التفاضل الجزئي | د. [illegible]

م٢٠١٢/٢/٥ | م٣

Partial Differentiation

تعرف الدالة لمتغير مستقل واحد بالشكل $y=f(x)$ بأنها أزواج مرتبة (x,y) بحيث ان لكل x في مجال الدالة يوجد عنصر واحد وواحد فقط y بحيث ان $y=f(x)$.

اما الدالة لمتغيرين مستقلين $w=f(x,y)$ فهي مجموعة من ازواج مرتبة (x,y) في المجال D تعين واحد وواحد فقط w في C. تسمى المجموعة D بالمجال وتسمى C بالمدى f.

تعريف المشتقة الجزئية للدالة $w=f(x,y)$ بالنسبة الى المتغير x هي دالة يرمز لها $\frac{\partial w}{\partial x}$ وكذلك نعرف المشتقة الجزئية بالنسبة الى y للدالة $w=f(x,y)$ بأنها $\frac{\partial w}{\partial y}$. ونحصل على المشتقة الجزئية بتطبيق قواعد التفاضل التي سبق ذكرها.

مثال(1) جد $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$ للدالة

$$w=(3x^4-4y+5)^5$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=5(3x^4-4y+5)^4(12x^3)=60x^3(3x^4-4y+5)^4$$

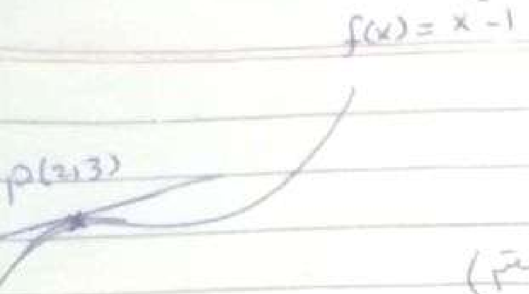
$$\frac{\partial w}{\partial y}=5(3x^4-4y+5)^4(-4)=-20(3x^4-4y+5)^4$$

مثال(2) جد $\frac{\partial w}{\partial x}$, $\frac{\partial w}{\partial y}$, $\frac{\partial w}{\partial z}$ اذا كانت $w=$

$$w=2x\sqrt{y+z}-3yz\sqrt{x^2+1}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2\sqrt{y+z}-\frac{3yz}{2}(x^2+1)^{-1/2}\,2x$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2\sqrt{y+z}-\frac{3yzx}{\sqrt{x^2+1}}$$



فرض لدينا المنحنى $f(x) = x^2 - 1$
والمطلوب ايجاد معادلة المماس عند النقطة $p(2,3)$
الواقعة على الدالة
عادة عندما يطلب ايجاد معادلة المماس (المستقيم)
نحتاج الى ميله ونقطة عليه وفقاً للمعادلة العامة للمستقيم.

$$y - y_1 = m(x - x_1) \quad --- \quad (1)$$

حيث (m) الميل ، (x_1, y_1) احداثيات النقطة الواقعة عليه.
في هذه الحالات يجب ان نطبق المعادلة التالية في حساب ميل المستقيم وهي

(2) مشتقة المنحنى = ميل المماس عند نقطة التماس

$$f'(x) = 2x$$

وبتطبيقه بالمعادلة (2) .

$$\therefore 2x = m \qquad (2,3)$$

$$2 \times 2 = m$$

$$\therefore m = 4$$ الميل

وعليه نطبق معادلة الخط المستقيم (المماس) عند التعويض بالمعادلة (1)

$$y - 3 = 4(x - 2)$$

$$y = 4x - 8 + 3$$

$$y = 4x - 5$$

اما اذا طلب منا ايجاد معادلة العمود على المماس عند نقطة التماس
فان ميل المستقيم العمودي = $-\frac{1}{\text{ميل المماس}}$

$$m_\perp = -\frac{1}{4}$$

وعليه ستكون معادلة العمود على المماس عند نقطة التماس هو

$$y - 3 = -\frac{1}{4}(x - 2)$$

ملاحظة: (1) المستقيمات المتوازية ميلها متساوي

(2) المستقيم العمودي [illegible]

