
  - أن تكون دالة الهدف مكتوبة على شكل تعظيم أو تدنئة؛
  - أن تكون القيود مكتوبة بإشارة أقل أو يساوي أو أكبر أو يساوي أو هيأة معادلة أي مساواة؛
  - جميع المتغيرات تكون غير سالبة.

أي أن الصيغة المختلطة تكتب كما يلي[1]:

[1]- Mustapha Nabil ," **recherche opérationnelle et *Mathématiques appliqués* a la gestion des entreprises**",Dunod, France,1985 , p 31 .

$$Min\_or\_Max(z) = C_1x_1 + C_2x_2 + \dots\dots\dots C_nx_n$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots a_{1n}x_n \geq,=,\leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots\dots a_{2n}x_n \geq,=,\leq b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots\dots a_{in}x_n \geq,=,\leq b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots\dots a_{mn}x_n \geq,=,\leq b_m \end{cases}$$
$$x_1 ; x_2 ; \dots\dots\dots ; x_n \geq 0$$

I-1- 2– الصيغة النموذجية للبرنامج الخطي:

وفيها تكون كل القيود على شكل معادلات، أما دالة الهدف فتكون إما في صيغة تعظيم أو صيغة تدنئة، تعتبر الصيغة النموذجية ضرورية لإيجاد الحل الأساسي للبرنامج بطريقة السمبليكس، إذ يجري تحويل أية صيغة مهما كان شكلها إلى الصيغة النموذجية، بإعتبار ذلك أول خطوة في إتجاه الحل.

تتطلب الخطوة الأولى في الطريقة السمبليكس تحويل القيود من صيغة متراجحات إلى صيغة معادلات كالأتي [1]:

- إذا كانت إشارة القيد أقل من أو يساوي يتم إضافة متغير مكمل إلى الجانب الأيسر للقيد ويسمى " **متغير الفجوة** " أو المتغير الزائد أو المتغير الراكد ويرمز له بالرمز $(S_i \,; i=1,2,\dots\dots m)$ ويظهر هذا المتغير بمعامل صفر في دالة الهدف، ويمثل المتغير الفجوة موارد غير مستخدمة مثل الوقت المستغرق على الآلة، ساعات العمل، الأموال، ساحات المخزن، أو أي من الموارد في المشكلات التي تواجهها المؤسسات. إذا كان القيد مثلا كما يلي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots a_{1n}x_n \leq b_1$$

يصبح القيد:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots\dots a_{1n}x_n + S_1 = b_1$$

- إذا كانت إشارة القيد أكبر من أو يساوي يتم طرح متغير فائض من الجانب الأيسر للقيد ويسمى " **متغير الفجوة** " ويرمز له بالرمز $(S_i \,; i=1,2,\dots\dots m)$ ثم نضيف متغير وهمي أو اصطناعي

[1] جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 70 .

(Artificielle) إلى الجانب الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز (Ai)، ويظهر المتغير الفجوة بمعامل صفر في دالة الهدف، أما **المتغير الاصطناعي** فيظهر بمعامل (M) في دالة الهدف والتي ترمز إلى معامل رقمي كبير جداً، أما إشارتها في دالة الهدف فتكون موجبة(+M)عندما تكون دالة الهدف تخفيض أو تقليل، أما إذا كانت دالة الهدف تعظيم فإن إشارتها تكون سالبة (−M). فمثلا إذا القيد على الشكل التالي:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n \geq b_1$$

يصبح القيد:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ...a_{1n}x_n - S_1 + A_1 = b_1$$

تضاف المتغيرات الاصطناعية إلى المتراجحات الخطية التي تفصل بين طرفيها علامة من نوع أكبر أو يساوي أو المساواة وذلك بهدف الحصول على الحل الأساسي الممكن، وبعد أن يتم الحصول على هذا الحل (الحل الممكن) يجب أن يتم التخلص من هذه المتغيرات وأبعادها عن النموذج (كما سيأتي شرحه في حالة طريقة M الكبيرة أو Big−M)[1].

- إذا كانت إشارة القيد يساوي (=) يتم إضافة متغير وهمي أو اصطناعي إلى الجانب الأيسر للقيد ويرمز له بالرمز (Ai)، والجدول التالي يبين القواعد السابقة:

إشارة القيد	الإجراء على القيد	دالة الهدف تدنئة (Min)	دالة الهدف تعظيم (Max)
اقل من أو يساوي	$+1S_i$	$+0S_i$	$+0S_i$
أكبر من أو يساوي	$-1S_i+1A_i$	$1S_i+MA_i$	$1S_i-MA_i$
يساوي	$+1A_i$	$+MA_i$	$-MA_i$

مثال رقم (01): أوجد الصيغة النموذجية للبرنامج الخطي الأتي:

$$Max(z) = x_1 + 2x_2 - x_3$$

$$s / c$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10 \\ x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 + x_3 \leq 5 \end{cases}$$

$$x_1; x_2; x_3 \geq 0$$

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص54 .

الحل: القيد الأول عبارة عن قيد مساواة إذن:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + A_1 = 10$$

القيد الثاني يحمل إشارة أكبر من أو يساوي إذن:

$$x_2 + x_3 \geq 4 \Rightarrow x_2 + x_3 - S_1 + A_2 = 4$$

القيد الثالث حمل إشارة أصغر من أو يساوي ومنه:

$$x_1 + x_3 \leq 5 \Rightarrow x_1 + x_3 + S_2 = 5$$

أما دالة الهدف تصبح على النحو التالي:

$$Max(z) = x_1 + 2x_2 - x_3 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1 - MA_2$$

I-2- إعداد جدول الحل الأولي:

تبدأ الطريقة السمبليكس بحل الأولي ممكن حيث تكون قيم جميع المتغيرات الحقيقية (مثل) مساوية لـ(0)، ينتج عن هذا الحل الإعتيادي ربحاً مقداره (0)، وتبدأ الطريقة المبسطة عند هذه النقطة ومن ثم سنتحرك نحو بقية النقاط عند الأركان الأخرى إلى أن نصل إلى الحل الأمثل[1] .

تكوين جدول الحل الأولي (الأساسي) للحصول على حل أولي ممكن والذي يناظر الحل الأولي عند نقطة الأصل في طريقة الحل البياني، ويكون تنظيم بيانات الشكل الصيغة النموذجية من حالة دالة التعظيم في جدول الحل الأولي كما هو مبين في الجدول التالي:

[1] -P.Chrétienne, Y.Pesyuex, G.Raudjean ," **Algorithmes et pratique de programmation linéaire**", édition telmic, Paris, 1980. P 17 .

T_1	C_J	C_1	C_2	....	C_n	0	0	....	0	
CB	XB	X_1	X_2	....	X_n	S_1	S_2	....	S_m	B
0	S_1	a_{11}	a_{12}	....	a_{1n}	1	0	....	0	b_1
0	S_2	a_{21}	a_{22}	....	a_{2n}	0	1	....	0	b_2
:	:	:	:	....	:	:	:	....	:	:
0	S_i	a_{i1}	a_{i2}	....	a_{in}	0	0	....	0	b_i
:	:	:	:	....	:	:	:	....	:	:
0	S_m	a_{m1}	a_{m2}	....	a_{mn}	0	0	....	1	b_m
Z_J		0	0	....	0	0	0	....	0	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		C_1	C_2	....	C_n	0	0	....	0	Z=0

حيث:

$$Z_J = CB'X_J S_J$$

$$Z = CB'B$$

نلاحظ أن متغيرات الأساس الموضوعة في العمود الثاني من الجدول هي نفسها المقابلة للقيمة (1) من أعمدة المصفوفة الأحادية، وتكون في الجدول الحل الأساسي الأول إما متغيرات فجوة أو متغيرات لإصطناعية أو هم معا، وفي المراحل اللاحقة تزيحها الخوارزمية، وتحل محلها متغيرات أخرى.

وفي هذا الجدول تكون قيم المتغيرات داخل الأساس هي القيم المقابلة لها في العمود الأخير(عمود الثوابت)، أي : $(S_1 = b_1 ; S_2 = b_2 ;........ \;........ \; S_m = b_m)$

أما قيمة الدالة الإقتصادية فهي معدومة، أما بقية عناصر السطر الأخير فتعبر عن تغير معاملات دالة الهدف طيلة مراحل الحل.

مثال رقم (02): أوجد الصيغة النموذجية والجدول الحل الأساسي الأول للبرنامج الخطي التالي:

$$Max(z) = 7x_1 + 5x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 100 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 240 \end{cases}$$

$$x_1 ; x_2 \ge 0$$

✓ الصيغة النموذجية:

تصبح القيود أعلاه كما يأتي:

القيد الأول: $$2x_1 + x_2 + S_1 = 100$$

القيد الثاني: $$4x_1 + 3x_2 + S_2 = 240$$

وهذا يعني بأن عدد ساعات المستخدمة كانت أقل من 100 ساعة بالنسبة للقيد الأول و240 ساعة بالنسبة للقيد الثاني.

إن المتغيرات الفجوة لا تحقق أي ربح، فإنه سيتم إضافتها إلى دالة الهدف الأصلية وبمعامل (0)، وعليه تصبح معادلة دالة الهدف:

$$Max(z) = 7x_1 + 5x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

✓ جدول الحل الأساسي الأول للبرنامج:

المتغيرات الغير الأساسية

T_1	C_J	7	5	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
0	S_1	2	1	1	0	100
0	S_2	4	3	0	1	240
Z_J		0	0	0	0	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		7	5	0	0	Z=0

المتغيرات الأساسية

يطلق على الحل الإبتدائي مصطلح " الحل الممكن الأساسي " ويوصف بالصيغة الآتية:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \\ 240 \end{pmatrix}$$ هذا هو الحل الممكن الأساسي بصيغة الأعمدة.

المتغيرات التي يطلق عليها **بالمتغيرات الأساسية** في البرمجة الخطية هي (S_1,S_2)، أما المتغيرات التي لا يضمها مزيج الحل أو غير الأساسية في مثالنا (X_1,X_2) يطلق عليها **المتغيرات غير الأساسية**.

I-3- إجراءات الحل بطريقة السمبليكس:

إنطلاقا من الجدول الأول نحضر لإعداد جدول الحل الأساسي الثاني " الجدول الثاني" وذلك بإختيار المتغيرة التي تدخل الأساس والمتغيرة التي تخرج من الأساس وكذلك **عنصر الإرتكاز**.

سندرج فيما يأتي الخطوات ثم نشرحها بدقة ونطبقها لإستكمال الجدول الثاني والثالث للحل[1]:

- **الخطوة (01):** تحديد المتغير الذي سيدخل مزيج الحل لاحقاً، و إحدى الطرق للقيام بذلك هو عن طريق تحديد العمود، ويتم على أساس قيم صف تقيم الحل $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ فإذا كانت دالة الهدف تعظيم (Max) نختار المتغير صاحب أعلى قيمة موجب في صف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ ويسمى العمود الذي يقع فيه بالعمود المحوري أو **بعمود عنصر الإرتكاز** (Pivot Column)، ومن ثم المتغير أكبر قيمة موجبة في صف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ في الجدول السابق، هذا يعني أننا سننتج الآن بعض المنتجات التي ستسهم في تحقيق أعظم ربح إضافي للوحدة الواحدة. من جدول الحل الأولي للمثال السابق رقم (02) نجد أن قيمة المتغير (X_1) في الصف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ تساوي (7) وهي أعلى قيمة موجبة وهذا يعني أن إضافة وحدة واحدة من (X_1) لمزيج الحل سيساهم بزيادة الربح بمقدار (7) دينار، أما المتغيرة (X_2) فإن القيمة المقابلة له في الصف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ كانت (5) دينار فقط، أما المتغيرتين $(S_1 ;S_2)$ فكانت قيمها المقابلة في صف $(\Delta Z = C_J - Z_J)$ صفر لكل منهما، وهذا يعني أن دخولهما مزيج الحل سوف لن يضيف أي شيء للربح المتوقع، وعليه سنختار المتغير (X_1) ليكن المتغير الداخل، وعليه سيكون العمود الذي يحتويه هو عمود الإرتكاز؛
- **الخطوة (02):** نحدد المتغير الذي سيتم استبداله (المتغير الخارج)، لإننا إخترنا متغير جديد سيدخل مزيج الحل، ينبغي أن نحدد أي من المتغيرات الأساسية الحالية ينبغي أن يخرج ويتم إنجاز هذه الخطوة عن طريق قسمة قيم عمود الكميات (B) على قيم عمود المحور الإتكاز (القيم فقط الموجبة والغير معدومة) الذي تم إختياره في الخطورة (01)، الصف الذي يحقق أقل قيمة موجبة سيتم إستبداله في الجدول اللاحق(هذا الرقم الأقل قيمة موجبة بالمناسبة يعطي أكبر رقم من الوحدات للمتغير الذي سيحل محله في الحل)، ويشار إلى هذا الصف بـ الصف المحور أو **صف الإرتكاز** (Pivot Row)، الرقم الذي يقع ضمن نقطة تقاطع صف الإرتكاز مع عمود الإرتكاز يشار له بـ العنصر المحوري أو **عنصر الإرتكاز** (Pivot Number)، طالما أن المتغير (X_1) سيدخل مزيج الحل، ينبغي أن نحدد المتغير الذي سيتم إستبداله سيكون هناك عددا من المتغيرات الأساسية بقدر عدد القيود في مشكلة البرمجة الخطية، وعليه فإما (S_1) أو (S_2)

[1]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص ص : 153-157.

سيخرج من جدول الحل ليحل محله المتغير الداخل (X_1) كمتغير أساسي ولتحديد صف الإرتكاز، فإننا سنقسم الكمية الموجودة في عمود (B) على القيمة المقابلة له في عمود الإرتكاز وعليه:

$$Min\left\{\frac{100}{2}=50\,,\frac{240}{4}=60\right\}=Min\,\{50\,,60\}=50$$

الرقم الموجب الأصغر يشير إلى أعظم رقم من الوحدات من (X_1) يمكن إنتاجها دون أن ينتهك أي من القيود الأصلية، إنها أيضا تشير إلى أن الصف الإرتكاز سيكون الصف الأول الذي يقابل النسبة (50)، هذا يعني أن بأن (S_1) سيكون المتغير الذي سيتم استبداله في هذه الخطوة، أما عنصر الإرتكاز هو الرقم الذي يقع عند تقاطع صف الإرتكاز مع عمود الإرتكاز وهو يقع في الصف الأول والعمود الأول وهو (2).

