وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية الزراعة والغابات
قسم الاقتصاد الزراعي

محاضرات
مادة رياضيات اقتصادية
المرحلة الأولى

اعداد
م.احمد هاشم علي
م. صلاح فهمي شابا

الجبر الخطي :

يشمل دراسة المعادلات الخطية وتتميز المعادلات الخطية بان قيمة المتغير او المتغيرات فيها الواحد الصحيح لذا يطلق عليها احيانا المعادلات من الدرجة الاولى

الجبر الخطي يشمل في دراسته المعادلات الخطية ذات مجهول واحد او اكثر وتشمل ايضا المتجهات والمحددات والمصفوفات.

تعاريف اساسية

١- **<u>الثابت العددي</u>** :- وهي قيمة ثابتة لاتتغير بتغير المسالة التي هي قيد البحث.
٢- **<u>الثابت الرمزي</u>** :- وهي قيمة ثابتة ضمن المسالة التي هي قيد البحث وتتغير هذه القيمة بتغير المسالة نفسها.
٣- **<u>المتغير variable</u>** :- وهي قيمة تتغير ضمن مدى محدد وفق المسالة التي هي قيد البحث.
٤- **<u>المعامل coefficient</u>** :- وهو ثابت رمزي او عددي مضروب بمتغير.
٥- **<u>الدالة function:-</u>** تعبر الدالة عن علاقة بين متغيرين او اكثر فالدالة الاتية:

$Y=f(X)$ تعبر عن العلاقة بين متغيرين Y هو المتغير التابع
وX هو متغير المستقل ، حيث يقابل كل
قيمة من قيم X قيمة واحدة فقط من قيم Y .

$$Qd = f(P.K.R.Y.T)$$

حيث ان:-
Qd تمثل الكمية المطلوبة
P تمثل السعر
K تمثل سعر السلعة المكملة
R تمل سعر السلعة المنافسة
Y تمثل الدخل
T تمثل الذوق

$$Qd = a + bP + cK + dR + eY + rT$$

حيث ان :-
a يمثل الثابت
b.c.d.e.r تمثل معاملات
وتتوقف علاقات المعاملات على طبيعة العلاقات بين المتغير المعتمد والمتغيرات الثابتة (المستقلة) وفي دالة الطلب a هي قيمة موجبة وتكون b سالبة لطبيعة العلاقة العكسية بين الكمية المطلوبة وسعرها ، اما cفالمتوقع ان تكون سالبة بين الكمية المطلوبة من سلعة وسعر السلعة المنافسة حيث ان ارتفاع سعر السلعة المنافسة يقل الطلب عليها وتستبدل من قبل المستهلك بالسلعة البديلة لها فيزداد الطلب عليها لذا فان d تكون موجبة وتكون العلاقة بين الدخل والكمية المطلوبة طردية في حالة السلعة الاعتيادية لذا فان e تكون غالبا

موجبة اما في حالة السلع الرديئة تكون العلاقة عكسية اما بالنسبة لمعامل r فان اشارته تتوقف على طبيعة المتغير المستخدم لكي يعكس تغير الذوق ،

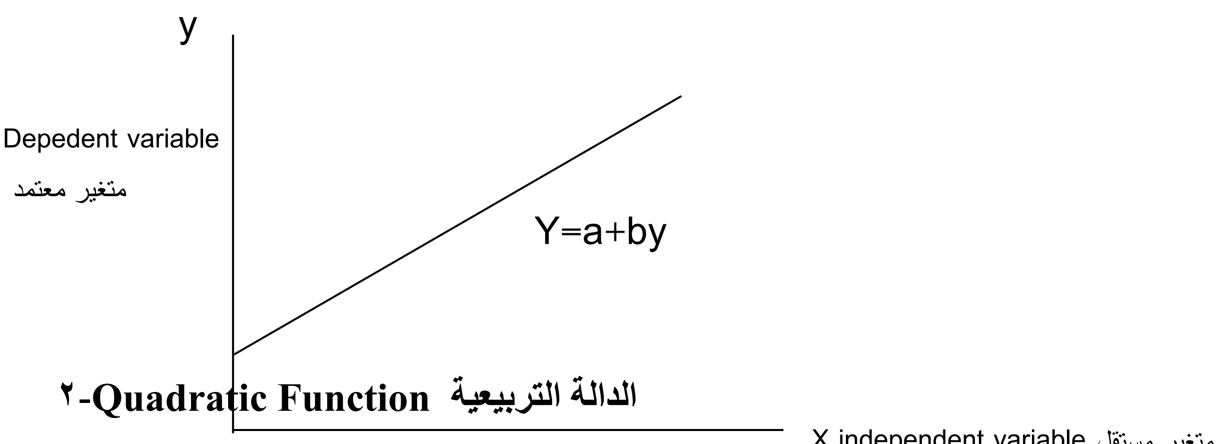
ان دالة الطلب المذكورة سابقاً يمكن ان تاخذ مثلا شكل المعادلة الاتية :

$$Qd = 10 - 1.5P - 0.1K + 0.3R + 0.5Y + 0.2T$$

The Type Of Function أنواع الدوال

١-Linear Function الدالة الخطية

$Y=a+bx$



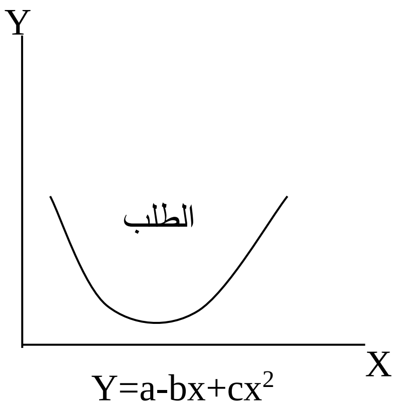
Linear function

٢-Quadratic Function الدالة التربيعية

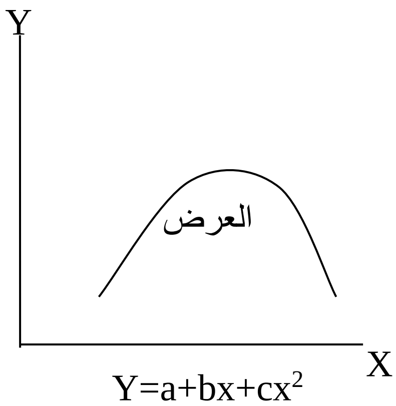
$Y=a+bx+Cx^2$

$Y=a-bx+Cx^2$

3-Cubic Function

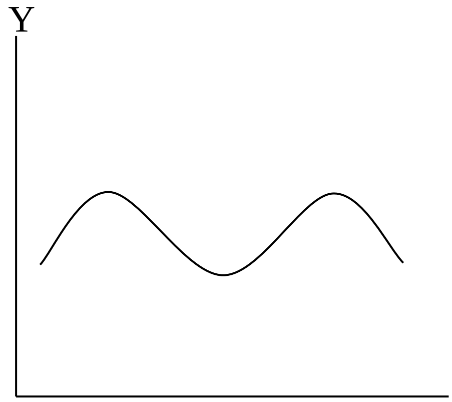


$Y=a-bx+cx^2$



$Y=a+bx+cx^2$

Cubic Function الدالة التكعيبية



$Y=a+bx+cx^2+dx^3$

Soloution :