(3) المستقيم الموازي لمحور السينات ميله صفر

(4) المستقيم العمودي على محور السينات ميله غير معرف

(5) اذا كانت المستقيم يصنع زاوية 60 مع الاتجاه الموجب فان ميله $= \tan 60$

(6) اذا اعطيت نقطتين في المستقيم فان ميله

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

قواعد المشتقة

1- مشتقة الثابت = صفر مثال

$f(x) = 3$

$f'(x) = zero$

2- مشتقة x^n تساوي

$n(x)^{n-1}$

مثال $f(x) = x^3$

$f'(x) = 3x^2$

3- مشتقة مجموع او طرح عدة حدود مثال

$$f(x) = x^2 + 2x^{-4} + x^3 - 3x^{-6}$$

$$f'(x) = 2x - 8x^{-5} + 3x^2 + 18x^{-7}$$

4- مشتقة حاصل ضرب دالتين = الاول × مشتقة الثاني + الثاني × مشتقة الاول

$$f(x) = g(x)\,h(x)$$

$$= g(x)\,h'(x) + h(x)\,g'(x)$$

5- مشتقة حاصل قسمة دالتين = $\frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} - \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{h(x)\,g'(x) - g(x)\,h'(x)}{h^2(x)}$$

مشتقة دالة الدالة

$$f(x) = (\text{دالة})^{n}$$

$$f'(x) = n(\text{دالة})^{n-1} *$$ مشتقة داخل القوس الدالة

ex.) $f(x) = (3x^2 - 2x^{-3})^4$

$$f'(x) = 4(3x^2 - 2x^{-3})^3 (6x + 6x^{-4})$$

واجب

① جد مشتقة كل من الدوال الآتية

① $y = (2x^2 - 5)^{-4}$

② $y = (x+1)^4 (x+3)^{-2}$

③ $y = \left(\dfrac{x+3}{x^2+1}\right)^5$

مشتقة الدالة الضمنية

اذا كانت الدالة $f(x,y)$ هي دالة لمتغيرين (x و y) اذا امكن ايجاد احد متغيرين بدلالة الآخر مثل y بدلالة x فيقال عندئذ ان y او $f'(x)$ دالة صريحة للمتغير x. اما اذا اردنا التعبير عن احد المتغيرين بدلالة الآخر صعباً ولا يمكننا حل المعادلة لايجاد y بدلالة x. عندئذ نقول ان الدالة ضمنية. ويمكننا ايجاد مشتقة y بالنسبة الى x بطريقة الاشتقاق الضمني.

ويمكن ايجاده بطريقتين ولتوضيح الطريقتين نأخذ المثال الآتي.

$$x^3+2xy+y^3=5$$

المطلوب هو $\frac{dy}{dx}$ او $f'(x)$

الطريقة الاولى : نكتب القانون بعد ان ننقل جميع الحدود الى الطرف الايسر.

$$x^3+2xy+y^3-5=0$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(\text{المشتقة بالنسبة الى } x \text{ وجعل } y \text{ ثابت})}{\text{مشتقة بالنسبة الى } y \text{ وجعل } x \text{ ثابت}}$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{(3x^2+2y)}{2x+3y^2}$$

الطريقة الثانية مشتقة كل حد حسب قواعد المشتقة بالنسبة x ثم نستخرج $\frac{dy}{dx}$ كالآتي:

$$3x^2+2\left(x\cdot\frac{dy}{dx}+y\right)+3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$3x^2+2x\frac{dy}{dx}+2y+3y^2\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}\left(2x+3y^2\right)=-3x^2-2y$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-(3x^2+2y)}{2x+3y^2}$$

ex: find $\frac{dy}{dx}$ for the

$$y^2 + \sqrt{xy} = 3x^3 \Rightarrow y^2 + \sqrt{xy} - 3x^3 = 0$$

الحل: حسب الطريقة الاولى طريقة القانون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(\text{مشتقة بالنسبة لـ } x \text{ وجعل } y \text{ ثابت})}{\text{مشتقة بالنسبة لـ } y \text{ وجعل } x \text{ ثابت}}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{1}{2}\sqrt{y}\, x^{-1/2} - 9x^2\right)}{2y + \sqrt{x}\,\frac{1}{2}\, y^{-1/2}}$$

$$= \frac{9x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}}{2y + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}}$$