ولتوضيح ما سبق في الخطوة رقم (01) و (02) في الجدول الأولي السابق كالآتي:

عنصر الإرتكاز

T_1	C_J	7	5	0	0	B	$\frac{B}{X_1}$
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2		
0	S_1	2	1	1	0	100	50
0	S_2	4	3	0	1	240	60
Z_J		0	0	0	0		
$\Delta Z=C_J-Z_J$		7	5	0	0	Z=0	

صف الإرتكاز

عمود الإرتكاز

- **الخطوة (03):** يتم تعديل جدول الأولي بتكوين جدول جديد عن طريق إجراء بعض التعديلات على مصفوفة المعاملات في جدول الحل الأولي، حيث يرتبط الجدول الجديد بجدول الحل الأولي باعتبار الجدول الجديد مرحلة لاحقة لجدول الحل الأولي، وتتلخص إجراءات تكوين الجدول الجديد بما يلي:

- تحتسب قيم صف المتغير الداخل إلى الحل عن طريق قسمة قيم عناصر الصف الإرتكاز على عنصر الإرتكاز، ويسمى الصف الناتج بصف العمل (Working Row) من المثال السابق لدينا القيم الجديدة لصف الإرتكاز كما يلي:

$$X_1 = \left(\frac{2}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{0}{2};\frac{100}{2}\right) = \left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0;50\right)$$

ستظهر القيم الجديدة لصف الإرتكاز بأكمله في الجدول الجديد، ونلاحظ بأن (X_1) سيظهر في مزيج الحل وأنه سيتم إنتاج (50) وحدة من (X_1)، وهذا سيحقق حتماً ربحاً أكبر من (0) كما هو الحال في جدول الحل الأولي.

T_2	C_J	7	5	0	0	
CB	**XB**	X_1	X_2	S_1	S_2	**B**
7	X_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	50

الصف الأول الجديد

- تحتسب قيم الصفوف الأخرى باستخدام القواعد التالية:

قيم الصف الجديدة = القيم الحالية (القديمة) للصف – (الرقم المناظر للرقم الإرتكاز X الرقم المقابل في صف العمل). أما الرقم المناظر للرقم الإرتكاز هو الرقم الذي يقع أسفل أو أعلى الرقم الإرتكاز.

قيم الصف الثاني الجديدة =

$$S_2 = (4;3;0;1;240) - 4\left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0;50\right) = (0;1;-2;1;40)$$

T_2	C_J	7	5	0	0	
CB	**XB**	X_1	X_2	S_1	S_2	**B**
0	S_2	0	1	−2	1	40

الصف الثاني الجديد

- **الخطوة (04):** وبعد الإنتهاء من عملية الحساب قيم الصفوف تتم عملية اختبار أمثلية الحل، لكن لابد من إجراء الخطوة الأخيرة لإكمال الجدول الثاني واختبار الحل هو إستخراج تأثير دالة الهدف وتتضمن هذه الخطوة حساب قيم كلا من صف (Z_J) و $(\Delta Z = C_J - Z_J)$، ونكرر بأن دخول (Z_J) في عمود الكميات يعطينا إجمالي الربح الذي يتحقق من الحل الحالي، أما بقية

قيم (Z_J)، فإنها تمثل إجمالي الربح المتحقق من إضافة وحدة واحدة من كل متغير إلى الحل الجديد وتحتسب قيم (Z_J) كما يأتي:

$$Z_J = CB'X_J S_J$$

$$Z_J = (7 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & \frac{7}{2} & \frac{7}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

أما قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = CB'B = (7 \quad 0)\begin{pmatrix} 50 \\ 40 \end{pmatrix} = 350$$

وسيتم وضع قيم (Z_J) و (ΔZ)، في الجدول الحل الثاني وكما مبين في الجدول التالي:

T_2	C_J	7	5	0	0		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B	$\frac{B}{X_2}$
7	X_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	50	100
0	S_2	0	1	-2	1	40	40
Z_J		7	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	0	Z=350	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	$\frac{3}{2}$	$\frac{-7}{2}$	0		

إن الحل الحالي يشير إلى أن الشركة حتى الآن ستقوم بإنتاج 50 وحدة من (X_1)، و(0) وحدة من (X_2)، لتحقق ربحاً مقداره 350 دينار، (X_1) هو متغير أساسي، أما (X_2) فهو متغير غير أساسي، أما المتغيرة الفجوة (S_2) تبين كمية الوقت غير المستخدم، وهو أحد المتغيرات الأساسية وقيمته هي 40، وهذا يعني أن 40 ساعة لا تزال موجودة، أما المتغيرة الفجوة (S_1) فهو متغير غير أساسي لذا فإن عدد الساعات يساوي (0).

أن الصف (ΔZ) مهماً بالنسبة لنا لسببين: الأول إنه يشير إذا ما كان الحل الحالي هو **الحل الأمثل** أم لا ؟ فعندما لا تكون هناك قيم موجبة في الصف، فهذا يعني الوصول للحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية، وفي مثالنا ومن خلال القيم الموجودة في الصف (ΔZ) في الجدول نجد بأن قيم (X_1)

و(S_1) و(S_2) سالبة أو صفرية، أما قيمة (X_2) فهي ($\frac{3}{2}$) وهذا يعني بأن صافي الربح يمكن أن يزيد بمقدار ($\frac{3}{2}$) لكل وحدة مضافة على الحل الحالي.

ولأن قيمة (X_1) في صف (ΔZ) تساوي الصفر، فهذا يعني أن إضافة وحدة واحدة من (X_1) سوف لن يضيف شيئاً إلى الربح، لذا فإنه سيبقى دون تغيير.

طالما أنه لم تكن جميع القيم في الصف (ΔZ) في الجدول الأخير سالبة أو معدومة، لذا فإن هذا الجدول لا يمثل جدول الحل الأمثل، وينبغي أن نعيد خطوات السمبليكس السابقة الذكر.

سيدخل المتغير (X_2) الحل اللاحق لأنه يحمل أكبر قيمة موجبة في الصف (ΔZ) بل إنه القيمة الوحيدة في الصف، هذا يعني أنه سيكون عمود (X_2) هو عمود الإرتكاز، تتضمن الخطوة الموالية تحديد صف الإرتكاز وستقسم قيم عمود الكميات المتاحة على عمود الإرتكاز القيمة الأصغر هي لـ(S_2)، وعليه سيغادر عمود المتغيرات الأساسية ليحل محله المتغير (X_2)، وقيمة عنصر الإرتكاز هي (01) كما هي موضحة في الجدول السابق.

- **الخطوة (05):** تطوير جدول الحل الثالث ويتم استبدال صف الإرتكاز من خلال قسمة كل رقم فيه على العنصر الإرتكاز هو (1)، ولأن القسمة على (1) لذا سوف لن تتغير القيم، وعليه ستكون قيم المتغير الداخل في جدول الحل الجديد لذي سيحل محل المتغير الخارج (S_2).

T_3	**C_J**	**7**	**5**	**0**	**0**	
CB	**XB**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**B**
5	**X_2**	0	1	−2	1	40

القيم الجديدة لصف (X_1) يمكن حسابها الآن كما يأتي:

$$X_1 = \left(1;\frac{1}{2};\frac{1}{2};0;50\right) - \frac{1}{2}\left(0;1;-2;1;40\right) = \left(1;0;\frac{3}{2};\frac{-1}{2};30\right)$$

وهكذا ستكون قيم صف (X_1) والتي ستظهر في الجدول الحل الثالث مبينة بالآتي:

T_3	**C_J**	**7**	**5**	**0**	**0**	
CB	**XB**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**B**
7	**X_1**	1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{2}$	30

وأخيراً صفي تحسب في الجدول الثالث كما يأتي:

$$Z_J = CB'X_J S_J$$

$$Z_J = \begin{pmatrix} 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

أما قيمة دالة الهدف هي:

$$Z = CB'B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} = 410$$

ومنه جدول الحل الثالث هو كالآتي:

T_3	C_J	7	5	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
7	X_1	1	0	$\frac{3}{2}$	$\frac{-1}{2}$	30
5	X_2	0	1	-2	1	40
Z_J		7	5	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	Z=410
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	$\frac{-1}{2}$	$\frac{-3}{2}$	

جدول الحل الأمثل لأن: $\Delta Z \leq 0$

بما أن (ΔZ) في الجدول الحل الثالث سالبة أو معدومة، ذلك يعني أنه تم الوصول للحل الأمثل والحلول هي كما يلي:

$$X_1 = 30; X_2 = 40; S_1 = 0; S_2 = 0; Z = 410$$

وعادة يحتمل أن تكون هناك أخطاء رياضية عند المرور بخطوات السمبليكس المتعددة وعليه ستكون فكرة جيدة التحقق من الحل النهائي الذي توصلت إليه، ويمكن أن يتم ذلك في جزء عن طريق النظر إلى القيود ودالة الهدف .

القيد الأول: محقق تماما

$$2x_1 + x_2 \leq 100 \Rightarrow 2(30) + 40 = 100$$

القيد الثاني: محقق تماماً

$$4x_1 + 3x_2 \leq 240 \Rightarrow 4(30) + 3(40) = 240$$

دالة الهدف: الربح

$$Max(z) = 7x_1 + 5x_2 = 7(30) + 5(40) = 410$$

II- تطبيق طريقة السمبليكس على مشكلة التدنئة أو التقليل:

في حالة التدنئة تكون القيود من النوع أكبر أو تساوي فتطرح متغيرات الفجوة من الطرف الأيسر وذلك للايفاء بشرط الصيغة النموذجية، ولهذا السبب يستعان بمتغيرات أخرى تسمى بالمتغيرات الإصطناعية تضاف إلى النموذج بعد طرح المتغيرات الفجوة وذلك لإمكانية الحصول على الحل الممكن وكذلك عندما تكون القيود من نوع مساواة تضاف المتغيرات الإصطناعية لنفس السبب، ولقد سبق لنا في هذا الفصل شرح كيف يتم معاملات المتغيرات الاصطناعية لإيجاد الصيغة النموذجية.

وبعد الحصول على الحل الممكن، يجب التخلص من هذه المتغيرات (الإصطناعية) وإبعادها عن جداول السمبليكس، لأن بقاءها في مراحل حل السمبليكس هو علامة غير صحيحة للحصول على الحل الأمثل أو بصيغة أخرى عند بقائها لا يمكن الحصول على الحل الأمثل[1].

تشبه مشكلات التقليل إلى حد بعيد مشكلات التعظيم التي تناولناها أيضا في هذا الفصل، الفرق بينهما يكمن في صف (ΔZ) طالما أن هدفنا الآن هو تقليل التكاليف، فإن المتغير الجديد الذي سيدخل إلى جدول الحل (عمود الإرتكاز) سيكون المتغير الذي يمثل **أكبر قيمة بإشارة سالبة** في الصف (ΔZ)، وهكذا فإننا سنختار المتغير الذي يقلل التكاليف بأكبر قدر ممكن، ويتم الوصول للحل الأمثل في مشكلات التقليل عندما تكون جميع القيم في صف (ΔZ) **موجبة أو معدومة** تماماً عكس ما هو عليه في حالات التعظيم، جميع خطوات السمبليكس الأخرى كما سنراها لاحقاً ستبقى كما في حالات التعظيم.

وهناك طريقتان للتخلص من المتغيرات الاصطناعية:

- ✓ طريقة (M) الكبيرة (Big–M)؛
- ✓ طريقة المرحلتين (Two–Phase).

1-II- طريقة (M) الكبيرة (Big–M):

المثال التالي يوضح أهم الفوارق في تطبيق الطريقة السمبليكس بأسلوب (M) الكبيرة على مشكلة التقليل، والذي يهدف إلى إيجاد أقل التكاليف عند إنتاج نوعين من السلع[2].

مثال رقم (03): تنتج مؤسسة لصناعة الإلكترونيات نوعين من المنتجات هما : A وB ، يتطلب إنتاج كل منتج المرور في مرحلتين، ويوجد لدى الشركة على الأقل (6) ساعات يومياً لأعمال المرحلة الأولى، ولا يقل عن (4) ساعات في اليوم الواحد مخصصة لأعمال المرحلة الثانية، والجدول التالي يبين الوقت الذي تحتاجه الوحدة الواحدة من كلا المنتجين، بالإضافة إلى تكلفة إنتاج كل منتج.

---

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 67 .

[2] - Gérald Baillargeon ,op-cit, P 157 .

المنتج	المرحلة الأولى	المرحلة الثانية	التكلفة
A	1	1	3
B	3	1	4

المطلوب: نفترض أن الشركة ترغب في تخفيض تكاليفها الكلية، ما هي الكميات التي تنتجها من كل نوع.

الحل: يتم أولاً بناء نموذج البرمجة الخطية لهذه المشكلة، وعلى النحو الآتي:

X_1: تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج A.

X_2: تمثل عدد الوحدات المنتجة من المنتج B.

$$Min(z) = 3x_1 + 4x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$x_1; x_2 \geq 0$$

أولاً: نحول القيود إلى الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $x_1 + 3x_2 - S_1 + A_1 = 6$

القيد الثاني: $x_1 + x_2 - S_2 + A_2 = 4$

إن المتغيرات الفجوة لا تحقق أي ربح، فإنه سيتم إضافتها إلى دالة الهدف الأصلية وبمعامل (0)، والمتغيرات الاصطناعية تضاف في حالة (Min) وبمعامل (M) وهو عدد كبير جداً، وتطرح في حالة (Max)، وعليه تصبح معادلة دالة الهدف:

$$Min(z) = 3x_1 + 4x_2 + 0S_1 + MA_1 + 0S_2 + MA_2$$

ثانياً: تكوين جدول الحل الأساسي الأول وبنفس القواعد المشار إليها سابقا:

متغيرات الاصطناعية

متغيرات الفجوة

متغيرات القرار

T_1	C_J	3	4	0	M	0	M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B	$\frac{B}{X_2}$
M	A_1	1	3	−1	1	0	0	6	2
M	A_2	1	1	0	0	−1	1	4	4
Z_J		2M	4M	−M	M	−M	M		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		3−2M	4−4M	M	0	M	0	Z=10M	

يلاحظ من جدول الحل الأولي أن المتغيرات الأساسية هي المتغيرات الإصطناعية، نختبر أمثلية الحل من خلال صف (ΔZ) في جدول الحل الأولي حيث نلاحظ وجود قيم سالبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التدنئة مشروط بأن تكون جميع $(\Delta Z \geq 0)$، نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، العمود الأمثل الذي يعطي المتغير الذي سيدخل إلى الحل فهو المقابل لأكبر قيمة سالبة في (ΔZ) وفي حالة وجود (M) الكبرى في معاملات فإننا نقارن بين معاملات (M) وفي حالة عدم وجود (M) الكبرى في المعاملات نقارن مقارنة عادية بين الأعداد وفي هذه الحالة المتغير (X_2) الذي قيمته في السطر الأخير المقابلة له تساوي (4−4M) وهي أعلى قيمة بإشارة سالبة في الصف (ΔZ) وبالتالي فإن (X_2) هو المتغير الداخل وعموده هو العمود الإرتكاز كما مبين في الجدول أعلاه.