١-Ouadratic Formula الدستور

$X_1 , x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

Ex/Find the value of Q from the profit function

$\pi = -O^2 + 11Q - 24$

a=-1 , b=11, C=-24

$Q=\frac{-11 \pm \sqrt{(11)^2-4(-1)(-24)}}{2(-1)}$

$Q1, Q2= \frac{-11 \pm \sqrt{121-96}}{-2}$

$= \frac{-11 \pm \sqrt{25}}{-2} = \frac{-11 \pm 5}{-2}$

$Q_1=3$, $Q_2=8$

Soluation :

٢-Substitution Method طريقة التعويض

Ex/The equilibrium conditions for two market butter and Margarine where Pb is the price of butter and P_m the Price of Margarine

8Pb-3Pm=7

-Pb+7Pm=19

Find the value of Pb and Pm use the substitution method

8Pb-3Pm=7…………………..(1)

-Pb+7Pm=19 …………………(2)

From the (2) equation find the value of Pb

Pb=7Pm-19

Substitute the value of Pb in the equation (1)

8(7Pm-19)-3Pm=7

56Pm-152-3Pm=7

53Pm=159

Pm= $\frac{159}{53}$ =3

Substite Pm = 3 in either equation (1) or (2)

8Pb-3Pm=7

8Pb-3(3)=7

8Pb=9+7

Pb=$\frac{16}{8} = 2$

Pm=3 , Pb=2

٣-Elimination Method طريقة الحذف

Ex/The equilibrium conditions for two market butter Margarine where Pb is the Price of butter and Pm the price of Margarine

8Pb – 3Pm =7

-Pb+7Pm=19

8Pb-3Pm=7

[-Pb+7Pm=19]8 multiply the equations (2) by 8

8Pb-3Pm=7

-8Pb+56Pm=152

53Pm=159

Pm= $\frac{159}{53}$

Pm=3

Substite Pm = 3 in either equation (1) or (2)

8Pb-3Pm=7

8Pb-3(3)=7

8Pb-9=7

8Pb=9+7

8Pb=16

Pb= $\frac{16}{8}$

Pb=2

Pm=3 / Pb=2

حل السؤال السابق بطريقة أخرى :

8Pb-3Pm=7………(1)

-Pb+7Pm=19…………(2)

Multiply the equation (1) by 7 and the equation (1) by 3

7 (8Pb-3Pm=7)

3(-Pb+7Pm=19)

56Pb-21Pm=49

-3Pb+21Pm=57

53Pb =106

Pb= $\frac{106}{53} = 2$

Substitute Pb = 2 in either equation (1) or (2)

8 (2) – 3 Pm = 7

16-3Pm=7

٣Pm=١٦ -٧

$= \frac{9 3Pm}{3 \quad 3}$

Pm=3

Pb=2 / Pm =3

Ex) Geven

2x-4y=-24

9x-3y=-3

Solve the equation using the elimination method and graphically

Graphs of Functionرسم الدوال

Graph the following functions:

a) y=1+2x

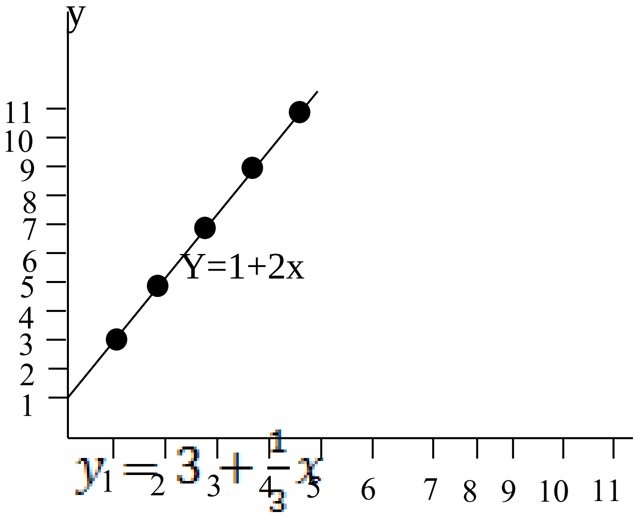
b) y=3+$\frac{1}{3}x$

c) y=20-5x

d) y=2-$\frac{1}{2}$x

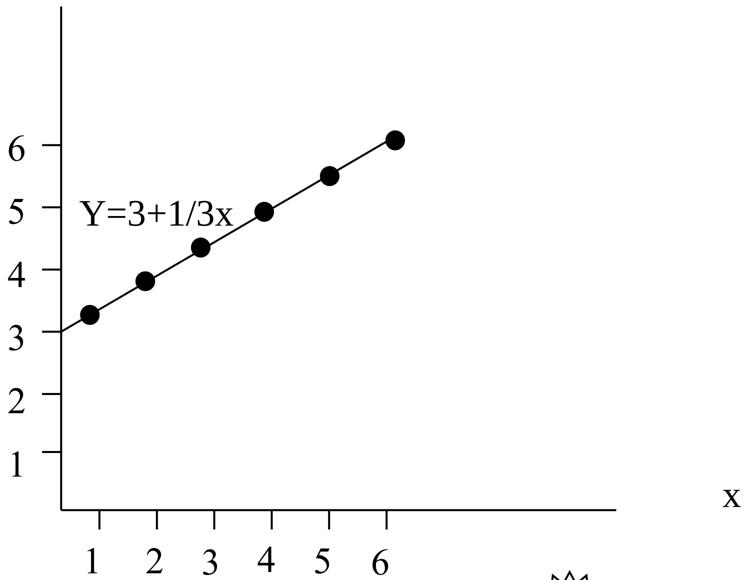
y=1+2x

		X	Y
X=0	**Y=1+2(0)=1**	**0**	**1**
X=1	**Y=1+2(1)=3**	**1**	**3**
X=2	**Y=1+2(2)=5**	**2**	**5**
X=3	**Y=1+2(3)=7**	**3**	**7**
X=4	**Y=1+2(4)=9**	**4**	**9**
X=5	**Y=1+2(5)=11**	**5**	**11**