الحل بالطريقة الثانية

$$y^2 + \sqrt{xy} - 3x^3 = 0$$

$$2y\underline{\underline{y'}} + \sqrt{x}\cdot\frac{1}{2}y^{-1/2}\underline{\underline{y'}} + \sqrt{y}\cdot\frac{1}{2}x^{-1/2} - 9x^2 = 0$$

$$y'\left(2y + \frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{y}}\right) = 9x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}$$

$$y' = \frac{9x^2 - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{y}{x}}}{2y + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x}{y}}}$$

((The Differential التفاضل))

نرمز لتفاضل الدالة f بـ df وهو دالة بمتغيرين مستقلين هما x و dx .

مثال: لتكن

$y = 4x^3 - 2x + 1$ فان

$f(x) = 4x^3 - 2x + 1$

وان $f'(x) = 12x^2 - 2$

• وبحسب تعريف $dy = f'(x)\,dx$

فان تفاضل الدالة f هو

$dy = (12x^2 - 2)\,dx$

وعندما $x = 1$ فان تفاضل الدالة هو

$dy = 10\,dx$

وبالتالي فان المشتقة هي النسبة بين تفاضل y الى تفاضل x حسب التعريف .

• $dy = f'(x)\,dx$

$$\therefore f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

مثال: جد تفاضل الدالة التالية

$y = (x^3 + x + 1)^{3/2}$

$dy = f'(x) \cdot dx$

$f'(x) = \frac{3}{2}(x^3 + x + 1)^{1/2}(3x^2 + 1)$

$$\therefore dy = \frac{3}{2}(x^3 + x + 1)^{1/2} (3x^2+1)\, dx$$

ex: $y = \left(\frac{x+2}{x-5}\right)^{1/2}$

$$dy = f'(x)\, dx$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{x-5}\right)^{-1/2} \left(\frac{(x-5)*1-(x+2)*1}{(x-5)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{x-5}\right)^{-1/2} \left(\frac{\cancel{x}-5-\cancel{x}-2}{(x-5)^2}\right)$$

$$= \frac{-7(x-5)^2}{2*\left(\frac{x+2}{x-5}\right)^{1/2}}$$

$$dy = \frac{-7(x-5)^2}{2\left(\frac{x+2}{x-5}\right)^{1/2}}\, dx$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(6x^2 - 3y^2 + 6) = (-6y)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-6xy + 15y^2) = (-6y)$$

ملاحظة: اذا كانت الدالة $w = f(x,y)$ ومشتقاتها الجزئية
f_{xx} ، f_{xy} ، f_{yx} ، f_{yy} معرفة في منطقة مفتوحة R
$f_{xy} = f_{yx}$ كما لاحظنا في المثال السابق.

في المثال السابق $\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x}$ ، $\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x \partial y}$ ، $\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-6y) = -6$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(-6y) = -6$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}((-6x) + 30y) = -6$$

$$\cancel{\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}}(-6y) = zero.$$

اوجد $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ، $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ ، $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ للدوال

1. $w = x^3 - 3x^2y^2 + 5xy - 2y^3$

2. $w = xe^y + ye^x + 3$

نفرض (a) عدد موجب يختلف عن (١) وليكن N اي عدد موجب بحيث

$$a^x = N$$

وعليه فان

$$x = \log_a N$$

وتقرأ x تساوي لوغارتم N للاساس a

وعندما يكون الاساس a يساوي ١٠ نطلق عليه اسم اللوغارتم الاعتيادي وهذه بعض خواص اللوغارتمات الاعتيادية

$$\log_{a=10} 10 = 1$$

$$\log_{a=10} 1 = 0$$

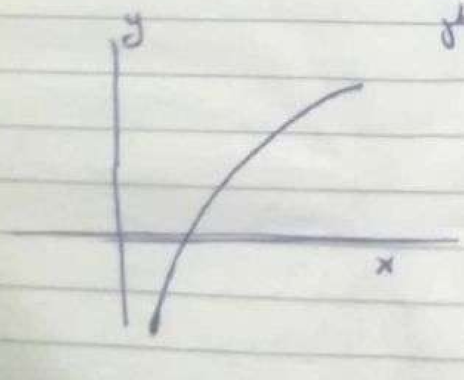
$$\log_{a=10} xy = \log_{10} x + \log_{10} y$$