ينبغي أن نحدد المتغير الذي سيغادر الحل سنقسم الكمية الموجودة في عمود (B) على القيمة المقابلة له في عمود الإرتكاز وعليه:

$$Min\left\{\frac{6}{3}=2,\frac{4}{1}=4\right\}=Min\{2,4\}=2$$

ونختار أقل نسبة موجبة وهي (2) وبذلك فإن (A_1) هو المتغير الخارج من الحل الأساسي وصفه وهو الصف الإرتكاز، وأن الرقم (3) هو العنصر الإرتكاز.

نقوم بإجراء التعديل الأول عن طريق تكوين جدول جديد نحصل بموجبه على حل أفضل من الحل الأولي وذلك بعد إجراء الحسابات الآتية:

تحتسب قيم صف المتغير الداخل إلى الحل عن طريق قسمة قيم عناصر الصف الإرتكاز على عنصر الإرتكاز، لدينا القيم الجديدة لصف الإرتكاز كما يلي:

$$X_1=\left(\frac{1}{3};\frac{3}{3};\frac{-1}{3};\frac{1}{3};\frac{0}{3};\frac{0}{3};\frac{6}{3}\right)=\left(\frac{1}{3};1;\frac{-1}{3};\frac{1}{3};0;0;2\right)$$

تكوين قيم الصف الثاني (A_2):

قيم الصف الثاني الجديدة =

$$A_2=(1;1;0;0;-1;1;4)-1\left(\frac{1}{3};1;\frac{-1}{3};\frac{1}{3};0;0;2\right)=\left(\frac{2}{3};0;\frac{1}{3};\frac{-1}{3};-1;1;2\right)$$

يتم احتساب قيم صف (Z_J) كما يلتي:

$$Z_J=CB'X_JS_JA_J$$

$$Z_J=(4\quad M)\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0\\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{-1}{3} & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{3}+\frac{2M}{3} & 4 & \frac{-4}{3}+\frac{M}{3} & \frac{4}{3}-\frac{M}{3} & -M & M\end{pmatrix}$$

أما قيمة دالة الهدف هي:

$$Z=CB'B=(4\quad M)\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}=8+2M$$

وبموجب الحسابات السابقة نحصل على الجدول التالي:

T_2	C_J	3	4	0	M	0	M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B	$\frac{B}{X_1}$
4	X_2	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{-1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	0	2	6
M	A_2	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	−1	1	2	3
Z_J		$\frac{4}{3}+\frac{2M}{3}$	4	$\frac{-4}{3}+\frac{M}{3}$	$\frac{4}{3}-\frac{M}{3}$	−M	M		
$\Delta Z=C_J-Z_J$		$\frac{5}{3}-\frac{2M}{3}$	0	$\frac{4}{3}-\frac{M}{3}$	$\frac{-4}{3}+\frac{4M}{3}$	M	0	Z=8+2M	

نختبر أمثلية الحل في جدول الثاني فنلاحظ وجود قيم سالبة، فنختار أعلى قيمة بإشارة سالبة، وتقع تحت المتغير (X_1)، ويكون المتغير الداخل (X_1)، وعموده هو عمود الإرتكاز ثم نحدد المتغيرة الخارج من الحل الأساسي كما مر سابقاً فيكون (A_2) وصفه هو صف الإرتكاز، ويكون الرقم ($\frac{2}{3}$) هو عنصر الإرتكاز، وبناء على هذا تتم عملية إعادة بناء الجدول الجديد ويكون على الشكل التالي:

T_3	C_J	3	4	0	M	0	M	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B
4	X_2	0	1	-0,5	0,5	0,5	-0,5	1
3	X_1	1	0	0,5	-0,5	$\frac{-3}{2}$	$\frac{3}{2}$	3
Z_J		$\frac{4}{3}+\frac{2M}{3}$	4	-0,5	0,5	-2,5	2,5	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0,5	M-0,5	2,5	M-2,5	Z=13

جدول الحل الأمثل لأن: $\Delta Z \geq 0$

نقوم بتقييم الحل من خلال (ΔZ)، حيث نلاحظ بأن جميع القيم أكبر من أو تساوي صفر وهذا يدل على أن الحل الحالي يمثل حل الأمثل، ويتلخص الحل الأمثل فيما يلي:

$$X_1 = 3; X_2 = 1; S_1 = 0; S_2 = 0; Z = 13$$

ملاحظة هامة:

- ✓ إذا خرجت متغيرة الإصطناعية من الأساس فيمكننا الاستغناء عن حساب عناصر عمود المتغيرة الإصطناعية التي خرجت لأنها لا يمكن أن تدخل إلى أساس مرة أخرى[1]؛
- ✓ تعطى الأولية الخروج من الأساس في حالة الانحلال (تعدد البدائل) لمتغيرة الإصطناعية.

II-2- طريقة المرحلتين (Two-Phase):

بعد أن لاحظنا تعقد العمليات الحسابية بعض الشيء في طريقة (M) الكبيرة وخاصة عندما تكون العمليات الحسابية يدوية، هناك طريقة أخرى أقل صعوبة مما في الطريقة السابقة وهي طريقة المرحلتين، يستعمل هذا الطريقة عندما تستعمل المتغيرات الإصطناعية في نماذج البرمجة الخطية بغية الحصول على الحل الممكن لهذه النماذج.

وتستخدم هذه الطريقة لإستبعاد أثر المتغيرات الإصطناعية في نماذج البرمجة الخطية والحصول على الحل الأمثل، وتكون هذه الطريقة على مرحلتين[2]:

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 85 .

[2]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 10.

- **المرحلة الأولى: (Phase I)** وهنا تظهر دالة الهدف فقط بالمتغيرات الإصطناعية وبمعامل واحد وتستبعد المتغيرات الأخرى كافة من دالة الهدف (سواء أكانت متغيرات القرار أم متغيرات الفجوة)، هذا إذا كانت دالة الهدف من نوع تدنئة، وتظهر المتغيرات الإصطناعية في دالة الهدف بمعاملات (-1) إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم، وكما يأتي:

$$Min\,(Z) = A_1 + A_2 + \dots\dots\dots\ \dots\dots + A_m$$
$$Max\,(Z) = -A_1 - A_2 - \dots\dots\dots\ \dots\dots - A_m$$

وتنتهي المرحلة الأولى في حالة (Min) أو (Max) عندما تساوي دالة الهدف صفر أي يوجد مرحلة ثانية (يوجد حل أمثل)، أما في حالة عدم المساواة دالة الهدف للصفر في نهاية المرحلة الأولى فلا يوجد حل أمثل ولا وجد مرحلة ثانية[1].

- **المرحلة الثانية: (Phase II)** وفي هذه المرحلة نستمر في حل المسألة و وهنا تظهر دالة الهدف على حقيقتها، أي بمعاملات المتغيرات القرار كما هي في النموذج، وتظهر متغيرات الفجوة بمعاملات أصفار وكما هي الحالة الطبيعية و على النحو الآتي:

$$Min\,(Z) = CX_1 + C_2X_2 + \dots\dots\dots\ \dots\dots + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \dots\dots\ 0S_m$$
$$Max\,(Z) = CX_1 + C_2X_2 + \dots\dots\dots\ \dots\dots + C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \dots\dots\ 0S_m$$

وهنا يكمل الحل بجداول السمبلكس وكما مر بنا إلى أن نصل إلى جدول الحل الأمثل.

مثال رقم (04): حل نموذج البرمجة الخطية باستعمال طريقة المرحلتين

$$Min(z) = 2x_1 + x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \end{cases}$$
$$x_1; x_2 \geq 0$$

أولاً: نحول القيود إلى الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $3x_1 + x_2 - S_1 + A_1 = 3$

القيد الثاني: $4x_1 + 3x_2 - S_2 + A_2 = 6$

القيد الثالث: $x_1 + 2x_2 + S_3 = 3$

المرحلة الأولى:

حل بدالة الهدف التالية: $Min(z) = A_1 + A_2$

---

[1] - Gérald Baillargeon ,op-cit, P 147 .

T_1	C_J	0	0	0	0	0	1	1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X_1}$
1	A_1	3	1	−1	0	0	1	0	3	1
1	A_2	4	3	0	−1	0	0	1	6	$\frac{3}{2}$
0	S_3	1	2	0	0	1	0	0	3	3
Z_J		7	4	−1	−1	0	1	1		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		−7	−4	1	1	0	0	0	Z=9	

نلاحظ وجود قيم سالبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التدنئة مشروط بأن تكون جميع ($\Delta Z \geq 0$)، نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، المتغيرة التي تدخل إلى الأساس هي:(X_1) والتي تخرج من الأساس هي: (A_1) وبإتباع نفس خطوات السمبليكس السابقة نقوم بإعداد الجدول الحل الأساسي الثاني:

T_2	C_J	0	0	0	0	0	1	1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X_2}$
0	X_1	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	0	1	3
1	A_2	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	−1	0	$\frac{-4}{3}$	1	2	$\frac{6}{5}$
0	S_3	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1	$\frac{-1}{3}$	0	2	$\frac{6}{5}$
Z_J		0	$\frac{5}{3}$	$\frac{4}{3}$	−1	0	$\frac{-4}{3}$	1		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	$-\frac{5}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1	0	$\frac{7}{3}$	0	Z=2	

نلاحظ من خلال الجدول وجود قيم سالبة أي مزال هناك فرص أخرى لتقليل من التكاليف، وأكبر قيمة سالبة هي للمتغير (X_2) وهي التي تدخل إلى الأساس، كما نلاحظ أيضا أن هناك متغيرتين مرشحتين للخروج وهما (A_2),(S_3) وهنا **تعطى أولوية الخروج للمتغيرة الإصطناعية** للتقريب الأكثر للحل، أي المتغيرة التي تخرج من الأساس هي (A_2) ومنه الجدول الحل الأساسي يكون كالآتي:

T_3	C_J	0	0	0	0	0	1	1	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	B
0	X_1	1	0	$\frac{-3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$
0	X_2	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	0	$\frac{-4}{3}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{6}{5}$
0	S_3	0	0	-1	1	1	1	-1	0
Z_J		0	0	0	0	0	0	0	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0	0	0	1	1	Z= 0

بما أن: $\Delta Z \geq 0$ **و** $Z = 0$ **توجد مرحلة ثانية**

ننتقل إلى المرحلة الثانية، ويتم ذلك بحذف أعمدة معاملات المتغيرات الإصطناعية من جدول الحل الأخير من المرحلة الأولى.

المرحلة الثانية: وفي هذه المرحلة نستمر في حل المسألة وبدالة الهدف الأصلية (متغيرات القرار، ومتغيرات الفجوة) أي حذف المتغيرات الإصطناعية، أما الجدول الأول من المرحلة الثانية يتشكل بعد بإفراغ البيانات الجدول السابق فيه واختبار الحل.

دالة الهدف تكتب بشكل التالي :

$$Min(z) = 2x_1 + x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

ويكون الجدول الحل الأساسي الأول في المرحلة الثانية كالآتي:

T_1	C_J	2	1	0	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
2	X_1	1	0	$\frac{-3}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{3}{5}$
1	X_2	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-3}{5}$	0	$\frac{6}{5}$
0	S_3	0	0	-1	1	1	0
Z_J		2	1	$\frac{-2}{5}$	$\frac{-1}{5}$	0	$Z=\frac{12}{5}$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		**0**	**0**	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	**0**	

بما أن: $\Delta Z \geq 0$ ومنه الجدول الأول من المرحلة الثانية هو جدول الحل الأمثل

وهنا تكون قيم الحل الأمثل كما يلي:

$$X_1 = \frac{3}{5};\ X_2 = \frac{6}{5};\ S_1 = S_2 = S_3 = 0;\ Z = \frac{12}{5}$$

III- حالات ومشاكل خاصة عند الحل بطريقة السمبليكس:

إستعرضنا الحالات الخاصة للحل بالطريقة البيانية، سنعود لوصف هذه الحالات عند الحل بطريقة السمبليكس:

III-1- حالة عدم وجود حل ممكن:

تحدث عدم إمكانية الحل عندما لا نجد حلا مرضيا لجميع القيود، ويمكن الإشارة إلى عدم إمكانية الحل بمجرد النظر إلى جدول الحل النهائي، إذ نجد فيه أن جميع القيم صف (ΔZ) نشير إلى الوصول للحل الأمثل، لكن نجد أنه لا يزال هناك متغير اصطناعي في الجدول أدناه جدول الحل النهائي لمشكلة برمجة خطية من نوع التدنئة الجدول مثالا عن مشكلة برمجة خطية لم تتم صياغتها بشكل صحيح، ربما تتضمن هذه المشكلات قيوداً متضاربة، عدم وجد حل ممكن يكون ممكناً لبقاء المتغير الاصطناعي في مزيج الحل، رغم أن جميع القيم في الصف (ΔZ) موجبة أو معدومة (وهو المعيار المعتمد في الوصول للحل الأمثل في حالة التدنئة، والمثال التالي يبن هذه الحالة.[1]

[1]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص: 184.

مثال رقم (05): الجدول التالي يوضيح لنا حالة عدم إمكانية الحل.

T	C_J	5	8	0	0	M	M	
CB	**XB**	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	**B**
5	X_1	1	0	−2	3	−1	0	200
8	X_2	0	1	1	2	−2	0	100
M	A_2	0	0	0	−1	−1	1	20
Z_J		5	8	−2	31−M	−21−M	M	**Z**=1800+
$\Delta Z = C_J - Z_J$		**0**	**0**	**0**	**M−31**	**2M−21**	**0**	20M

بما أن: $\Delta Z \geq 0$ وهو شرط الأمثلية وتوجد متغيرة اصطناعية (A_2) في مزيج الحل إذن حالة عدم وجود حل ممكن

III-2- عدم محدودية الحل:

وهي الحالة التي تكون فيها جميع عناصر عمود عنصر الإرتكاز **أقل أو تساوي الصفر**، حيث يستحيل إختيار المتغيرة التي تخرج من الأساس، لأن الخوارزمية تشترط على المتغيرة التي تخرج من الأساس بأنها المقابلة لأصغر نسبة موجبة بين عناصر عمود الثوابت وعناصر عمود عنصر الإرتكاز.[1]

مثال رقم (06): الجدول الموالي يوضح خالة محدودية الحل

T_2	C_J	6	9	0	0		
CB	**XB**	X_1	X_2	S_1	S_2	**B**	$\frac{B}{X_1}$
9	X_2	−1	1	2	0	30	−
0	S_2	0	0	−1	1	10	−
Z_J		−9	9	18	0	$Z = 270$	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		15	**0**	−18	0		

يستحيل تحديد المتغيرة التي تخرج من الأساس لأن عمود الإرتكاز يحوي قيم سالبة ومعدومة .