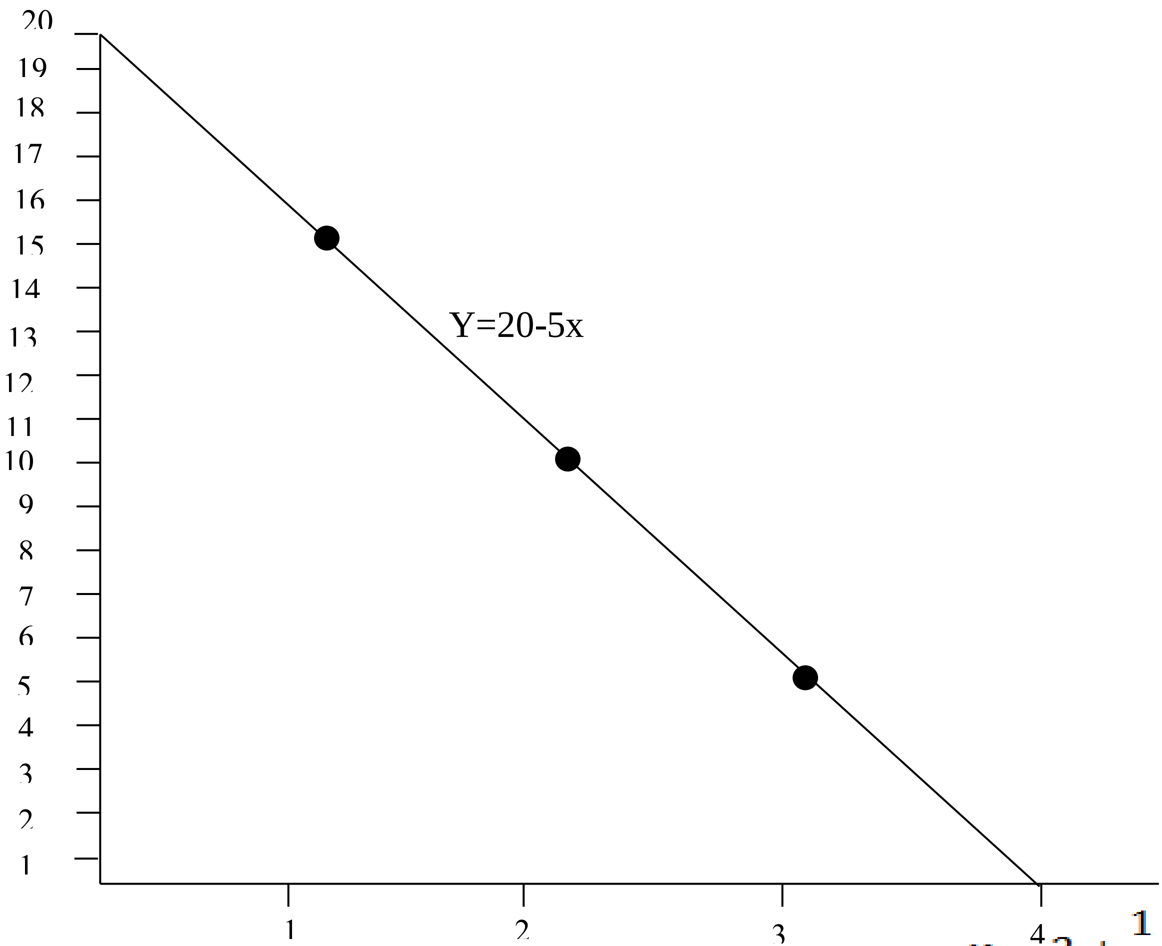


$y = 3 + \frac{1}{3}x$

		X	Y
X=0	$y = 3 + \frac{1}{3}(0) = 3$	0	3
X=1	$y = 3 + \frac{1}{3}(1) = 3\frac{1}{3}$	1	$3\frac{1}{3}$
X=2	$y = 3 + \frac{1}{3}(2) = 3\frac{2}{3}$	2	$3\frac{2}{3}$
X=3	$y = 3 + \frac{1}{3}(3) = 4$	3	4
X=4	$y = 3 + \frac{1}{3}(4) = 4\frac{1}{3}$	4	$4\frac{1}{3}$
X=5	$y = 3 + \frac{1}{3}(5) = 4\frac{2}{3}$	5	$4\frac{2}{3}$
X=6	$y = 3 + \frac{1}{3}(6) = 5$	6	5

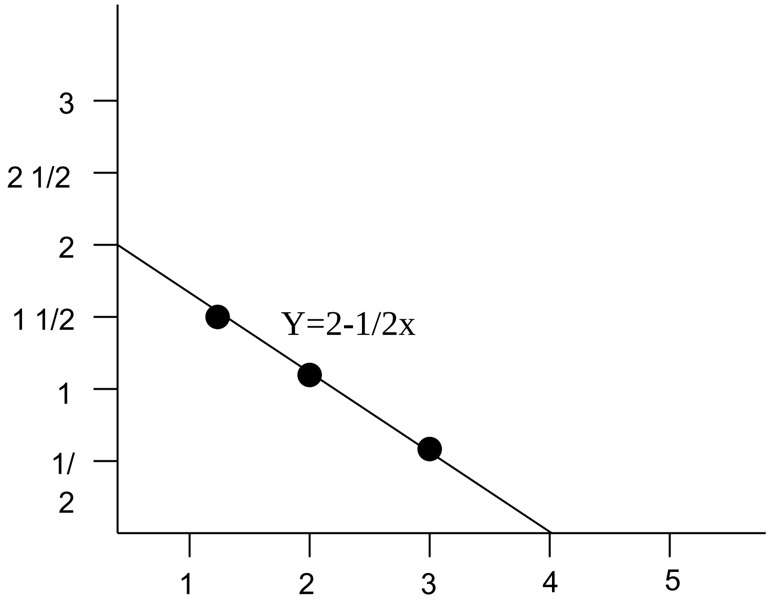


		X	Y
X=0	Y=20-5(0)=20	0	20
X=1	Y=20-5(1)=15	1	15
X=2	Y=20-5(1)=10	2	10
=3	Y=20-5(3)=5	3	5
X=4	Y=20-5(4)=0	4	0



$$y = 2 + \frac{1}{2}x$$

X=0	$y = 2 + \frac{1}{2}(0) = 2$	X	Y
X=1	$y = 2 + \frac{1}{2}(1) = 1\frac{1}{2}$	0	2
X=2	$y = 2 + \frac{1}{2}(2) = 1$	1	$1\frac{1}{2}$
X=3	$y = 2 - \frac{1}{2}(3) = \frac{1}{2}$	2	1
X=4	$y = 2 - \frac{1}{2}(4) = 0$	3	$\frac{1}{2}$
		4	0



Estimation of Linear Equation تقدير المعادلة الخطية

لقد تناولنا سابقاً الصيغة العامة للمعادلة الخطية من الدرجة الاولى

Y=F(x)

$$y = a \pm bx$$

ان المجهول في هذه المعادلة هو قيمة (a) ، (b) أي الثوابت اما قيم المتغيرين (y) والمستقل (x) فهي عادة ما تكون معلومة وعليه فان المعادلة يعني استخراج قيمتي (a,b) وحسب القوانين الاتية :

1) $b = \frac{n\varepsilon xy - \varepsilon x \varepsilon y}{n\varepsilon x^2 - (\varepsilon x)^2}$

حيث ان :

n = عدد قيم المتغير x او y .

ε = هو رمز مجموع القيم .

εx = مجموع قيم x .

εy = مجموع قيم y .

εxy = مجموع حاصل ضرب قيم (x) ، (y) .

εx^2 مجموع مربعات قيم x .

$(\varepsilon x)^2$ = مجموع مربع مجموع قيم المتغير x .

$$2 - a = \bar{y} - b\bar{x}$$

حيث ان :

$\bar{y}$ = يمثل الوسط الحسابي لقيم المتغير y .

$\bar{x}$ = يمثل الوسط الحسابي قيم المتغير x .

$$\bar{y} = \frac{\varepsilon y}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{\varepsilon x}{n}$$

Ex) Estimate and graph the following linear equation y=a∓bx if given the following values for X, y

قدر واحسب وارسم بياناً المعادلة الخطية اذا اعطيت القيم الاتية :

Y	X
2	1
4	2
2	3
3	4
8	5
7	6
6	7
8	8
7	9
3	10
$\varepsilon y = 50$	$\varepsilon x = 55$

n=10 $\varepsilon y = 50$ $\varepsilon x = 55$

b=$b = \frac{n\varepsilon xy - \varepsilon x \varepsilon y}{n\varepsilon x^2 - (\varepsilon x)^2}$

Xy	X^2
2	1
8	4
6	9
12	16
40	25
42	36
42	49
64	64
63	81
30	100
$\varepsilon xy = 304$	$\varepsilon x^2 = 385$

$$b = \frac{10(309)-(50)(55)}{10(385)-(55)^2} = \frac{340}{825} = 0.41$$

$$a = y^{-} - bx^{-}$$

$y^{-} = \frac{50}{10}$ =5

$$x^{-} = \frac{55}{10} = 5.5$$

$a = 5 - (0.41)(5.5)$
=2.745 ≈ 2.8
Y=a$\pm 0.41x$
$y = 2.8 \pm 0.41x$

Type of Economical Function أنواع الدوال الاقتصادية

١) Individual Demand Function دالة الطلب الفردي
هي تعبير عن العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة معينة (العامل المعتمد Variable lepemchex) وبين العوامل او المتغيرات المؤثرة في ذلك الطلب على هذه السلعة (العوامل المستقلة Indcpendent variable) .
عوامل مستقلة