$$\log_{a=10} \left(\frac{x}{y}\right) = \log_{10} x - \log_{10} y$$

$$\log_{a=10} (x^n) = n \log_{10} x$$

دالة اللوغارتم الطبيعي $y = \ln x$ ويكون شكل بيانه

دالة اللوغارتم الطبيعي مناسبة بالشكل



x	y = ln x
1	0
2	0.7
3	1.1
$\frac{1}{2}$	-0.7

ويمكن ان نثبت خواص اللوغارتمات بسهولة

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

$$\ln \frac{a}{a} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^r = r \ln a$$

r: عدد نسبي

The total Differential التفاضل الكلي

يطلق على $\frac{\partial w}{\partial x}.dx$ و $\frac{\partial w}{\partial y}.dy$ التفاضل الجزئي لـ w بالنسبة لـ x, y

وعليه سيكون التفاضل الكلي للدالة $w=f(x,y,z)$ بأنه:

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}.dy+\frac{\partial w}{\partial z}.dz$$

مثال: جد التفاضل الكلي للدالة: $w=3x^2-2xy+5y^2+7$

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}.dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy$$

$$dw=(6x-2y)dx+(-2x+10y).dy$$

أمثلة: جد التفاضل الكلي للدالة المعطاة

(1) $w=5x^3+2xy^2-\sqrt{xy}+6y^3+3$

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}.dy$$

$$dw=\left(15x^2+2y^2-\tfrac{1}{2}\sqrt{y}\,x^{-1/2}\right)dx+\left(4xy-\tfrac{1}{2}\sqrt{x}\,y^{-1/2}+18y^2\right)dy$$

(2) $w=xy\ln(x^2+y^2)$

$$dw=\frac{\partial w}{\partial x}.dx+\frac{\partial w}{\partial y}.dy$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}dx=\left[xy.\frac{2x}{x^2+y^2}+\ln(x^2+y^2)\,y\right]dx$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}dy=\left[xy.\frac{2y}{x^2+y^2}+\ln(x^2+y^2).x\right]dy$$

$$\therefore dw=\left[xy.\frac{2x}{x^2+y^2}+y\ln(x^2+y^2)\right]dx+\left[\frac{2xy^2}{x^2+y^2}+x\ln(x^2+y^2)\right]dy$$

معلوم تعرف الدالة الاسية للاساس a والتي يرمز لها ب a^x

a : اي عدد حقيقي موجب

$$a^x = e^{(x\ln a)}$$

وبما ان دالة اللوغاريتم الطبيعي عكس الدالة الاسية فان

$$\ln a^x = \ln e^{x\ln a} = x\ln a \underbrace{\ln e}_{1} = x\ln a$$

مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعي

$$\frac{d}{dx}\{\ln(u)\} = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

مثال: جد y' اذا علمت ان

$$y = \ln\left(x\sqrt{x^2+1}\right) \qquad x>0$$

$$y = \ln x + \ln(x^2+1)^{1/2} = \ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

$$y' = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{(x^2+1)}$$

$$= \frac{x^2+1+x^2}{x(x^2+1)} = \frac{2x^2+1}{x(x^2+1)}$$

هناك بعض الدوال المعقدة يلزم أولاً تبسيطها ومن ثم بأخذ اللوغاريتم الطبيعي ومن بعد ذلك يتم الاشتقاق.

مثال: ليكن

$$y = \frac{\sqrt{x^2+5}}{(x-3)\sqrt[3]{x+2}}$$

جد y'.

$$\ln y = \ln \frac{\sqrt{x^2+5}}{(x-3)\sqrt[3]{x+2}}$$

$$\ln y = \ln\left(\sqrt{x^2+5}\right) - \ln\left((x-3)\sqrt[3]{x+2}\right)$$

$$\ln y = \ln\left(x^2+5\right)^{1/2} - \left(\ln(x-3) + \ln\sqrt[3]{x+2}\right)$$

$$\frac{1}{2}\ln(x^2+5) - \ln(x-3) + \frac{1}{3}\ln(x+2)$$

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+5} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{3(x+2)}$$