عمود الإرتكاز

[1]. محمد راتول، مرجع سابق، ص 78.

يوضح الجدول الحل الثاني الذي تم إحتسابه لمشكلة تعظيم بإعتماد طريقة السمبليكس، وهو يشير إلى حالة عدم المحدودية، لا يمثل الحل أعلاه حلاً أمثلاً لأن (ΔZ) ليست جميعها سالبة أو معدومة، كما هو مطلوب للوصول إلى حل الأمثل في مشكلات التعظيم، والمتغير المرشح لدخول هو (X_1)، ولتحديد المتغير الذي سيغادر يجب قسمة قيم عمود الكميات على قيم عمود الإرتكاز ولكن قيم هذا الأخير سالبة ومعدومة وهي غير مقبولة، فإن ذلك يشير إلى عدم محدودية الحل.

III-3- حالة الإنحلال:

نكون أمام حالة الإنحلالية عندما نجد متغيرتين على الأقل مرشحتين للدخول إلى الأساس (حيث تساوت النسبة الموجبة الدنيا التي على أساسها يتم اختيار المتغير الذي يدخل الأساس)، أو متغيرتين على الأقل مرشحتين للخروج من الأساس، وفي الحالتين نختار واحدة عشوائياً بسبب عدم وجود معيار محدد لتحديد المتغير الخارج أو الداخل للأساس، وعند استخدام طريقة الحل المبسطة قد تظهر حالة الإنحلال في أحد مراحل الحل، وإما تستمر لنهاية الحل أو تختفي قبل الوصول إلى الحل الأمثل، وعند استمرار حالة الانحلال إلى نهاية الحل لن تتحسن قيمة دالة الهدف وتبق على حالها[1].

مثال رقم (07): يبين الجدول الموالي مثالاً عن حالة الإنحلال في مشكلة التعظيم

T_2	C_J	5	8	2	0	0	0		
CB	**XB**	**X_1**	**X_2**	**X_3**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**B**	$\frac{B}{X_1}$
8	X_2	$\frac{1}{4}$	1	1	2	0	0	10	40
0	S_2	4	0	$\frac{1}{3}$	−1	1	0	20	5
0	S_3	2	0	2	$\frac{2}{5}$	0	1	10	5
Z_J		2	8	8	16	0	0	$Z = 80$	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		3	**0**	**−6**	−16	0	0		

نجد أن أصغر القيم الموجبة من ناتج قسمة عمود الكميات على قيم عمود الإرتكاز متساوية لصفي S_1 و S_2 وهذا يشير إلى وجود حالة إنحلال .

عمود الإرتكاز

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص ص: 93-95 .

III-4- تعدد الحلول المثلى:

تعدد الحلول المثلى أو وجود أكثر من حل أمثل بديل يمكن معرفتها عندما نستخدم طريقة السمبليكس وذلك عن طريق إلقاء نظرة على الجدول النهائي، فإذا كانت قيم المتغيرات القرار في الصف (ΔZ) مساوي للصفر رغم عدم وجودها في مزيج الحل، فهذا يعني وجد أكثر من حل أمثل بديل[1].

مثال رقم (08): الجدول الموالي يبين الحل الأمثل لمشكلة التعظيم

T_3	C_J	2	1	1	0	-M	0	0		
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	A_1	S_2	S_3	B	$\frac{B}{X_3}$
2	X_1	1	2	0,5	0	0	0	0,25	4	8
0	S_2	0	0	-1	0	0	1	-0,5	12	-
0	S_1	0	6	0	1	-1	0	1	12	-
Z_J		2	4	1	0	0	0	0,5	$Z = 8$	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	-3	0	0	-M	0	-0,5		

يتضح من جدول الحل الأمثل الأول بأن الحل الأمثل هو:

$$X_1 = 4; X_2 = X_3 = 0; S_1 = S_2 = 12\ ; S_3 = 0; Z = 8$$

من خلال ملاحظة قيم صف (ΔZ) يتبين بأن معامل (X_3) في الصف يساوي صفر، وهذا يعني إمكانية تكوين حل أمثل آخر بدخول (X_3) إلى الحل الأساسي وخروج (X_1)، ونحصل على حل أمثل آخر كما هو مبين في الجدول التالي:

T_4	C_J	2	1	1	0	-M	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	S_1	A_1	S_2	S_3	B
1	X_2	2	4	1	0	0	0	0,5	8
0	S_2	2	4	0	0	0	1	0	16
0	S_1	0	6	0	1	-1	0	0,5	12
Z_J		2	4	1	0	0	0	0,5	$Z = 8$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	-3	0	0	-M	0	-0,5	

نفس قيمة Z ، وهذا يدل عن حالة تعدد الحلول

[1]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص: 187.

نلاحظ من جدول الحل الأمثل الثاني تحقق نفس قيمة (Z) في الجدول الحل الأمثل الأول مع تغير متغيرات الحل الأساسي التي أصبحت :

$$X_3 = 8 ; X_1 = X_2 = 0 ; S_1 = 12 ; S_2 = 16 ; S_3 = 0 ; Z = 8$$

IV– تمارين محلولة:

التمرين الأول: افترض أن لديك نموذج البرمجة التالي

المطلوب: 1. أوجد الحل الأمثل بطريقة (M) الكبرى؛ 2. أوجد الحل الأمثل بطريقة المرحلتين.	$Min(z)=80x_1+60x_2$ s/c $\begin{cases}18x_1+12x_2 \geq 180\\ 6x_1+9x_2 \leq 162\\ 5x_1+10x_2=110\end{cases}$ $x_1;x_2 \geq 0$

حل التمرين الأول:

1. طريقة (M) الكبرى:

أولاً: إيجاد الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $18x_1+12x_2-S_1+A_1=180$

القيد الثاني: $6x_1+9x_2+S_2=162$

القيد الثالث: $5x_1+10x_2+A_2=110$

معادلة دالة الهدف:

$$Min(z)=80x_1+60x_2+0S_1+MA_1+0S_2+MA_2$$

ثانياً: إيجاد جدول الحل الأساسي الأول:

T_1	C_J	80	60	0	M	0	M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B	$\frac{B}{X1}$
M	A_1	18	12	−1	1	0	0	180	10
0	S_2	6	9	0	0	1	0	162	27
M	A_2	5	10	0	0	0	1	110	22
Z_J		23M	22M	−M	M	0	M		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		80−23M	60−22M	M	0	0	0	Z=290M	

نختبر أمثلية الحل من خلال صف (ΔZ) في جدول الحل الأولي حيث نلاحظ وجود قيم سالبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التدنئة مشروط بأن تكون جميع $(\Delta Z \geq 0)$، نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، العمود الأمثل الذي يعطي المتغير الذي سيدخل إلى الحل فهو المقابل لأكبر قيمة سالبة في (ΔZ) وفي حالة وجود (M) الكبرى في معاملات فإننا نقارن بين معاملات (M) وفي حالة عدم وجود (M) الكبرى في المعاملات نقارن مقارنة عادية بين الأعداد وفي هذه الحالة المتغير (X_1) هو الذي يدخل إلى الأساس، ينبغي أن نحدد المتغير الذي سيغادر الحل سنقسم الكمية الموجودة في عمود (B) على القيمة المقابلة له في عمود الإرتكاز، وعليه نختار أقل نسبة موجب وهي (10) وبذلك فإن (A_1) هو المتغير الخارج من الحل الأساسي وصفه وهو الصف الإرتكاز، وأن الرقم (18) هو العنصر الإرتكاز. وهكذا يمكن إعداد الجدول الثاني:

T_2	C_J	80	60	0	M	0	M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B	$\frac{B}{X2}$
80	X_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	0	10	15
0	S_2	0	5	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1	0	102	$\frac{102}{5}$
M	A_2	0	$\frac{20}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{-5}{18}$	0	1	60	9
Z_J		80	$\left(\frac{160}{3}+\frac{20}{3}M\right)$	$\left(\frac{-40}{9}+\frac{5}{18}M\right)$	$\left(\frac{40}{9}-\frac{5}{18}M\right)$	0	M	Z=800+60M	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	$\left(\frac{20}{3}-\frac{20}{3}M\right)$	$\left(\frac{40}{9}-\frac{5}{18}M\right)$	$\left(\frac{-40}{9}+\frac{23}{18}M\right)$	0	0		

المتغيرة الداخلة للأساس هي (X_2)، أما المتغيرة الخارجة من الأساس (A_2) ويكون الجدول الثالث كالآتي:

T_3	C_J	80	60	0	M	0	M	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B
80	X_1	1	0	$\frac{-1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	0	4
0	S_2	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$	1	0	57
60	X_2	0	1	$\frac{1}{24}$	$\frac{-1}{24}$	0	1	9
Z_J		80	60	$\frac{-25}{6}$	$\frac{25}{6}$	0	M	Z=860
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	$\frac{25}{6}$	$\left(M - \frac{25}{6}\right)$	0	$(M-1)$	

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \geq 0$ ومنه الجدول الثالث هو جدول حال أمثل، ونتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 4 ; X_2 = 9 ; S_2 = 57 ; S_1 = S_3 = 0 ; Z = 860$$

2, طريقة المرحلتين:

المرحلة الأولى: لدينا دالة الهدف

$$Min(z) = A_1 + A_2$$

جدول الحل الأساسي الأول:

T_1	C_J	0	0	0	1	0	1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	B	$\frac{B}{X1}$
1	A_1	18	12	−1	1	0	0	180	10
0	S_2	6	9	0	0	1	0	162	27
1	A_2	5	10	0	0	0	1	110	22
Z_J		23	22	−1	1	0	1	Z=290	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		−23	−22	1	0	0	0		

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_1) والخارجة من الأساس هي: (A_1)

T_2	C_J	0	0	0	1	0	1	B	$\frac{B}{X2}$
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2		
0	X_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{-1}{18}$	$\frac{1}{18}$	0	0	10	15
0	S_2	0	5	$\frac{1}{3}$	$\frac{-1}{3}$	1	0	102	$\frac{102}{5}$
1	A_2	0	$\frac{20}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{-5}{18}$	0	1	60	9
Z_J		0	$\frac{20}{3}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{-5}{18}$	0	1	Z=60	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	$-\frac{20}{3}$	$-\frac{5}{18}$	$\frac{23}{3}$	0	0		

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_2) والخارجة من الأساس هي: (A_2)

T_3	C_J	0	0	0	1	0	1	B
CB	XB	X_1	X_2	S_1	A_1	S_2	A_2	
0	X_1	1	0	$\frac{-1}{12}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{-1}{10}$	4
0	S_2	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{-1}{8}$	1	$-\frac{3}{4}$	57
0	X_2	0	1	$\frac{1}{24}$	$\frac{-1}{24}$	0	$\frac{3}{20}$	9
Z_J		0	0	0	0	0	0	Z=0
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0	1	0	1	

بما أن: $\Delta Z \geq 0$ و $Z = 0$ توجد مرحلة ثانية (يوجد حل أمثل).

المرحلة الثانية:

دالة الهدف تكتب بالشكل التالي:

$$Min(z) = 80x_1 + 60x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

ويكون جدول الحل الأساسي الأول في المرحلة الثانية كالآتي:

T_3	C_J	80	60	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B
80	X_1	1	0	$\frac{-1}{12}$	0	4
0	S_2	0	0	$\frac{1}{8}$	1	57
60	X_2	0	1	$\frac{1}{24}$	0	9
Z_J		80	60	$-\frac{25}{6}$	0	Z=860
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	$\frac{25}{6}$	0	

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \geq 0$ ومنه الجدول الثالث هو جدول حال أمثل، ونتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 4;\ X_2 = 9;\ S_2 = 57\ ;\ S_1 = S_3 = 0;\ Z = 860$$

التمرين الثاني: افترض أن لديك نموذج البرمجة التالي

<table>
<tr>
<td>

المطلوب:

1. أوجد الحل الأمثل بطريقة (M) الكبرى؛
2. أوجد الحل الأمثل بطريقة المرحلتين.

</td>
<td>

$$Max(z) = 2x_1 + 3x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \leq 24 \\ 5x_1 + 4x_2 \geq 20 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$
$$x_1; x_2 \geq 0$$

</td>
</tr>
</table>

حل التمرين الثاني:

1. طريقة (M) الكبرى:

أولاً: إيجاد الصيغة النموذجية:

القيد الأول: $4x_1 + 6x_2 + S_1 = 24$

القيد الثاني: $5x_1 + 4x_2 - S_2 + A_1 = 20$

القيد الثالث: $x_2 + A_2 = 2$

معادلة دالة الهدف:

$$Max(z) = 2x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2 - MA_1 - MA_2$$

ثانياً: إيجاد جدول الحل الأساسي الأول:

T_1	**C_J**	**2**	**3**	**0**	**0**	**−M**	**−M**		
CB	**XB**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**A_1**	**A_2**	**B**	$\frac{B}{X_2}$
0	**S_1**	4	6	1	0	0	0	24	4
−M	**A_1**	5	4	0	−1	1	0	20	5
−M	**A_2**	0	1	0	0	0	1	2	2
Z_J		−5M	−5M	0	M	−M	−M		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		**2+5M**	**3+5M**	**0**	**−M**	**0**	**0**	**Z=−22M**	

نختبر أمثلية الحل من خلال صف (ΔZ) في جدول الحل الأولي حيث نلاحظ وجود قيم موجبة وهذا يعني عدم تحقق الحل الأمثل، حيث أن الوصول إلى الحل الأمثل في مشاكل التعظيم مشروط بأن تكون جميع $(\Delta Z \leq 0)$، نبحث عن حل أفضل من خلال تحديد المتغير الذي سوف يدخل إلى الحل الأساسي، وتحديد المتغير الذي سيغادر الحل الأساسي، العمود الأمثل الذي يعطي المتغير الذي سيدخل إلى الحل فهو المقابل لأكبر قيمة موجبة في (ΔZ) وفي هذه الحالة المتغير (X_2) هو الذي يدخل إلى الأساس، ينبغي أن نحدد المتغير الذي سيغادر الحل سنقسم الكمية الموجودة في عمود (B) على القيمة المقابلة له في عمود الإرتكاز، وعليه نختار أقل نسبة موجب وهي (2) وبذلك فإن (A_2) هو المتغير الخارج من الحل الأساسي وصفه وهو الصف الإرتكاز، وأن الرقم (1) هو العنصر الإرتكاز.