Qd=$(p, p^{-}, 1p^{=}, I, I)$

Qd = الكمية المطلوبة من سلعة معينة

P = سعر هذه السلعة

P^{-} = سعر السلعة البديلة لهذه السلعة

$p^{=}$ = سعر السلعة المكملة لهذه السلعة

I = الدخل الفردي المخصص لهذه السلعة

T = ذوق المستهلك اتجاه هذه السلعة

Ex) The demand Function For deep دالة الطلب على لحم البقر

Qdp=450-10Pb-3-Psh-5Pch+2I

Qdp=Quantity demand of deef الكمية المطلوبة من لحم البقر

Pb=Price of beef سعر لحم البقر

Psh= Price of sheep (البديل) سعر لحم الغنم

Pch= Price of chicken (بديل او مكمل) سعر لحم

I = In come الدخل

٢-The demand Function For tea دالة الطلب على الشاي

$Qdt=a-bpt+b2Pc-b3Ps+b4I$

Qdt=Quantity demand of tea

Pt=Price of tea سعر الشاي

Pc= Price of coffee (البديلة) سعر القهوة

Ps= Price of sugar (المكملة) سعر السكر

I = Income الدخل

٢)Individual supply Function دالة العرض الفردي

وهي نفس العلاقة بين الكمية المعروضة من سلعة معينة (العامل المعتمد) وبين العوامل المؤثرة في عرض هذه السلعة (العوامل المستقلة) .

$Os= F(P_1, P_2, P_3, C, T)$

$Qs= a+b_1P_1-b_2P_2+b_3P_3+b_4c+b_5T$

حيث ان :

Qs=الكمية المعروضة من سلعة معينة

P1= سعر السلعة

P2= سعر السلعة البديلة

P3= سعر السلعة المكملة

C= تكاليف الانتاج لهذه السلعة

T=

Ex) Supply Function Fo sheep دالة العرض على الاغنام

$Qs\ Sh=500-300Psh-200Pc+250Pp+100c$

Qssh= Number of sheep heads عدد الاغنام المعروضة للبيع

Psh = Price of sheep سعر لحم الغنم

Pc= Price of Caw سعر البقر

Pp= Price of party

C= Cost of sheep تكاليف انتاج الاغنام

٢)Production Function دالة الانتاج

هي تعبير عن العلاقة الغنية بين الكمية المنتجة من سلعة معينة وبين العوامل المؤثرة في تلك الكمية المنتجة (الموارد الانتاجية) .

$Q=F(x_1, X_2, X_3\ldots\ldots\ldots\ldots, X_n)$

$Q=a+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+\ldots+b_nx_n)$

Q= الكمية المنتجة من أي سلعة

$X_1\ldots X_n=$ الموارد الانتاجية او الاقتصادية الداخلة في عملية الانتاج

Ex)Production Function For Wheat Crop دالة انتاج الحنطة

$Qw=350+4X_1+6X_2+8-5X_3+5X_4$

Qw= Quantity of wheat production الكمية المنتجة في الحنطة

X1= area Df land مساحة الارض

X2=Quantity of seeds كمية البذور

X3= quantity of fertilizer كمية السماد

X4= hours of labour ساعات العمل اليدوي او الميكانيكي

ويمكن التعبير عن دالة الانتاج بصيغة رياضية اخرى تبعاً للموارد الانتاجية الاساسية الداخلة في عملية الانتاج

L=Labour ساعات العمل Lc=Capital راس العمل A=area (عنصر الارض ثابت)

Q=F(U, L)

Q=a+b, Lc + b2L الصيغة الاساسية لدالة الانتاج

٤)Total Cost Function دالة التكاليف الكمية

هي تعبير عن العلاقة بين التكاليف المصروفة على عملية الانتاج لسلعة معينة (المتغير معتمد) وبين كمية الانتاج المنتجة من تلك السلعة (العامل المستقل) .

Tc = F (Q)

TC= a+bQ الصيغة الرياضية لدالة الانتاج

Tc= تكاليف الانتاج لسلعة معينة

Q= كمية الانتاج لتلك السلعة

وبما ان التكاليف الكمية تساوي التكاليف الثابتة مضافاً اليها التكاليف المتغيرة .

TC = TFC تكاليف ثابتة + TVC تكاليف متغيرة

a = TFC تكاليف الانتاج الثابتة

b = TVC تكاليف الانتاج المتغيرة

Ex) TC = 1000 + 75 QC

TC = quantity of Corn تكاليف انتاج الذرة الصفراء

١٠٠٠= TFC = a تكاليف ثابتة

٧٥ TVC = b تكاليف متغيرة

٤)Total Revenue Function دالة الايرادات الكمية

هي تعبير عن العلاقة الطردية بين الايرادات الكمية المتحصل عليها من بيع السلع التي تم انتاجها وبين كمية انتاج تلك السلعة المنتجة

TR= F(Q) .

TR= a + bq

TR=total revenue الايرادات الكلية

Q= quantity of production الكمية المنتجة

Ex) TR = 1500 + 10 Q

TR = Total revenue of ouion الايرادات الكلية للبصل

Qo = quantity of onion الكمية المنتجة من البصل

٦)Total Profits Function دالة الارباح الكلية

هي تعبير ن العلاقة الطردية بين الكلية المتحصل عليها من عملية انتاج سلعة معينة وبين كمية انتاج تلك السلعة

$\pi= F(Q)$

$\pi=a+bQ$

π=total Profits الربح الكلي

Q=quantity of production كمية الانتاج

ان الارباح الكلية هي الفرق بين الايرادات الكلية المتحصل عليها من بيع السلع المنتجة وبين تكاليف انتاج تلك السلع

تكاليف π = الايرادات TR-TC تكاليف

TR=F(Q)

Π=F(Q)

Ex)Given TR= 1500+10Q0 and TC=300+200 Find profits Function of onion ?

ان اعطيت دالة الايرادات الكلية التالية لمحصول البصل ودالة تكاليف انتاجية فأوجد دالة الارباح الكلية للمحصول

$\pi_0=TR_0-TC_0$

=1500+10Q0-(300+2Q0)

=1500+10Q0-300-2Q0

$\pi_0=1200+8Q_0$

٧)Consumption Function دالة الاستهلاك

هي تعبير عن العلاقة الطردية بين الكمية المستهلكة من سلعة معينة وبين الدخل المعروف على شراء تلك السلعة .