نعوض y

$$y' = \frac{\sqrt{x^2+5}}{(x-3)\sqrt[3]{x+2}}\left(\frac{x}{x^2+5} - \frac{1}{x-3} + \frac{1}{3(x+2)}\right)$$

واجب جد y' لوغارتمياً

$$y = \ln\frac{\sqrt{x}}{x^2+1}$$

$$y = \frac{\sqrt{x^2+5}}{\sqrt[3]{x-11}\,(x+4)}$$

$$y = x\ln x + x^2$$

ـال جد $f'(x)$ للدوال التالية

١ $f(x) = 3^{x^2-1}$

$f'(x) = 3^{x^2-1} \cdot 2x \cdot \ln 3$

٢ $f(x) = (x+1)^{\sqrt{x}}$

بأخذ ln الطرفين

$y = (x+1)^{\sqrt{x}}$

$\ln y = \ln (x+1)^{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \ln (x+1)$

$\frac{y'}{y} = \sqrt{x} \cdot \frac{1}{x+1} + \ln(x+1) \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2}$

$y' = y \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{2\sqrt{x}} \right)$

$y' = (x+1)^{\sqrt{x}} \left(\frac{\sqrt{x}}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{2\sqrt{x}} \right)$

$$\int e^{x^2+2x^3}(x+3x^2)\,dx$$

$$\int \frac{x\,e^{\ln(x^2+1)}}{x^2+1}\,dx$$

$$\int x\,e^{x^2+1}\left(e^{x^2+1}+1\right)^{3/2} dx$$

(1)

$$\int \frac{2x+5}{(x^2+5x)}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x-1}\,dx$$

تكامل الدوال الاسية واللوغاريتمية .

قاعدة التكامل غير المحدود للدالة الاسية

$$\int e^{x}\,dx = e^{x} + c$$

مثال

$$\int \frac{3}{3} x^{2} e^{x^{3}+5}\,dx$$

$$\frac{1}{3} e^{x^{3}+5} + c$$

مثال

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln(x) + c$$

قاعدة التكامل للدوال اللوغاريتمية العامة

$$\int a^{x}\,dx = \frac{1}{\ln a} a^{x} + c$$

مثال:

$$\int 5^{x^{2}+3}\,x\,dx$$

نوجد مشتقة الدالة $5^{x^{2}+3}$ هي

$$5^{x^{2}+3} \cdot 2x \cdot \ln 5$$

$$\int \frac{2 \ln 5\, x}{2 \ln 5} 5^{x^{2}+3}\,dx = \frac{5^{x^{2}+3}}{2 \ln 5} + c$$

$$\int (x^{2}+1) 8^{x^{3}+3x+1}\,dx = \int \frac{3}{3} \frac{\ln 8\,(x^{2}+1)}{\ln 8} 8^{x^{3}+3x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{3 \ln 8} 8^{x^{3}+3x+1} + c$$

(25)

جد التكاملات التالية

(1) $\int 3^{x^3+1}(x^2 dx)$

(2) $\int (e^x+5)^{3/2} e^x \, dx$

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}$

(4) $\int e^{x^2+x}(2x+1)\, dx$

(5) $\int \frac{e^{\ln(x^2+2x)}(x+1)}{x^2+2x} dx$

التكامل المحدد

The Definite integral

التكامل المحدد للدالة يعطى بالصيغة $\int_a^b f(x)\, dx$

حيث b الغاية العليا ، a الغاية السفلى لصيغة التكامل

مثال

$$\int_{-1}^{3} x(x^2+1)^{1/2} dx$$

$$\int_{-1}^{3} \frac{\cancel{2}x}{2}(x^2+1)^{1/2} \cancel{dx} =$$

$$\left.\frac{\cancel{\tfrac{1}{2}}(x^2+1)^{3/2}}{\cancel{2}\div 3}\right]_{-1}^{3} = \frac{(9+1)^{3/2}}{3} - \left(\frac{1+1}{3}\right)^{3/2} = \frac{10\sqrt{10}}{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

واجب

$$\int_0^1 \frac{3x\, dx}{\sqrt{1+2x^2}} \qquad \int_1^3 t\sqrt{9-t^2}\, dt$$

$$\int_1^2 \frac{x^3+2}{x^2} dx$$