وهكذا يمكن إعداد الجدول الثاني:

T_2	**C_J**	**2**	**3**	**0**	**0**	**−M**	**−M**		
CB	**XB**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**A_1**	**A_2**	**B**	$\frac{B}{X1}$
0	**S_1**	4	0	1	0	0	−6	12	3
−M	**A_1**	5	0	0	−1	1	−4	12	$\frac{12}{5}$
3	**X_2**	0	1	0	0	0	1	2	−
Z_J		−5M	3	0	M	−M	4M+3		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		2+5M	0	0	−M	0	−5M−3	**Z=−12M+6**	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_1) والخارجة من الأساس هي: (A_1)

T_3	C_J	2	3	0	0	−M	−M		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X1}$
0	S_1	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{-14}{5}$	$\frac{12}{5}$	3
2	X_1	1	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{12}{5}$	−
3	X_2	0	1	0	0	0	1	2	−
Z_J		2	3	0	$\frac{-2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{7}{5}$		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0	$\frac{2}{5}$	$-M-\frac{2}{5}$	$-M-\frac{7}{5}$	$z = \frac{54}{5}$	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (S_2) والخارجة من الأساس هي: (S_1)

T_4	C_J	2	3	0	0	−M	−M	
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	B
0	S_2	0	0	$\frac{4}{5}$	1	−1	$\frac{-7}{2}$	3
2	X_1	1	0	$\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{-3}{2}$	3
3	X_2	0	1	0	0	0	1	2
Z_J		2	3	$\frac{1}{2}$	0	0	0	$z = 12$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	$-\frac{1}{2}$	0	−M	−M	

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \leq 0$ ومنه الجدول الرابع هو جدول حال أمثل، ونتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 3; X_2 = 2; S_1 = 0; S_2 = 3; Z = 12$$

2. طريقة المرحلتين:

المرحلة الأولى: لدينا دالة الهدف

$$Max(z) = -A_1 - A_2$$

الجدول الحل الأساسي الأول:

T_1	C_J	0	0	0	0	−1	−1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X_2}$
0	S_1	4	6	1	0	0	0	24	4
−1	A_1	5	4	0	−1	1	0	20	5
−1	A_2	0	1	0	0	0	1	2	2
Z_J		−5	−5	0	1	−1	−1		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		5	5	0	−1	0	0	Z=−22	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_2) والخارجة من الأساس هي: (A_2)

T_2	C_J	0	0	0	0	−1	−1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X1}$
0	S_1	4	0	1	0	0	−6	12	3
−1	A_1	5	0	0	−1	1	−4	12	$\frac{12}{5}$
0	X_2	0	1	0	0	0	1	2	−
Z_J		−5	0	0	1	−1	4		
$\Delta Z = C_J - Z_J$		5	0	0	−1	0	−5	Z=−12	

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (X_1) والخارجة من الأساس هي: (A_1)

T_3	C_J	0	0	0	0	−1	−1		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	A_1	A_2	B	$\frac{B}{X1}$
0	S_1	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{-14}{5}$	$\frac{12}{5}$	3
0	X_1	1	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{-4}{5}$	$\frac{12}{5}$	−
0	X_2	0	1	0	0	0	1	2	−
Z_J		0	0	0	0	0	0	$z = 0$	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0	0	−1	−1		

بما أن: $\Delta Z \leq 0$ و $Z = 0$ توجد مرحلة ثانية (يوجد حل أمثل).

المرحلة الثانية: دالة الهدف تكتب بالشكل التالي

$$Max(z) = 2x_1 + 3x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

ويكون جدول الحل الأساسي الأول في المرحلة الثانية كالآتي:

T_1	C_J	2	3	0	0		
CB	XB	X_1	X_2	S_1	S_2	B	$\frac{B}{X1}$
0	S_1	0	0	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{12}{5}$	3
2	X_1	1	0	0	$\frac{-1}{5}$	$\frac{12}{5}$	−
3	X_2	0	1	0	0	2	−
Z_J		2	3	0	$\frac{-2}{5}$	$z = \frac{54}{5}$	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	0	$\frac{2}{5}$		

المتغيرة الداخلة للأساس هي: (S_2) والخارجة من الأساس هي: (S_1)

T_2	C_J	2	3	0	0	
CB	**XB**	X_1	X_2	S_1	S_2	**B**
0	S_1	0	0	$\frac{4}{5}$	1	3
2	X_1	1	0	$\frac{1}{4}$	0	3
3	X_2	0	1	0	0	2
Z_J		2	3	$\frac{1}{2}$	0	$z = 12$
$\Delta Z = C_J - Z_J$		0	0	$-\frac{1}{2}$	0	

نلاحظ من خلال الجدول الأخير أن: $\Delta Z \leq 0$ ومنه الجدول الثاني من المرحلة الثانية هو جدول حال أمثل، ونتائج هي كالآتي:

$$X_1 = 3;\ X_2 = 2;\ S_1 = 0;\ S_2 = 3;\ Z = 12$$

IV– تمارين مقترحة:

التمرين الأول: أوجد الصيغة النموذجية وجدول الحل الأساسي الأول للبرامج التالية

$1.Max(z) = 20x_1 + 15x_2$ s/c $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \geq 14 \\ 8x_1 + 16x_2 \leq 16 \\ 2x_1 + 5x_2 \geq 10 \end{cases}$ $x_1; x_2 \geq 0$	$2.Min(z) = x_1 - x_2 - 3x_3$ s/c $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 \geq -2 \\ 3x_1 + x_3 = 2 \end{cases}$ $x_1; x_2; x_3 \geq 0$

التمرين الثاني: أوجد الحل الأمثل للمسائل التالية بالطريقة المبسطة (Méthode Simplexe)

$2.Max(z) = 16x_1 + 15x_2$ s/c $\begin{cases} 40x_1 + 31x_2 \leq 124 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_1 \leq 3 \end{cases}$ $x_1; x_2 \geq 0$	$1.Max(z) = 100x_1 + 60x_2$ s/c $\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 \leq 40 \\ 6x_1 + 9x_2 \leq 108 \\ 8x_1 + 6x_2 \leq 96 \end{cases}$ $x_1; x_2 \geq 0$

4.بين أن منطقة الحل للنموذج التالي غير محدودة: $$Max(z)=3x_1+x_2$$ $$s/c$$ $$\begin{cases} x_1+x_2\le 2 \\ x_1\le 3 \end{cases}$$ $$x_1;x_2\ge 0$$	$$3.Max(z)=200x_1+370x_2$$ $$s/c$$ $$\begin{cases} x_1+2x_2\le 300 \\ x_1+x_2\le 190 \\ x_1\le 110 \\ x_2\le 130 \end{cases}$$ $$x_1;x_2\ge 0$$

التمرين الثالث: أوجد الحل الأمثل للمسائل التالية:

1. بطريقة M الكبرى ***BIG (M)***: $$Min(z)=10x_1+30x_2$$ $$s/c$$ $$\begin{cases} 3x_1+2x_2\le 6 \\ 6x_1+x_2\ge 6 \\ x_2\ge 2 \end{cases}$$ $$x_1;x_2\ge 0$$	2. بطريقة M الكبرى و **طريقة المرحلتين**: $$Min(z)=4x_1+x_2$$ $$s/c$$ $$\begin{cases} x_1+2x_2\le 4 \\ 3x_1+x_2=3 \\ 4x_1+3x_2\ge 6 \end{cases}$$ $$x_1;x_2\ge 0$$

التمرين الرابع: بين أن النموذج التالي لا يحتوي على حل أمثل بإستخدام طريقة المرحلتين:

$$Max(z)=3x_1+2x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 5x_1+4x_2\le 20 \\ 7x_1+10x_2\ge 70 \\ 8x_1+5x_2\ge 40 \end{cases}$$
$$x_1;x_2\ge 0$$

لكل مشكلة برمجة خطية هناك مشكلة أخرى مرتبطة بها، نسمي إحدى هاتين المشكلتين بالمشكلة الأولية (Primal Model)، والأخرى نسميها النموذج المقابل (Dual Model) وتمتلك كلتا المشكلتين خواص مرتبطة مع الخواص الأخرى، فمثلاً الحل الأمثل لإحدى هاتين المشكلتين يعطي معلومات كاملة عن الحل الأمثل للأخرى.

أي أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية هناك نموذج مقابل ومشتق منه، فإذا كان النموذج الأولى يتعلق بتعظيم دالة الهدف فإن النموذج المقابل له سيكون تدنئة دالة الهدف وتصاغ عادة من نفس البيانات التي يتضمنها النموذج الأول والعكس بالعكس.

إن اللجوء إلى استخدام النموذج المقابل يتضمن فوائد متعددة منها سهولة التوصل إلى تحقيق الحل الأمثل لمشاكل البرمجة الخطية وسرعته عندما يصعب حل النموذج الأولي، لذلك سيتم التطرق في هذا الفصل إلى بعض القواعد الرياضية لتحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل وبالعكس، كذلك صياغة وإيجاد الحل للمشكلة المقابلة والتي نلاحظ بأن طريقة الحل لا تختلف كثيراً عن الحل بأسلوب الطريقة البسيطة للنموذج الأولي.

I- مميزات النموذج المقابل (الثنائي):

من مميزات النموذج المقابل الآتي:

- ✓ يساعد النموذج المقابل على التوصل إلى الحل بصورة أسرع في بعض الأحيان وذلك بتقليص خطوات الحل، أي أن طريقة حل المشكلة المقابلة تستلزم خطوات رياضية اقل تعقيد من الخطوات اللازمة لحل المشكلة الأولية أحياناً[1]؛
- ✓ للتخلص من الإشارة السالبة في الجانب الأيمن (أن وجدت) أي عندما تكون المصادر ذات كميات سالبة وهو أهم ما يمكن الحصول عليه في حالة التحويل إلى النموذج الثنائي[2]؛
- ✓ لغرض التعرف على ابعاد المشكلة الأخرى (المشكلة الثنائية، البديلة) فإذا كان النموذج الأولي (Primal) وبصيغة الـ (Max) أي المشكلة بالصيغة الربحية، فبإمكاننا التعرف على النموذج الثنائي ويكون بصيغة الـ (Min) وتمثيله للجانب الكلفوي (في نفس المشكلة)، ولنفس المشكلة المعبر عنها أولا بالصيغة الأولية.

[1]. دلال صادق الجواد ، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق، ص 100 .

[2]. حامد سعد نور الشمرتي ، مرجع سابق. ص 76 .

- ✓ يعطي النموذج الثنائي (المقابل) كثير من الحقائق الإقتصادية التي تساعد على تفهم أبعاد المشكلة وبخاصة فيما يتعلق بأسعار الظل؛
- ✓ يعيد النموذج الثنائي اثر التغيرات في معاملات دالة الهدف وثوابت الطرف الأيمن ومعرفة المجال الذي تتحقق فيه نتائج الحل الأمثل؛
- ✓ بالإمكان إضافة قيود جديدة للمشكلة وإيجاد حل أمثل لها وفقاً للقيود المضافة، ومنها نستنتج أن لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية نموذجاً مقابلاً، كما لكل نموذج من نماذج البرمجة الخطية نموذجاً أولياً[1].

II – خطوات تحويل النموذج الأولي (Primal) إلى النموذج المقابل أو الثنائي (Dual):

لغرض تحويل النموذج الأولي إلى النموذج المقابل وبالعكس يمكن ذلك باتباع الخطوات الآتية[2]:

- ✓ نعكس صيغة دالة الهدف، فإذا كانت دالة الهدف في النموذج الأولي بصيغة تدنئة فإننا نعكسها ونجعلها للنموذج المقابل بصيغة تعظيم والعكس بالعكس؛
- ✓ استبدال المتغيرات المشار إليها بالرمز (X) في النموذج الأولي إلى متغيرات مشار لها بالرمز (Y) في النموذج المقابل وتحويل رمز دالة الهدف من (Z) في النموذج الأولي إلى (W) في النموذج المقابل؛
- ✓ جعل القيم التي تقع في الجهة اليمنى من قيود النموذج الأولي (ثوابت القيود) معاملات للمتغيرات الجديدة في دالة هدف النموذج المقابل؛
- ✓ جعل معاملات متغيرات دالة هدف النموذج الأولي، الطرف الأيمن للقيود الجديدة للنموذج المقابل؛
- ✓ تحويل مصفوفة المعاملات للمتغيرات في القيود النموذج الأولي بحيث تصبح الصفوف أعمدة و الأعمدة صفوف (إيجاد منقول مصفوفة معاملات المتغيرات)؛
- ✓ إضافة شرط عدم السلبية على المتغيرات الجديدة؛
- ✓ تغير إشارة القيود من ($\leq$) إلى ($\geq$) أو العكس.

[1]. سهيلة عبد الله سعيد، مرجع سابق، ص 110.

[2]. فتحي خليل حمدان، رشيق رفيق مرعي، مرجع سابق، ص 79.

ملاحظة[1]:

1. إذا كان عدد متغيرات النموذج الأولي تساوي (N) وعدد القيود (M) فإن عدد متغيرات النموذج المقابل تساوي (M) وعدد القيود (N)؛
2. عند التحويل من النموذج الأولي إلى نموذج مقابل يجب مراعاة ما يلي:

- إذا كانت دالة الهدف (Max) فيجب أن تكون القيود كلها أقل من أو يساوي (≤)؛
- إذا كانت دالة الهدف (Min) فيجب أن تكون القيود كلها أكبر من أو يساوي (≥)؛
- إذا لم تتحقق هذه الشروط فيجب تحقيقها في الأمثلة.

III- صياغة المشكلة المقابلة (الثنائية):

هناك صيغتين للبرامج الخطية، الصيغة القانونية والصيغة المختلطة سوف نحاول توضيح كيفية أيجاد الصيغة المقابلة لكل منهما.

1-III – ثنائية الصيغ القانونية: إذا كان البرنامج الأولي بالشكل المصفوفي في صيغته القانونية التالية[2]:

$$\begin{aligned}&Max(z) = C'X\\&s/c\\&\{AX \le B\\&X \ge 0\end{aligned}$$

فإن برنامجه الثنائي يكتب كما يلي:

$$\begin{aligned}&Min(w) = B'Y\\&s/c\\&\{A'Y \ge C\\&Y \ge 0\end{aligned}$$

[1]. فتحي خليل حمدان، مرجع سابق، ص 130

[2]. راتول محمد، مرجع سابق، ص81.