C =F(I)

C=+bI

C=Consumption استهلاك سلعة معينة

I=Income الدخل المعروف لشراء السلعة

b= الميل الحدي للاستهلاك

Ex)Ct=0.3+0.5It

Ct=consumption of Tomate الكمية المستهلكة من الطماطة

It= Income of Tomato = الدخل المعروف لشراء الطماطة

٨)Saving Function دالة الادخار

وهي تعبير عن العلاقة الطردية بين ادخار كمية معينة من المال وبين دخل الشخص المدخر

S=F(I)

S=-a+bI الصيغة العلمية لدالة الادخار

S=saving الكمية المدخرة

I= Income كمية دخل المدخر
b=الميل الحدي للادخار
Ex) S=-24+0.4I

٩)Investment Function دالة الاستثمار

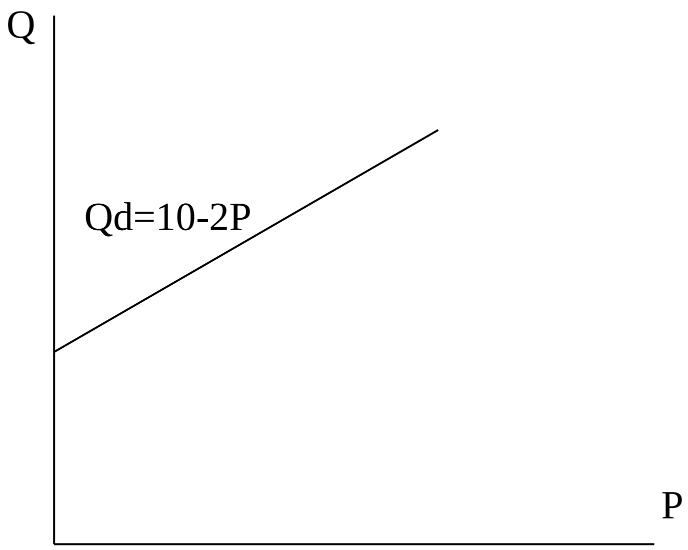
وتسمى ايضا بدالة السيولة النقدية او دالة الطلب على النقود لغرض القيام بمشروع انتاج معين ، وهي تعبير عن العلاقة العكسية بين كمية النقود المعدة للاستثمار وبين سعر الفائدة المفروضة على ذلك الاستثمار .

In=F(V)
In=a-10V
In=investment of Money الطلب على النقود لغرض الاستثمار
r=rate of interest (interest rate) سعر الفائدة
ex) in=15-0.7r

slop الميل : ميل خط المستقيم هو ظل الزاوية الواقعة بين الخط والمحور الافقي ويكون هذا الميل اما سالب او موجب ويتوقف على شكل الدالة والتغير في المتغير المعتمد في تلك الدالة ويكون هذا التغير على المحور العمودي ويقسم على التغير بالمتغير المستقل على المحور الافقي فإذا كان لدينا دالة الطلب يمكن يساوي :

Qd=10-2P

$$slop = \frac{change\ in\ quantity}{change\ in\ Price} = \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$



P السعر	10-2P	Q الكمية المطلوبة
1	10-2(1)	8
2	10-2(2)	6
3	10-2(3)	4
4	10-2(4)	2

$$slop = \frac{\Delta Q}{\Delta P} = \frac{6-8}{2-1} = \frac{-2}{1} = -2$$

C=24+0.3y

C= الاستهلاك

Y1=الدخل

الميل موجب لان العلاقة بين الدخل والاستهلاك علاقة طردية

المرونة Elastieity : هي التغير النسبي بالمتغير المعتمد مقسومة على التغير النسبي في المتغير المستقل يستخدم مقياس المرونة في الاقتصاد لمقارنة المتغيرات النسبية في المتغيرات المعتمدة (الكميات المطلوبة في سلع مختلفة نتيجة التغير المتغيرات المستقلة ونقصد هنا الاسعار ذات العلاقة) .

$$E = \frac{Percentage\ Change\ in\ quantity}{Percentage\ Change\ in\ Price}$$

١-Demand Elasticity مرونة الطلب السعرية

$$Ed = \frac{Perntage\ change\ in\ quantity\ demand}{Percentage\ change\ in\ Price}$$

$$Ed = \frac{\frac{\Delta QD}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}}$$

$$\frac{\Delta Qd}{Q} = \div \frac{\Delta P}{P}$$

$$Ed = \frac{\Delta Qd}{\Delta P} . \frac{P}{Q}$$

مرونة الطلب تكون دائما سالبة ما عدا في حالة واحدة وهي الطلب على السلع الرديئة (سلع رديئة جيني)

Ex)Find demand elasticity Demand the demand equation when P=2
P=25-0.50

$$Ed = \frac{\Delta Qd}{\Delta P} . \frac{P}{Q}$$

في الدالة أعلاه نستخرج قيمة Q

$$Q = \frac{25}{0.5} - \frac{P}{0.5}$$

$$Ed = (-0.5)\frac{2}{48} = -0.09$$

Ex)Find Demand elasticity the demand equastion when P = 2

2!=10-2P

$$Ed = \frac{\Delta Qd}{\Delta P} . \frac{P}{Q}$$

2Q=10-2P

$$Q = \frac{10}{2} - \frac{P}{2}$$

Q=5-P

Q=5-2=3

$$Ed = -1\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

12=3Q+0.5P

$$Q = \frac{12}{3} - \frac{0.5}{3}P$$

Q=4-0.167

$$Ed = \frac{\Delta Q}{\Delta P} . \frac{P}{Q}$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta d} = -0.167$$

$$Ed = -0.167(\frac{2}{Q})$$

Q=4-0.167(2)=4-0.332=3.67

$$Ed = -0.167\left(\frac{2}{367}\right) = -0.09$$

Supply Elasticity مرونة العرض

التغير النسبي في الكمية المعروضة

$$Es = \frac{Percentage\ change\ in\ quantity\ Supply}{Percentage\ change\ in\ price}$$

التغير النسبي في السعر

Es=$\frac{\frac{\Delta Qs}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}}$

$$= \frac{\Delta Qs}{Q} \div \frac{\Delta P}{P}$$

$$= \frac{\Delta Qs}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q}$$

ميل دالة العرض دائماً موجبة بسبب العلاقة الطردية بين الكمية المعروضة والسعر

Ex)Find the supply elasticity from the following equations when P=10

1. P=8+0.4Q
2. 7=3P-0.5Q
3. -15=2Q-4P

1.P=8+0.4Q

$$Es = \frac{\Delta Qs}{\Delta P} \cdot \frac{P}{Q}$$

0.4Q=-8+P

Q=$\frac{-8}{0.4} + \frac{1}{0.4}P$

Q=-20+2.5P

Q=-20+2.5(10)

=-20+25=5

2)0.5=3P-7

0.5Q=-7+3P

$$Q = \frac{-7}{0.5} + \frac{3}{0.5}P$$

Q=-14+6P

Qs=-14+(6×10)=-14+60=44

Es=$\frac{\Delta Q}{\Delta P}.\frac{P}{Q}$

$$= 3\left(\frac{10}{44}\right) = \frac{30}{44} = 0.68$$

3)2Q=-15+4P

$$Q = \frac{-15}{2} + \frac{4}{2}P$$

$$Q = \frac{-15}{2} + \frac{4}{1}Q$$

$$Q = -7.5 + 2P$$

$$Q = 7.5 + 2(10)$$

$$Q = -7.5 + 2(10) = 12.5Q = 12.5$$

$$Es = \frac{\Delta Qs}{\Delta P}\frac{P}{Q}$$

$$Es = 2\left(\frac{10}{12.5}\right)$$

$$= 4\left(\frac{10}{12.5}\right) = \frac{40}{12.5} = 3.2$$

$$Er = \frac{20}{12.5} = 1.6$$

٣)Income Elasticity **مرونة الطلب الداخلية**

$$Ey=\frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta y}{y}}=\frac{\Delta Q}{Q}\div\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta Q}{Q}\times\frac{\Delta y}{y}=\frac{\Delta Q}{\Delta y}.\frac{y}{Q}$$

الميل يكون موجب ما عدا في حالة واحدة وهي سلعة Geven

٤-Cross demand elasticity مرونة الطلب التقاطعية

$$E=\frac{\Delta Q}{\Delta P}.\frac{P}{Q}$$

P=Substitves Price أسعار السلع البديلة

Or complements Price أسعار السلع المكملة

تمثل مرونة الطلب المتقاطعة الاستجابة النسبية للكمية المطلوبة من سلعة اتجاه التغيرات في اسعار السلع البديلة او المكملة الميل في حالة السلع البديلة (المنافسة) يكون موجب لان ارتفاع سعر السلع البديلة تؤدي الى زيادة الكمية المطلوبة حيث ان المستهلك يحول استهلاكه من السلع ذات السعر المرتفع الى السلعة البديلة لذلك فالمرونة التقاطعية او المتقاطعة في هذه الحالة تكون موجبة اما في حالة السلع المكملة يكون الميل سالب كذلك المرونة التقاطعية فالطلب على سلعة مكملة يتأثر سلبياً لانه طلب مشتق من طلب على سلعة أخرى كالطلب على اكبر مشتق من الطلب على اقلام اكبر حيث ان المنفعة المتحققة من السلعة المكملة تتوقف على توفر السلع الاخرى .