مثال رقم (01): أوجد النموذج المقابل لمشكلة البرمجة الخطية الآتية:

النموذج الأولي (Primal):	النموذج الثنائي (Dual):
$Max(z) = 5x_1 + 6x_2$ s/c $\begin{cases} x_1 + 9x_2 \le 60 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 45 \\ 5x_1 - 2x_2 \le 20 \\ x_2 \le 30 \end{cases}$ $x_1 ; x_2 \ge 0$	$Min(W) = 60y_1 + 45y_2 + 20y_3 + 30y_4$ s/c $\begin{cases} y_1 + 2y_2 + 5y_3 \ge 5 \\ 9y_1 + 3y_2 - 2y_3 + y_4 \ge 6 \end{cases}$ $y_1 ; y_2 ; y_3 ; y_4 \ge 0$

يلاحظ أن مصفوفة أمثال القيود في المشكلة الأولية هي منقول مصفوفة أمثال القيود النموذج المقابل، ويلاحظ في هذا المثال، أن عدد القيود في النموذج المقابل أقل منها في المشكلة الأولية. بما أن الحل الأمثل لإحدى المشكلتين يمكن الحصول عليه من الحل الأمثل للمشكلة الأخرى، فإنه سيكون من الأسهل حل النموذج المقابل في هذه الحالة، وذلك لأن الصعوبات الحسابية في حل مشكلة البرمجة الخطية التي تأتي من كثرة القيود أكثر من تلك التي تأتي من كثرة المتغيرات، وهذا يعطي إحدى فوائد دراسة المشاكل المقابلة.

مثال رقم (02): حول نموذج البرمجة الخطية لآتي إلى النموذج الثنائي (المقابل):

النموذج الأولي (Primal):	النموذج الثنائي (Dual):
$Min(z) = 5x_1 + 2x_2 + x_3$ s/c $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 \ge 20 \\ 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 \ge 30 \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 40 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \ge 50 \end{cases}$ $x_1 ; x_2 ; x_3 \ge 0$	$Max(W) = 20y_1 + 30y_2 + 40y_3 + 50y_4$ s/c $\begin{cases} 2y_1 + 6y_2 + 7y_3 + y_4 \le 5 \\ 3y_1 + 8y_2 + y_3 + 2y_4 \le 2 \\ y_1 + y_2 + 3y_3 + 4y_4 \ge 6 \end{cases}$ $y_1 ; y_2 ; y_3 ; y_4 \ge 0$

2-III - ثنائية الصيغ المختلطة: وهي الصيغة تكون فيها المتراجحات $(\geq ; \leq)$ وتوجد معادلة بصيغة مساواة وكل منها معاملة خاصة كالآتي[1]:

في حالة وجود قيد بإشارة يساوي (=) في النموذج الأولي، يتم تحويل هذا القيد إلى قيدين بإشارتين مختلفتين أحدهما بإشارة أقل من أو يساوي، والآخر بإشارة أكبر من أو يساوي، وفي حال كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تعظيم (Max) نقوم بتحويل القيد الذي إشارته أكبر من أو يساوي إلى القيد أقل من أو يساوي عن طريق ضرب القيد الأكبر أو يساوي في (-1)، وفي حال كانت دالة الهدف في النموذج الأولي تخفيض (Min) نقوم بتحويل القيد الذي إشارته أقل من أو يساوي إلى قيد إشارته أكبر من أو يساوي عن طريق ضرب القيد الأقل أو يساوي في (-1)، وعلى أية حال يجب أن تكون إشارات قيود النموذج الأولي متماثلة قبل تحويله إلى النموذج المقابل.

مثال رقم (03): حول النموذج الأولي (Primal) الآتي إلى النموذج المقابل (Dual):

$$Max(z) = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 18 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 20 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 9 \end{cases}$$
$$x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0$$

الحل: نحول القيد الثالث إلى الشكل أقل من أو يساوي ويتم ذلك بضرب القيد الثالث بـ (-1). فيصبح القيد:

$$x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 9 \Rightarrow (-1) \times (x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 9)$$
$$-x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \leq -9$$

[1]. جهاد صياح بني هاني، نازم محمود الملكاوي، فالح عبد القادر الحوري، مرجع سابق، ص 131.

ويكون النموذج بشكله النهائي كالآتي:

$$Max(z) = x_1 + x_2 - x_3 - x_4$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 \leq 18 \\ 5x_1 + 6x_2 \leq 20 \\ -x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 \leq -9 \end{cases}$$
$$x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0$$

وسيكون النموذج المقابل كما يلي:

$$Min(W) = 18y_1 + 20y_2 - 9y_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} 3y_1 + 5y_2 - y_3 \geq 1 \\ -2y_1 + y_3 \geq 1 \\ y_1 + 6y_2 - 4y_3 \geq -1 \\ 5y_1 - y_3 \geq -1 \end{cases}$$
$$y_1; y_2; y_3 \geq 0$$

مثال رقم (04): حول النموذج الأولي (Primal) الآتي إلى النموذج المقابل (Dual):

$$Max(z) = 2x_1 - x_2$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 7 \\ x_1 - x_2 = 3 \end{cases}$$
$$x_1; x_2 \geq 0$$

الحل: لمعالجة القيود عندما تكون في حالة المساواة، يجب أولاً تعبير عن كل قيد مساواة بقيدين أحدهما أكبر أو يساوي والأخر أقل أو يساوي، وبعد ذلك تعديل جميع القيود أن تكون من نوع واحد أي أقل من أو يساوي ليتلاءم مع دالة الهدف تعظيم وذلك بضرب بـ (-1).

المرحلة الثانية:	المرحلة الأولى:
$Max(z)=2x_1-x_2$ s/c $\begin{cases} x_1+3x_2\leq 7 \\ -x_1-3x_2\leq -7 \\ x_1-x_2\leq 3 \\ -x_1+x_2\leq -3 \end{cases}$ $x_1;x_2\geq 0$	$Max(z)=2x_1-x_2$ s/c $\begin{cases} x_1+3x_2\leq 7 \\ x_1+3x_2\geq 7 \\ x_1-x_2\leq 3 \\ x_1-x_2\geq 3 \end{cases}$ $x_1;x_2\geq 0$

ومن البرنامج المقابل كما يلي:

$$Min(W)=7y_1-7y_2+3y_3-3y_4$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} y_1-y_2+y_3-y_4\geq 2 \\ 3y_1-3y_2-y_3+y_4\geq -1 \end{cases}$$
$$y_1;y_2;y_3;y_4\geq 0$$

IV- العلاقة بين حل النموذجين الأولي والثنائي[1]:

- القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة والتي تظهر في السطر الأخير تساوي قيم المتغيرات الرئيسية على وجه الترتيب للبرنامج الثنائي وبالقيمة المطلقة؛
- وقيم متغيرات الفجوة في البرنامج الثنائي التي تظهر في السطر الأخير تساوي على وجه الترتيب قيم المتغيرات الرئيسية في البرنامج الأولي؛
- قيم المتغيرات الحقيقية في البرنامج الأولي والتي تظهر في عمود الثوابت، تساوي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للبرنامج الثنائي والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل، وقيم المتغيرات الحقيقية للبرنامج الثنائي والتي تظهر في عمود الثوابت، تساوي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للبرنامج الأولي والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل (بالقيمة المطلقة)؛
- قيمة الدالة الإقتصادية في الحل الأمثل للبرنامجين تكون متساوية، وفي كلا الحالتين تأخذ قيمتها المطلقة.

[1]. راتول محمد، مرجع سابق، ص ص: 83-84 .

مثال رقم (05): من البرنامج الخطي التالي

$$
\begin{aligned}
&Max(z)=12x_1+48x_2\\
&s/c\\
&\begin{cases} x_1+2x_2\le 10\\ 3x_1+3x_2\le 24\\ -4x_1\le -8\end{cases}\\
&x_1;x_2\ge 0
\end{aligned}
$$

المطلوب:

1. أوجد البرنامج الثنائي للبرنامج الأولي؛
2. أوجد الحل الأمثل للبرنامج الأولي ثم البرنامج الثنائي، ثم قارن نتائج الحل في البرنامجين، وماذا تستنتج؟

الحل:

1. البرنامج المقابل يكتب كما يلي:

$$
\begin{aligned}
&Min(W)=10y_1+24y_2-8y_3\\
&s/c\\
&\begin{cases} y_1+3y_2-4y_3\ge 12\\ 2y_1+3y_2\ge 48\end{cases}\\
&y_1;y_2;y_3\ge 0
\end{aligned}
$$

2. وعند حل النموذجين (الأول والثاني) أعلاه وبطريقة السمبليكس، سوف نبين الجداول النهائية، أي جداول الحل الأمثل للنموذجيين وبيان العلاقة بين الحلين في قيم المتغيرات الأولية والبديلة الثنائية.

- جدول الحل الأمثل للبرنامج الأولي:

XB	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	B
X_2	0	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{8}$	4
S_2	0	0	$\frac{-3}{2}$	1	$\frac{3}{8}$	6
X_1	1	0	0	0	$\frac{-1}{4}$	2
$\Delta Z=C_J-Z_J$	0	0	24	0	3	$Z=216$

$w=216$

$S_1=0\,;\ S_2=0$

$y_1=24\,;\ y_2=0\,;\ y_3=3$

- جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي:

YB	Y_1	Y_2	Y_3	S_1	S_2	B
Y_1	1	$\frac{3}{2}$	0	0	$\frac{-1}{2}$	24
Y_3	0	$\frac{-3}{8}$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{-1}{8}$	3
$\Delta W = C_J - Z_J$	0	−6	0	−2	−4	$W = 216$

$Z = 216$

$S_1 = 0\,;\ S_2 = 6\,;S_3 = 0$

$X_1 = 2\,;\ X_2 = 4$

- المقارنة والاستنتاج: من جدول الحل الأمثل لبرنامج الحل الأولي وجدنا:

$X_1=2$ وهي قيمة تقابل S_1 بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؛

$X_2=4$ وهي قيمة تقابل S_2 بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؛

$S_2=6$ وهي قيمة تقابل Y_2 بالقيمة المطلقة في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي؛ بقية المتغيرات معدومة.

وإذا ما نظرنا على مستوى السطر الأخير للبرنامج الأولي، فإننا نجد أن:

S_1 تقابلها القيمة 24، وهي قيمة Y_1 في البرنامج الثنائي؛

S_3 تقابلها القيمة 3، وهي قيمة Y_3 في البرنامج الثنائي؛ بقية المتغيرات معدومة.

كما أن قيمة الدالة الإقتصادية متساوية في جدول الحل الأمثل للبرنامجين أي W=Z=216.

النتيجة:

هي أن جدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن أيضا الحل الأمثل للبرنامج الثنائي، وجدول الحل الأمثل للبرنامج الثنائي يتضمن أيضا الحل الأمثل للبرنامج الأولي.

V- التفسير الاقتصادي العلمي للنموذج الثنائي:

سنورد في هذه الفقرة ما ينطوي عليه النموذج المقابل، أي معنى ما تذهب إليه تغيير القيود وجعل المصادر في الجانب الايمن هم معاملات لمتغيرات دالة الهدف وتفسير تخصيص لكل قيد متغير بديل في النموذج الثنائي عن طريق سرد المثال الأتي[1]:

مثال رقم (06):

تنتج إحدى الشركات نوعين من المنتجات X_1 و X_2 باستخدام ثلاثة عناصر إنتاجية هي: المواد الأولية والطاقة والعمل، فإذا كان المتاح من هذه الموارد هو 8 ، 10 ، 12 وحدة على الترتيب، ويوضح الجدول الآتي ما تحتاجه الوحدة الواحدة من كل من X_1 و X_2 من هذه الموارد وربح كل منها.

المطلوب :

1. شكل المسألة في نموذج خطي؛
2. أكتب الشكل الثنائي للبرنامج الخطي؛
3. فسر اقتصاديا النموذج الثنائي (دالة الهدف، والقيود).

المنتج / عناصر الإنتاج	المنتجات X_1	X_2	الموارد المتاحة
مواد أولية	1	2	8
طاقة	3	1	10
عمل	4	3	12
ربح الوحدة الواحدة	2	3	

الحل:

1. يكون نموذج البرمجة الخطية الخاص بالمثال والجدول السابق كما يلي:

$$Max(z) = 2x_1 + 3x_2$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 & \text{قيد المواد الأولية} \\ 3x_1 + x_2 \le 10 & \text{قيد الطاقة} \\ 4x_1 + 3x_2 \le 12 & \text{قيد العمل} \end{cases}$$

$$x_1 ; x_2 \ge 0$$

هذا النموذج (الأولي) يعطينا :

- ✓ قيم X_1 و X_2 ، قيمة Z المثلى التي تجعل الربح أكبر ما يمكن والوحدات غير المستغلة من المواد S_1 ، S_2 و S_3 ؛
- ✓ لكن هذا النموذج لا يحدد لنا الأتي: كلفة الوحدة الواحدة من X_1 و X_2 ، الكلفة الكلية للإنتاج، لذلك سوف نلجأ إلى استخراج النموذج المقابل (الثنائي).

---

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 87.

2. نفرض:

y_1 : سعر الوحدة الواحدة من المواد الأولية؛

y_2: سعر الوحدة الواحدة من الطاقة؛

y_3: سعر الوحدة الواحدة من العمل؛

ويكون النموذج المقابل (الثنائي) كما يلي:

$$Min(W) = 8y_1 + 10y_2 + 12y_3$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 + 4y_3 \geq 2 \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 3 \end{cases}$$
$$y_1; y_2; y_3 \geq 0$$

3. ويمكن التفسير لحدود دالة الهدف كما يلي:

$8y_1$: كلفة المواد الأولية (أي حاصل ضرب سعر الوحدة الواحدة من المواد الأولية في كمية المواد الأولية المتوفرة)؛

$10y_2$: كلفة الطاقة (أي حاصل ضرب سعر الوحدة الواحدة من الطاقة في كمية المتوفرة من الطاقة)؛

$12y_3$: كلفة العمل (أي حاصل ضرب سعر الوحدة الواحدة من العمل في كمية العمالة المتوفرة)؛

والمجموع لهذه الحدود الثلاثة يمثل الكلفة الكلية ولهذا نسعى إلى تحقيق اقل كلفة للعملية الإنتاجية (دالة الهدف للنموذج المقابل من نوع تدنئة Min).

أما التفسير الإقتصادي لقيود النموذج الثنائي المقابل:

القيد الأول:

y_1: تمثل كلفة المواد الأولية اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج x_1 ؛

$3y_2$: تمثل كلفة الطاقة اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج x_1 ؛

$4y_3$: تمثل كلفة العمل اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج x_1 ؛

والمجموع لهذه الحدود الثلاثة يمثل الكلفة الكلية اللازمة لتصنيع وحدة واحدة من المنتوج x_1 ، القيد الأول هو كلفة إنتاج وحدة واحدة من x_1 ، وأن الكلفة الكلية لتصنيع وحدة واحدة من x_1 يجب أن تساوي أو بالحد الأدنى لربح الوحدة الواحدة من المنتوج x_1 ومقداره (2).

القيد الثاني:

$2y_1$: تمثل كلفة المواد الأولية اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج x_2 ؛

y_2: تمثل كلفة الطاقة اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج x_2 ؛

$3y_3$: تمثل كلفة العمل اللازمة لتصنيع الوحدة الواحدة من المنتوج x_2 ؛

والمجموع لهذه الحدود الثلاثة يمثل الكلفة الكلية اللازمة لتصنيع وحدة واحدة من المنتوج x_2 ، القيد الثاني هو كلفة إنتاج وحدة واحدة من x_2 ، وأن الكلفة الكلية لتصنيع وحدة واحدة من x_2 يجب أن تساوي أو بالحد الأدنى لربح الوحدة الواحدة من المنتوج x_2 ومقداره (3).

VI- طريقة السمبليكس المقابلة (الثنائية) Dual du Simplexe :

إحدى الفرضيات الأساسية لحل النموذج الأولي بواسطة طريقة السمبليكس هي إن الموارد (قيم الجانب الأيمن للقيود) يجب إن تكون أكبر من الصفر، حل النموذج المقابل بواسطة طريقة السمبليكس يساعد على التخلص من هذا الشرط حيث إن قيمة الموارد ممكن إن تكون سالبة وعلى هذا الأساس فلا حاجة لإدخال المتغيرات الاصطناعية إلى النموذج[1] .

كما توجد حالة أخرى وهو إثناء الحل بطريقة السمبليكس الاعتيادية وعند الانتقال من جدول سمبليكس إلى آخر يظهر في الجانب الأيمن الإشارة السالبة لبعض قيم المتغيرات أو جميعها، فالعلاج ما ورد في الحالتين أعلاه والحصول على الحل الأمثل وبشكل أكيد يجب إتباع طريقة السمبليكس المقابلة لتجاوز ما يظهر من عقبات مماثلة تمنع ظهور الحل الأمثل[2].

ولتوضيح ذلك نورد المثال التالي وفي كل مرحلة سيتم توضيح خطوات تطبيق طريقة السمبيلكس المقابلة.

مثال رقم (07): أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الأتي مستعيناً بطريقة السمبليكس المقابلة (dual du simplexe) :

$$Min(Z) = x_1 + 4x_2 + 3x_4$$
$$s/c$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 \geq 3 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 \geq 2 \end{cases}$$
$$x_1; x_2; x_3; x_4 \geq 0$$

الحل:

ولضمان عدم استخدام المتغيرات الاصطناعية من إيجاد الصيغة النموذجية للنموذج، فيتم عكس القيود من أكبر أو تساوي إلى أقل أو تساوي (بضرب القيدين في (-1)) فتصبح القيود في النموذج كما يأتي:

الصيغة النموذجية :

[1]. علي خليل الزبيدي، حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق ، ص 96.

[2]. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 95.

$$- x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + S_1 = -3$$
$$2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 + S_2 = -2$$
$$Min\ (z) = x_1 + 4x_2 + 3x_4 + 0S_1 + 0S_2$$

وبالنظر إلى النموذج (كميات الجانب الأيمن سالبة) بالإمكان القول إن هذا النموذج يتمتع بحل غير ممكن، وفي هذه حالة استخدام طريقة السمبليكس الاعتيادية سوف نحصل على ما يسمى أمثل ولكن غير ممكن.

T_1	C_J	1	4	0	3	0	0	
CB	XB	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	B
0	S_1	−1	−2	1	−1	1	0	−3
0	S_2	2	1	−4	−1	0	1	−2
Z_J		0	0	0	0	0	0	
$\Delta Z = C_J - Z_J$		1	4	0	3	0	0	Z=0

بما أن : $\Delta Z \geq 0$ وهذا ما يدل أن الحل أمثل، وبما أن الجانب الأيمن سالب كميات سالبة ولذلك يكون الحل أمثل ولكن غير ممكن ولذلك يجب إتباع طريقة السمبليكس المقابلة وتكون خطواتها كالأتي:[1]

1. **إختيار المتغير الخارج:** وهنا يتم اختيار المتغير الأساسي والذي يملك أقل قيمة سالبة:

$$Min\ \{-3;-2\}$$

وفي مثالنا يكون المتغير $S_1=-3$ هو المتغير الخارج ويجب أن يغادر الحل.

2.تحديد المتغيرة الداخلة:

ولتحديد المتغير الداخل نختار من المتغيرات غير الأساسية :

حالة التدنئة (Min):

$$Min \left\{ \frac{-(C_J - Z_J)}{\mu_K} ; \mu_K < 0 \right\}$$

حالة التعظيم (Max):

$$Min \left\{ \frac{(C_J - Z_J)}{\mu_K} ; \mu_K < 0 \right\}$$

μ_K : هي قيم السالبة في صف المتغير الخارج.

[1] - Gérald Baillargeon ,op-cit , P 224 .

ومن مثالنا:

$$Min\left\{\frac{-1}{-1};\frac{-4}{-2};\frac{-3}{-1}\right\}=Min\ \{1;2;3\}$$

ومنه أقل نسبة تقابل المتغير غير الأساسي لـ x_1 ، إذن x_1 يحل محل S_1 بعد ذلك سوف نباشر بالعمليات الحسابية لاستخراج الجدول اللاحق للسمبليكس بطريقة الاعتيادية:

T_2	C_J	1	4	0	3	0	0	
CB	**XB**	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	**B**
1	X_1	1	2	−1	1	−1	0	3
0	S_2	0	−3	−2	−3	2	1	−8
Z_J		0	0	0	0	0	0	
$\Delta Z=C_J-Z_J$		1	4	0	3	0	0	**Z=0**

لازال الجدول الثاني يتمتع بالحل الغير ممكن بالنسبة للنموذج الأولي المتغير الأساس $S_2=-8$ يملك قيمة سالبة وهو المتغير الخارج ولتحديد أي من المتغيرات غير الأساسية التي سوف تدخل والتي تحمل معاملات سالبة في صف S_2 ، ويتحدد من خلال النسبة:

$$Min\left\{\frac{-2}{-3};\frac{-1}{-2};\frac{-2}{-3}\right\}=Min\left\{\frac{2}{3};\frac{1}{2};\frac{2}{3}\right\}$$

النسبة الأقل هي تقابل x_3 ، إذن المتغير x_3 هو الذي يدخل محل S_2 المتغير الخارج، والجدول الثالث يكون على النحو الأتي:

T_3	C_J	1	4	0	3	0	0	
CB	**XB**	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	**B**
1	X_1	1	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	−2	$\frac{-1}{2}$	7
0	X_3	0	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	−1	$\frac{-1}{2}$	4
Z_J		1	$\frac{7}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	−2	$\frac{-1}{2}$	
$\Delta Z=C_J-Z_J$		0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	**Z=7**

بما أن قيم صف $b>0;\Delta Z\geq 0$ إذن الجدول الثالث هو جدول حل أمثل ونتائج هي:

$$X_1=7;X_2=0;X_3=4;X_4=0;S_1=S_2=0;Z=7$$

VII- طريقة السمبليكس المعدلة (المحورة):

من خلال الحل بطريقة السمبليكس نلاحظ أن الحسابات التي تم إجراؤها كانت على جميع القيم ولكل جدول من الجداول خلال الحل، وإذا كانت مشكلة البرمجة الخطية تتضمن عدد كبير من المتغيرات والقيود فإن حلها تتطلب حسابات كثيرة ووقت لإجراءها[1].

مثال رقم (08): أوجد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية الأتي مستخداما طريقة السمبيلكس المعدلة.

$$Min(z) = -3x_1 + x_2 + x_3$$

$$s/c$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \le 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 3 \\ 2x_1 - x_3 = -1 \end{cases}$$

$$x_1; x_2; x_3 \ge 0$$

1. الصيغة النموذجية :

نضرب القيد الثالث في (-1) نجد:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + S_1 = 11$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - S_2 + A_1 = 3$$

$$-2x_1 + x_3 + A_2 = 1$$

$$Min(z) = -3x_1 + x_2 + x_3 + 0S_1 + 0S_2 + MA_1 + MA_2$$

2. نضع معاملات للمتغيرات داخل القيود على شكل أعمدة وكما يأتي:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}; P_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; P_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; P_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

وبما أن المتغيرات $A_2; A_1; S_1$ هي متغيرات أساسية في الحل الابتدائي الأساسي الممكن ولهذا تكون مصفوفة β مكونة من أعمدتهم وكما يأتي:

$$\beta = \begin{pmatrix} P_4 & P_6 & P_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

[1] . دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال، مرجع سابق ، ص 66.

تظهر مشكلات النقل في الحياة العملية بصورة متكررة، فكثيراً ما يرى المرء شاحنات لنقل البضائع تسير عبر طرق مختلفة من مواقع عددية لإيصال هذه المادة الحيوية إلى المستهلك الذي يمكن أن يوجد في أماكن متعددة.

تعتبر مسألة النقل إحدى تطبيقات البرمجة الخطية الهامة حيث أن النماذج الرياضية المستخدمة في مشكلة النقل هي نماذج خطية والهدف من إستخدامها هو إيجاد أسلوب امثل لتوزيع الوحدات أو المنتوجات من عدة مصادر للعرض (معامل، موانئ، مراكز تسويقية) إلى عدة مواقع للطلب (مراكز استهلاكية) بأقل كلفة ممكنة أو بأعلى ربح أو بأقل وقت، ومشاكل النقل يمكن حلها باستخدام طريقة السمبليكس في البرمجة الخطية إلا أن هذه الطريقة تتطلب خطوات وجداول وعمليات حسابية كثيرة وهذا الأمر تم التغلب عليه من خلال تفريغ كافة مفردات (متغيرات) مشكلة النقل في جدول خاص يسمى جدول النقل وهذه المفردات.

لقد وضعت الصيغة الأولى لطريقة النقل من قبل العالم هيتشكوك (Hitchcok) في سنة 1941، ثم أضاف إليها العالم كوبمانز (Koopmans) بعد ذلك حتى وصلت إلى صيغتها المعروفة في إطار البرمجة الخطية بواسطة العالم دانتزج سنة 1953 [1].

I- الإطار العام لمشكلة النقل:

تمثل الصيغة الجدولية لمشكلة النقل منطلق إيجاد حل أولي ممكن للوصول إلى الحل الأمثل (النهائي) المتمثل في تحقيق أقل كلفة ممكنة من مجموع تكاليف النقل، والصيغة الجدولية لمشكلة النقل عبارة عن مصفوفة عدد صفوفها (M) تمثل المصادر (مراكز التوزيع) وعدد أعمدتها (N) وتمثل مراكز الاستلام وهو يظهر كما يلي[2]:

[1]. محمد دباس الحميد، محمد العزاوي، مرجع سابق، ص 121.

[2]. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي: " **مدخل إلى بحوث العمليات**"، دار مجدلاوي، عمان، 2007. ص: 281.

المراكز / المصادر	N_1	N_2	—.—.—	N_n	العرض
M_1	C_{11} x_{11}	C_{12} x_{12}		C_{1n} x_{1n}	a_1
M_2	C_{21} x_{21}	C_{22} x_{22}		C_{2n} x_{2n}	a_2
⋮					
M_m	C_{m1} x_{m1}	C_{m2} x_{m2}		C_{mn} x_{mn}	a_m
الطلب	b_1	b_2		b_n	$\sum a_i$ / $\sum b_j$

حيث أن:

$(N_1,N_2,\ldots.,N_n)$: مواقع الطلب، $(M_1,M_2,\ldots.,M_m)$: مصادر العرض؛

C_{ij}: كلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر i إلى الموقع j؛

x_{ij}: عدد الوحدات المنقولة من المصدر i إلى الموقع j؛

الفرضية الأساسية لحل نموذج النقل هو أن ما معروض في مصادر العرض أي مجموع المعروض يساوي مجموع الطلب في مواقع الطلب أي: ($\sum b_j = \sum a_i$) وفي هذه الحالة يسمى نموذج النقل بنموذج النقل المتوازن.

II- حل مسألة النقل:

بعد أن يتم إعداد الصيغة الجدولية لمشكلة النقل فإن الخطوة اللاحقة هو إيجاد الحل الأساسي الأولي الممكن، وهناك ثلاث طرق تستخدم لهذا الغرض:

- طريقة الزاوية الشمالية الغربية؛
- الحل بطريقة أقل التكاليف؛
- طريقة فوجل.

وبعد التوصل إلى الحل الأساسي الأولي يجب تدقيق هذا الحل لمعرفة فيما إذا كان هذا الحل امثلاً أم لا، ويتم الاختبار بإحدى الطريقتين:

- طريقة الحجر المتنقل (التخطي) أو القفز على الصخور (المسار المتعرج)؛
- طريقة التوزيع المعدل.