Ex)Find the demand elasticity income elasticity and cross elasticity from this function if

P1=10 / P2=5 / y=100

Q=10P1-0.2P2+0.05y

$$Ed=\frac{\Delta Qd}{\Delta P}.\frac{P}{Q}$$

$$Ey=\frac{\Delta Q}{\Delta y}.\frac{y}{Q}$$

$$E=\frac{\Delta Q}{\Delta P2}.\frac{P_2}{Q}$$

Q=10-10-0.2(5)+0.05(100)

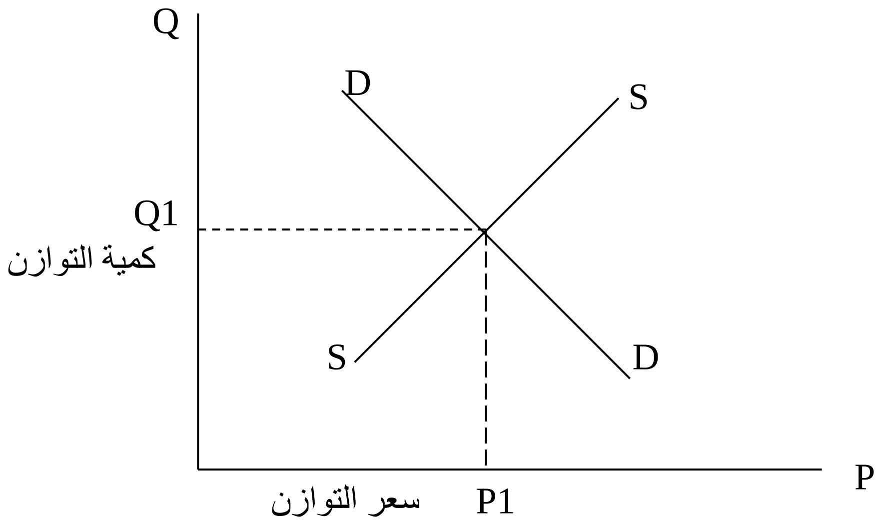
Q=4

$$Ed = -1\left(\frac{10}{4}\right) = -2.5$$

$$Ey = 0.05\left(\frac{100}{4}\right) = 1.25$$

$E = -0.2\left(\frac{5}{4}\right) = -0.25$ السلعة مكملة

Market Equilibrium توازن السوق : يتحقق التوازن في السوق عندما تتوازن الكمية المعروضة والمطلوبة من سلعة معينة عند سعر واحد ومنحنى عرض السلعة ومنحنى الطلب عليها في هذا الشكل.



في حالة السلع الاعتيادية وبفرض ثبات جميع العوامل المؤثرة في الكمية المطلوبة والمعروضة باستثناء سعر السلعة P1 هو سعر التوازن وعلى هذا السعر المنتجون مستعدين لانتاج أي كمية ويكون المستهلكون راغبون في شراء هذه الكمية Q1 فاذا افترضنا معادلة الطلب

Qd=10-2P……….(1)

Qs=-5+3P…………(2)معادلة العرض

الكمية المعروضة Qs = Qd الكمية المطلوبة

10-2P=-5+3P

10+5=2P+3P

15=5P

$$P = \frac{15}{5}$$

Priceequilibrium سعر التوازن ٣ =

نعوض عن قيمة P في إحدى المعادلتين

Qd=10-2(3)=4

Quantity Equilibrium = Q = 4

ويمكن ان تحل بطريقة اخرى هي طريقة الحذف نضرب المعادلة (١)X٣ المعادلة (٢) x٢ ينتج :

3Qd=30-6P

2Qs=-10+6P

5Q=20

$Q = \frac{20}{5} = 4$ كمية التوازن

نعوض في Q=4 في إحدى المعادلتين:

4=5+3P

4+5=3P

9=3P

P=3 سعر التوازن

Shifts of Demand of supply Curves انتقال منحنيات العرض والطلب

عند رسم منحنيات العرض والطلب نفترض ثبات جميع العوامل المؤثرة في الكميات المطلوبة والمعروضة باستثناء السعر أي ان المنحنى يبين العلاقة بين الكمية والسعر فقط فعند تغير أي من العوامل التي افترضناها ثابتة فان ذلك يؤدي الى انتقال المنحني من اليمين الى اليسار او بالعكس فعند تمثيل المعادلة بشكل بياني يوضع المتغير المعتمد على المحور العمودي والمتغير المستقل على المحور الافقي بحيث تكون الكمية على المحور العمودي باعتبارها متغير معتمد والسعر على المحور الافقي باعتباره متغير مستقل ولكن يمكن ان يحصل العكس عند عكس الدالة وسنلاحظ ان انعكاس الدالة لا يؤثر على اتجاه المنحنى بالنسبة لدالة الطلب .

والتغير يحصل بالجزء الثابت فقط

١-انتقال منحنى الطلب Shifts of Demand Curve

Qd=10-5P+0.2y200

اذا كان الدخل y ثابت عند المستوى (٢٠٠) فان العلاقة بين الكمية المطلوبة والسعر تكون كالاتي :

Qd=10-5P+0.2(200)

Qd=10-5P+40

Qd=50-5P

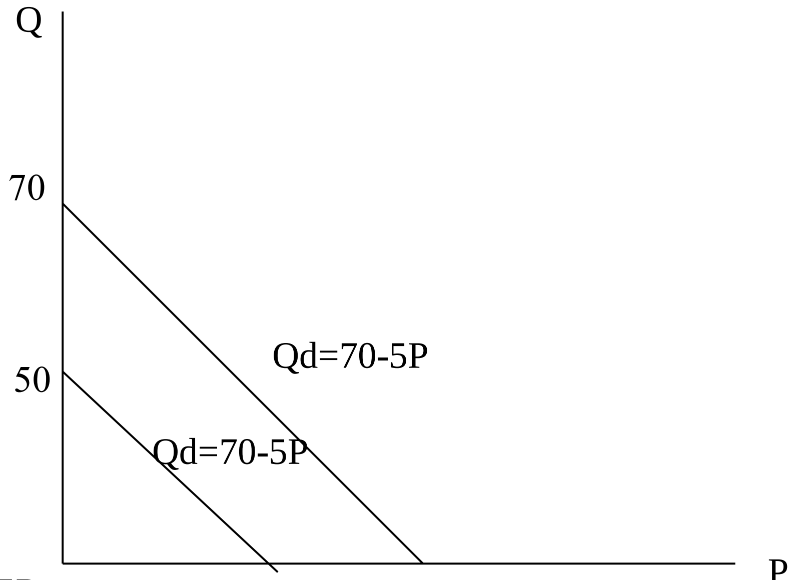
اذا زاد الدخل الى ٣٠٠ وحدة معادلة الطلب تكون

Qd=10-5P+0.2(300)

Qd=10-5P+60

Qd=70-5P

عندما ارتفع الدخل من ٢٠٠-٣٠٠ وحدة انتقل منحنى الطلب من اليسار الى اليمين أي الى الاعلى وبالعكس في حالة انخفاض الدخل .



Qd=50-5P

Qd=70-5P

Qd=50-5P

5P=50-Qd

$$P = \frac{50}{5} - \frac{1}{5}Qd$$

P=10-0.2Qd

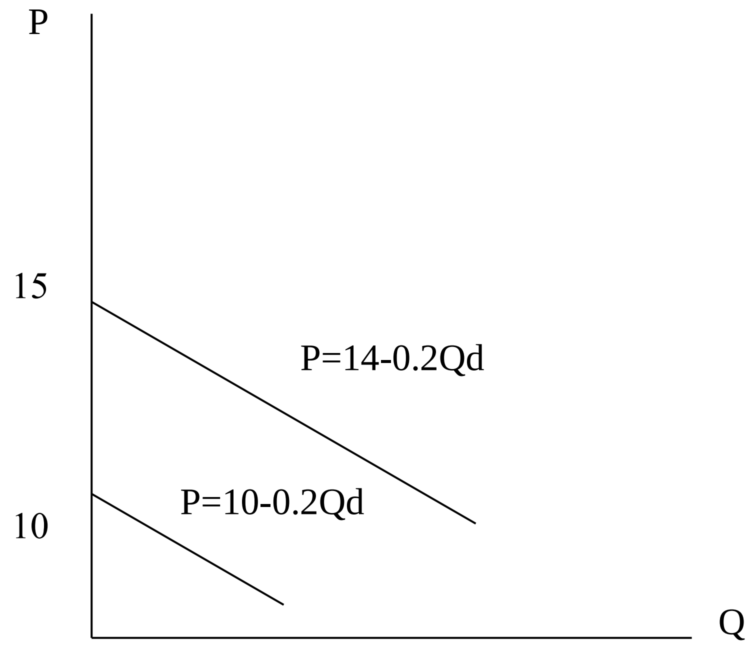
في حالة اذا كان الدخل = ٢٠٠

Qd=70-5P

5P=70-Qd

$$P = \frac{70}{5} - \frac{1}{5}Qd$$

P=14-0.2Qd في حالة اذا كان الدخل = ٣٠٠

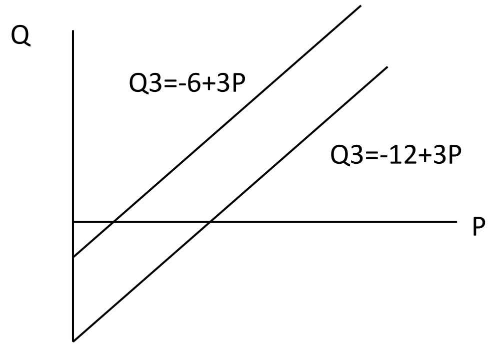


٢-انتقال منحنى العرض Shifts of Supply Curve

يتغير اتجاه منحنى العرض عند انعكاس الدالة نفرض معادلة العرض كالاتي :

Qs=-6+3P قبل فرض الضريبة

فلا فرضت ضريبة على البائعين هي (T) لكل وحدة واحدة و (T) يمكن قياسها بالنقود وهذا يعني ان البائعين لم يستلموا جميع سعر السوق لكل وحدة مباعة من السلعة انما يستلمون سعر السوق (P) مطروحة منه الضريبة المدفوعة على كل وحدة مباعة لذا فإن سعر العرض لكل وحدة



سيكون بالنسبة للمنتجين (العارضين) (P-T) فإذا كانت (T) الضريبة تساوي (٢) وحدة فإن دالة العرض تصبح كالأتي:

$Qs=-6+3(P-2)$

$Qs-6+3P-6$

$Qs=-12+3P$

وهذا يعني ان منحنى العرض ينتقل الى اليمين بفعل الضريبة أي ينتقل الى الاسفل

التوازن الغير الخطي Non Linear equilibrium

نفترض ان حالة في السوق هي حالة من الدرجة الثانية أي ان دوال العرض والطلب تتمثل بمعادلات من الدرجة الثانية ويعني ذلك ان منحنى الطلب والعرض يتقاطعان في نقطتين فتهمل القيم السالبة لان ليس لها أي معنى اقتصادي فإذا كانت لدينا دالة طلب في السوق هي دالة من الدرجة الثانية (غير خطية) ودالة العرض دالة خطية .

$Qd=q-p^2$

$Qs=-3+4P$

$Qd=Qs$ عدم التوازن

$٩-P_{٢}=-٣+٤P$

$P_2+4P-12=0$

نحاول الحصول على معادلة واحدة تضم متغير واحد وهو (P) لكي نحصل على سعر التوازن وكمية التوازن وكل هذه المعادلة من الدرجة الثانية هناك طريقتين

١.التحليل الى العوامل .   ٢.الدستور

1-(P+6)(P-2)=0

P=-6 تهمل

P=2

P=2 نعوض في معادلة العرض

Q=-3+4(2)

=-3+8=5

سعر التوازن P=٢

وكمية التوازن Q=٥

$2\text{-}x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4 - ac}}{2a}$

$P_2+4P-12=0$

$$P = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-12)}}{2(1)}$$

$$P = \frac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-4 \pm 8}{2}$$

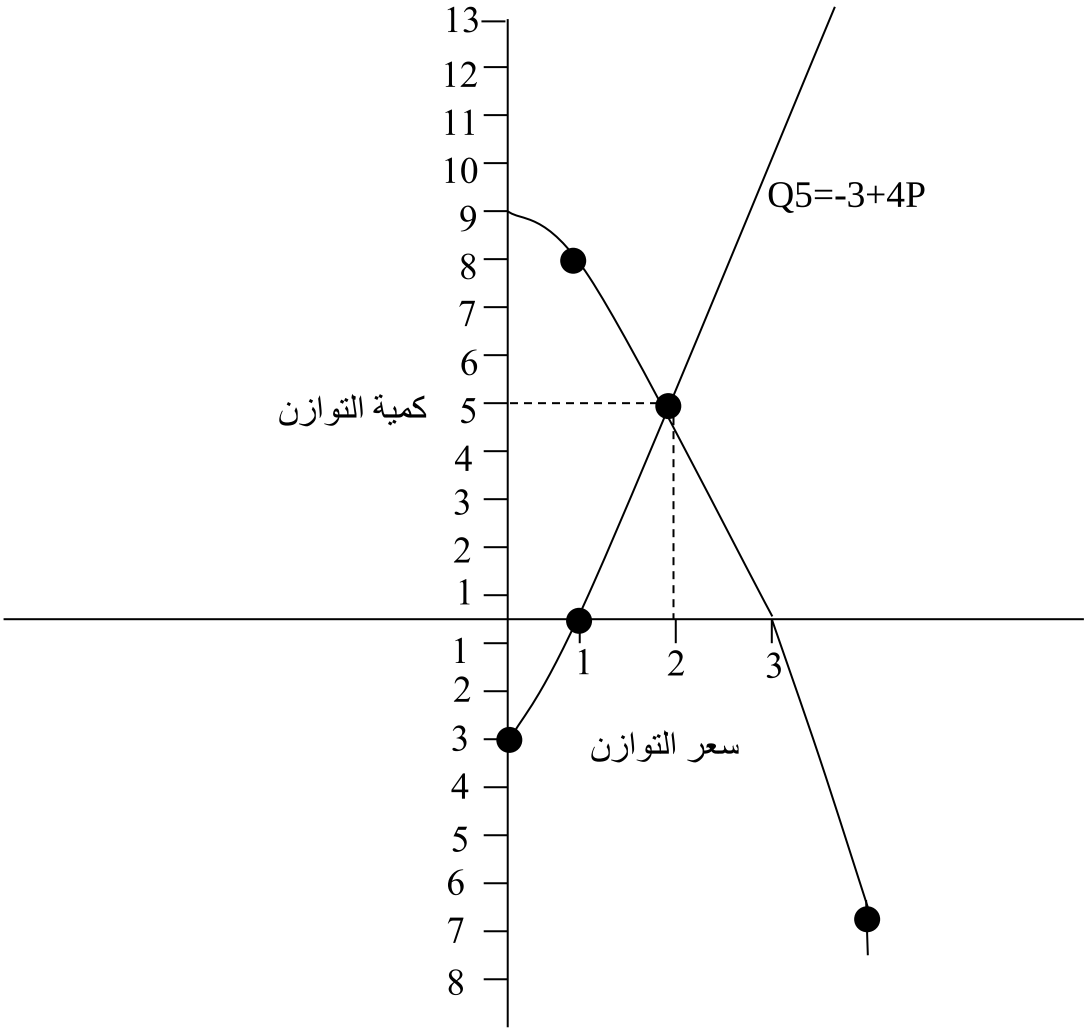
$P = \frac{-4+8}{2} = 2$ او $P = \frac{-4-8}{2} = -6$ تهمل