II-1- إيجاد الحل الأساسي الأولي:

يراعى فيه تحقيق التوازن بين المطلوب والمتاح، كما يجب أن يكون عدد مجاهيل القاعدة في هذا الحل المبدئي بعدد الشروط الخطية، أي $(M+N-1)$ ويمكن إيجاد حل مبدئي بعدة طرائق وفقها:

II-1-1- طريقة الزاوية الشمالية الغربية:

تعتبر هذه الطريقة من أبسط الأساليب الرياضية، لحل مشاكل النقل إلا أنها لا تحقق في معظم الأحيان الحل الأمثل لمشكلة نقل معينة، ولتوضيح كيفية استخدام هذه الطريقة نورد المثال التالي:

مثال رقم (01): إحدى الشركات لها ثلاثة مخازن في مواقع مختلفة، كما أن لها ثلاث مراكز تسويقية، أن تكاليف نقل الوحدة الواحدة من السلع (بالدينار)، وحجم التخزين في كل محزون والاحتياجات لكل مركز تسويقي مشار إليها في الجدول أدناه:

المراكز / المصادر	D_1	D_2	D_3	العرض
A	31 **300**	21 **100**	42	**400**
B	20	21 **800**	30 **200**	**1000**
C	23	20	15 **600**	**600**
الطلب	**300**	**900**	**800**	**2000 /2000**

حسب هذه الطريقة، يجب التأكد من أن جدول النقل في حالة التوازن (مجموع العرض= مجموع الطلب) وهو شرط محقق أي: (2000=2000)، ننقل (300) وحدة من (A) إلى المركز (D_1) وبالتالي تلبية كافة احتياجات المركز (D_1) ويبقى في مخزن (A) 100 وحدة؛

ننقل (100) وحدة من (A) إلى المركز (D_2)، ولم يبقى في مخزن (A) أية وحدة وهناك (800) وحدة يمكن للمركز (D_2) استيعابهم ؛

ننقل (800) وحدة من مخزون (B) إلى المركز (D_2) وبالتالي تلبية كافة احتياجات (D_2) وبقي في مخزون (200) وحدة؛

ننقل (200) وحدة من مخزون (B) إلى المركز (D_3) وبالتالي لم يبق في مخزون (B) أية وحدة؛

ننقل (600) وحدة من مخزون (C) إلى المركز (D_3) وعليه أصبحت حاجة المركز (D_3) صفراً ولم يبقى في مخزون (C) أية وحدة.

بعد عمليات النقل السابقة نلاحظ أن الجدول في توازن وهذا يعني أن جدولة النقل قد اكتملت، ويجب أن يتحقق الشرط الآتي، وهو أن مجموع الخلايا المشغولة يساوي 5.

عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)− 1

= **3+3 − 1 = 5** وهو ينطبق على المصفوفة أعلاه.

لذلك فإن هذه المشكلة وما سبقها هن من مشاكل من نوع قابلة للحل الأمثل بدون أية إجراءات أضافية ويطلق على هذا النوع من مشاكل النقل التي يتحقق فيها الشرط المذكور وهو (عدد الخلايا المملوءة (المشغولة)=M+N−1)، بأنها مشاكل غير منحلة)، أما المشاكل التي لا يتحقق فيها الشرط أعلاه ستكون من نوع المشاكل المنحلة، وهنا لا يمكن إيجاد الحل الأمثل لهذا النوع الأخير من المشاكل إلا بعد إجراءات إضافية أخرى[1].

الكلفة الكلية للنقل يمكن حسابها كالآتي:

$$Z = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} c_{ij} x_{ij} = 300(31) + 100(21) + 800(21) + 200(30) + 600(15) = 43200$$

II-1-2- الحل بطريقة أقل التكاليف:

تعتبر هذه الطريقة أفضل من الطريقة السابقة لأنها تأخذ بعين الاعتبار الأقل تكلفة، وحتى نحصل على الحل الأساسي الأولي الممكن بهذه الطريقة علينا في البداية أن نتأكد من أن جدول النقل في حالة توازن ثم نتبع الخطوات التالية[2]:

- نبدأ بتزويد المربع ذا التكلفة الأقل بأكبر ما يمكن من عدد الوحدات من المخزون المقابل لهذا المربع؛
- نتابع ملئ المربعات ذات التكلفة الأقل بالتتابع إلى أن نزود جميع مراكز التوزيع من المصادر المتوفرة؛
- نحسب التكلفة الإجمالية للمربعات المختلفة.

لتوضيح هذه الطريقة سنعمل على حل مشكلة النقل في المثال التالي:

---

1. حامد سعد نور الشمرتي، مرجع سابق، ص 158.
2. أكرم محمد عرفان المهندي، مرجع سابق، ص 131.

مثال رقم (02): لتكن مسألة النقل التالية

المطلوب: أوجد الحل الأساسي الأول:

1. بطريقة الزاوية الشمالية الغربية وحساب التكلفة الإجمالية؛
2. بطريقة أقل التكاليف وحساب التكلفة الإجمالية، وماذا تستنتج؟

المصنع \ السوق	الشمالي	الجنوبي	الغربي	العرض
A	7	6	5	**400**
B	4	8	1	**500**
C	2	3	9	**300**
الطلب	**200**	**600**	**400**	**1200 / 1200**

حل المثال:

1. بطريقة الزاوية الشمالية الغربية وحساب التكلفة الإجمالية؛

لدينا شرط مجموع الخلايا المشغولة يساوي (5) وهو محقق **عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)− 1** = **3+3 − 1 = 5** وهو ينطبق على المصفوفة المقابلة.

أما الكلفة الكلية للنقل يمكن حسابها كالآتي:

$$Z = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3} c_{ij}x_{ij} = 200\,(7) + 200\,(6) + 400\,(8) + 100\,(1) + 300\,(9) = 8600$$

المصنع \ السوق	الشمالي	الجنوبي	الغربي	العرض
A	7 200	6 200	5	**400**
B	4	8 400	1 100	**500**
C	2	3	9 300	**300**
الطلب	**200**	**600**	**400**	**1200 / 1200**

2. بطريقة أقل التكاليف وحساب التكلفة الإجمالية؛

هنا نبدأ التوزيع من الخالية ذات **أقل كلفة نقل** وإعطائها الأولوية في تسديد وهي هنا (B الغربي) حيث كلفة نقل (1 وحدة نقدية) لـ طن الواحد، وترى أن احتياجات السوق الغربي 400 وحدة والمتاح في المصنع في هو 500 طن لذا سيتم نقل 400 وحدة وإشباع حاجة السوق بالكامل ثم نبحث في الجدول عن أقل كلفة حيث نجد (C الشمالي) هي ذات كلفة أقل من غيرها (2 وحدة نقدية)، لذا ستكون لها الأولية التالية بالتوزيع وترى أن احتياجات السوق 200 طن في حين أن المتاح في المصنع (C) هو 300 طن وبهذا يمكن إشباع حاجة السوق بالكامل ثم نرتقي في التكاليف وبنفس الطريقة نواصل الحل.

السوق / المصنع	الأسواق: الشمالي	الجنوبي	الغربي	العرض
A	7	6 / 400	5	400
B	4	8 / 100	1 / 400	500
C	2 / 200	3 / 100	9	300
الطلب	200	600	400	1200 / 1200

لدينا شرط مجموع الخلايا المشغولة يساوي(5)، وهو محقق **عدد المربعات المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة)− 1 = 3+3 − 1 = 5** وهو ينطبق على المصفوفة المقابلة.

أما الكلفة الكلية للنقل يمكن حسابها كالآتي:

$$Z = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} c_{ij} x_{ij} = 400\,(6) + 100\,(8) + 400\,(1) + 200\,(2) + 100\,(3) = 4300$$

ونرى أن هناك فرقاً كبيراً في الكلفة الكلية التي تم احتسابها عند اعتماد طريقة الزاوية الشمالية الغربية والتي بلغت 8600 وحدة نقدية وهذا راجع إلى أن طريقة اقل كلفة هدفها هو التوزيع على أساس أدنى تكلفة نقل من المصانع إلى الأسواق.

ملاحظة هامة:

1. **في حالة تساوي التكاليف تعطى الأولوية للمربع الذي يحمل أكبر كمية ولأنه يعمل على تخفيض الكلفة الكلية أكثر؛**
2. **تعتبر طريقة أقل التكاليف أكفأ من طريقة الزاوية الشمالية الغربية التي لا تعتمد على أساس علمي في اختيار المتغيرات الأساسية،بينما هذه الطريقة تعتمد في اختيار المتغيرات الأساسية على المتغير الأقل من حيث التكلفة، لهذا تقربنا أكثر إلى الحل الأمثل، على عكس طريقة الزاوية الشمالية الغربية[1].**

[1]. حامد سعد نور الشمرتي، علي خليل الزبيدي، مرجع سابق، ص: 289.

II-1-3- طريقة فوجل:

تعد هذه الطريقة من أفضل الطرق في حل مسائل النقل وغالبا ما تعطى حلاً أمثلا ويمكن أن نجمل خطوات حل مسألة النقل وفقها كالآتي[1]:

1. إيجاد الفرق بين أقل كلفتين في كل صف؛
2. إيجاد الفرق بين أقل كلفتين في كل عمود؛
3. تحديد أكبر فرق سواء كان في الصفوف أو الأعمدة؛
4. البحث عن أقل كلفة في الصف أو العمود الذي يقابل أكبر فرق والبدء بتخصيص الكميات التي سترسل إلى الأسواق؛
5. إعادة الخطوات السابقة لحين الوصول إلى توزيع كامل للطاقات الإنتاجية وإشباع تام لإحتياجات الأسواق مع مراعاة استبعاد الخلايا التي تشغل.

مثال رقم (03): لتكن مسألة النقل التالية:

السوق / المصنع	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	20	22	17	4	**120**
S_2	24	37	9	7	**70**
S_3	32	37	20	15	**50**
الطلب	**60**	**40**	**30**	**110**	**240/240**

المطلوب: حل المسألة بطريقة فوجل.

الحل: إيجاد الفرق بين أقل كلفتين في كل صف وفي كل عمود، والبدء بتخصيص الكميات التي سترسل إلى الأسواق:

[1]. صالح مهدي محسن العامري، عواطف ابراهيم الحداد، مرجع سابق، ص 219.

السوق / المصنع	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض	الفروق للصفوف
S_1	20	22 **40**	17	4	**120**	(17-4)= **13**
S_2	24	37	9	7	**70**	(9-7)= **2**
S_3	32	37	20	15	**50**	(20-15)= **5**
الطلب	**60**	**40**	**30**	**110**	**240/240**	
الفروق للأعمدة	(24-20)=**4**	(37-22)=**15**	(17-9)=**8**	(7-4)=**3**		

وهنا سوف يحذف العمود الثاني مرحليا وننقص العرض في الصف بنفس الوحدات المخصصة للخلية (40).

السوق / المصنع	D_1	D_3	D_4	العرض	الفروق للصفوف
S_1	20	17	**4** **80**	**80**	(17-4)= **13**
S_2	24	9	7	**70**	(9-7)= **2**
S_3	32	20	15	**50**	(20-15)= **5**
الطلب	**60**	**30**	**110**	**200 /200**	
الفروق للأعمدة	(24-20)=**4**	(17-9)=**8**	(7-4)=**3**		

وهنا سوف يتم حذف الصف الأول مرحليا وننقص الطلب في العمود الرابع بنفس الوحدات المخصصة للخلية (80).

المصنع \ السوق	D_1	D_3	D_4	العرض	الفروق للصفوف
S_2	24	9 / 30	7	**70**	(9-7)= **2**
S_3	32	20	15	**50**	(20-15)= **5**
الطلب	**60**	**30**	**30**	**120 /120**	
الفروق للأعمدة	(24-32)=**8**	(20-9)=**11**	(15-7)=**8**		

وهنا سوف يتم حذف العمود الثالث مرحليا وننقص العرض في الصف الثاني بنفس الوحدات المخصصة للخلية (30).

المصنع \ السوق	D_1	D_4	العرض	الفروق للصفوف
S_2	24 / 10	7 / 30	**40**	(24-7)= **17**
S_3	32 / 50	15	**50**	(32-15)= **17**
الطلب	**60**	**30**	**90 /90**	
الفروق للأعمدة	(24-32)=**8**	(15-7)=**8**		

وهنا سوف يتم العودة إلى الجدول الأصلي لمشكلة النقل:

المصنع \ السوق	D_1	D_2	D_3	D_4	العرض
S_1	20 /	22 / 40	17 /	4 / 80	**120**
S_2	24 / 10	37 /	9 / 30	7 / 30	**70**
S_3	32 / 50	37 /	20 /	15 /	**50**
الطلب	**60**	**40**	**30**	**110**	**240/240**

حساب التكلفة الإجمالية وفقا لهذه الطريقة:

$$Z=\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3}c_{ij}x_{ij}=10(24)+50(32)+40(22)+30(9)+30(7)=3520$$

وشرط عدد الخلايا المملوءة محق، أي: 6=1−4+3.

II-2- إيجاد الحل الأمثل (اختبار الحل الأساسي الأولي):

لا نحصل من خلال استخدام الطرق الثلاثة السابقة الذكر إلا على الحل الأساسي الأولي، وإن الحصول على الحل الأساسي الأولي لا يعني نهاية حل المشكلة (الحل الأمثل)، وإنما يجب أن نستخدم أساليب آخري لاختبار هل أن الحل الأساسي الذي تم الحصول عليه من تطبيق أحدى الطرق السابقة، هل هو الحل الأمثل أما هناك حلولاً أخرى أمثل منه، وللوصول إلى هكذا حلول هناك طريقتان لاختبار أمثلية الحل نبدأ بالتالية:

II-2-1- طريقة الحجر المتنقل:

تقوم طريقة الحجر المتنقل بتقييم جميع الخلايا الغير مشغولة (الفارغة) في جدول النقل للتأكد إذا كان النقل إليها يؤدي إلى تخفيض التكاليف، فإذا وجدنا أن ملء خلية غير مشغولة يؤدي إلى خفض تكاليف النقل فإن جدول النقل الأولي يتم تعديله للاستفادة من ذلك، وهكذا تستمر عملية تقييم كل جدول نقل إلى أن يتضح أن شغل أي خلية فارغة لن يؤدي إلى تخفيض تكاليف النقل بل سيؤدي إلى زيادتها[1].

يجب أولاً التأكد أن عدد الخلايا المشغولة يساوي (M+N−1) ولتطبيق هذه الطريقة يتم إتباع الخطوات الآتية[2]:

- تكوين ممرات مغلقة على شكل مربعات أو مستطيلات أو جمع الاثنين معاً على أن يكون المربع الفارغ محدد بثلاث زوايا لمربعات مملوءة؛
- وضع إشارة (+) في المربع الذي تنقل إليه الوحدات وإشارة (−) في المربع الذي تنقل منه الوحدات اعتماداً على الكلفة في المربعات؛
- مراعاة حصول التوازن في كميات العرض والطلب القائمة في الجدول على مستوى الصفوف وكذلك الأعمدة، ولذلك في كل صف أو عمود تكون إشارة سالبة لابد أن تكون إشارة موجبة؛
- يتم النقل لأقل كمية من مربع يحمل إشارة سالبة بين المربعات التي تحمل إشارات سالبة إلى المربعات ذات الإشارة الموجبة؛
- تعطى الأولوية للممر المغلق الحاصل على أعلى قيمة سالبة من بين الممرات الأخرى؛

---

[1] . منعم زمزير المساوي:" **بحوث العمليات مدخل علمي لإتخاذ القرارات**"، دار وائل للنشر، ط1،الأردن، 2009، ص 200.

[2]. عبد الرسول عبد الرزاق الموسوي، مرجع سابق، ص ص : 101−102 .