ثم نعوض عن قيمة (P) في دالة العرض فنحصل على كمية التوازن Q=5

$Qd=9-p^2$

Qs=-3+4P

$Qd=9-P^2$	P	$Qs=-3+4P$
9	0	-3
8	1	1
5	2	5
0	3	9
-7	4	13



Use of deviravtive in Economic استخدام المشتقات في الاقتصاد

$Qd=a-b_1p_1+b_2p_2-b_3p_3+b_4I$

يمكن استخراج اربع مشتقات من معادلة الطلب أعلاه :

$\frac{dQd}{dp_1} = -b_1$ مشتقة الدالة بالنسبة لسعر السلعة

$\frac{dQs}{dP_2} = +b_2$ مشتقة الدالة بالنسبة لسعر السلعة البديلة

$\frac{dQd}{dP_3} = -b_3$ مشتقة الدالة بالنسبة لسعر السلعة المكملة

$\frac{dQd}{dI} = +b_4$ مشتقة الدالة بالنسبة للدخل

Drive the following Demand Function and explaining

$Qd=450-10P_1+3P_2-5P_3+2I$

$$\frac{dQd}{dp_1} = -10 \frac{dQd}{p_2} = 3 \frac{dQd}{dp_3} = -5 \frac{dQd}{dI} = 2$$

١)تفسير مشتقة دالة الطلب

تشير مشتقة الدالة بالنسبة لسعر الشاي $\frac{dQd}{dp_1} = -10$ حيث ان قيمة (P_1=-١٠) وتعني اذا ما زاد سعر الشاي بمقدار وحدة واحدة فان الكمية المطلوبة تقل بمقدار (١٠ وحدات) والعكس صحيح اذا انخفض سعر الشاي بمقدار وحدة واحدة فان الكمية المطلوبة سوف تزداد بمقدار (١٠ وحدات) .

٢)تفسير مشتقة الدالة البديلة

$$\frac{dQd}{dP_2} = +3$$

حيث ان (P_2) هو سعر القهوة وهي سلعة بديلة للشاي ويعني الرقم (٣) اذا ما زاد سعر الشاي بمقدار دينار واحد فان الكمية المطلوبة من القهوة سوف تزداد بمقدار (٣ وحدات) والعكس صحيح اذا انخفض سعر الشاي بمقدار وحدة واحدة فان الكمية المطلوبة من القهوة سوف تقل بمقدار (٣ وحدات) .

٣)تغير مشتقة الكمية المطلوبة بالنسبة لسعر السكر وهو سلعة مكملة

$$\frac{dQd}{dp_3} = -5$$

ان الرقم (٥-) اذا ما زاد سعر السكر بمقدار وحدة واحدة فان الكمية المطلوبة من سعر الشاي سوف تنخفض بمقدار (٥ وحدات) والعكس صحيح اذا انخفض سعر السكر بمقدار وحدة واحدة فان الكمية المطلوبة والشاي سوف تزداد بمقدار (٥ وحدات) .

٤)تغير مشتقة دالة الدخل

$$\frac{dQd}{I} = 2$$

ان الرقم (٢) يعني اذا ما زاد دخل الفرد بمقدار وحدة واحدة فان الكمية المطلوبة من الشاي سوف تزداد بمقدار (٢ وحدة) والعكس صحيح .

مشتقات دالة الانتاج

$Q=a+b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+\dots b_nx_n$

Or

Q=F(K.L)

K= راس المال Capital

L= العمل Labore

Q=Production الانتاج

أ-متوسط الانتاج Average Production AP

هو عبارة عن حاصل قسمة الكمية المنتجة من سلعة معينة على عدد وحدات المورد الانتاجي المستخدم في عملية انتاج تلك السلعة

$$AP = \frac{Q \text{ كمية الانتاج}}{X_n \text{ عدد وحدات المورد المستخدم}}$$

ب-الناتج الحدي Marginal Production mp

هو عبارة عن التغير الحاصل بالكمية المنتجة من سلعة معينة (زيادة او نقصان) نتيجة التغير في كمية او عدد وحدات المورد الانتاجي المستخدم في العملية الانتاجية بمقدار وحدة واحدة والناتج الحدي من الناحية الرياضية يمثل ميل منحنى دالة الانتاج .

$$MP = \frac{dQ}{dxn}$$

وبما ان الميل يمثل مشتقة الدالة عند نقطة معينة فالناتج الحدي اذن هو مشتقة دالة الانتاج

Ex) $Qw=350+4X_1+6X_2+8.5X_3+5X_4$

Qw= كمية انتاج الحنطة

X1= المسافة المزروعة

X2= كمية البذور

X3= كمية السماد

X4= ساعات العمل

$$APx_1=\frac{350+4x_1+6x_2+8.5x_3+5x_{34}}{X_1}$$

$$=\frac{350}{X_1}+4+6\frac{x_2}{x_1}+8.5\frac{x_3}{x_1}+5\frac{x_4}{x_1}$$

$$APX_2=\frac{350+4X_1+6X_2+8.5X_3+5X_4}{X_2}$$

$$=\frac{350}{X_2}+4\frac{X_1}{X_2}+6+8.5\frac{X_3}{X_2}+5\frac{X_{43}}{X_2}$$

$$APX_3=\frac{350+4X_1+6X_2+8.5X_3+5X_4}{X_3}$$

$$=\frac{350}{X_3}+4\frac{X_1}{X_3}+6\frac{X_2}{X_3}+8.5+5\frac{X_4}{X_3}$$

$$APX_4=\frac{350+4X_1+6X_2+8.5X_3+5X_4}{X_4}$$

$$APX_4=\frac{350}{X_4}+4\frac{X_1}{X_4}+6\frac{X_2}{X_4}+8.5\frac{X_3}{X_4}+5$$

وهكذا يمكن استخراج متوسط الانتاج لبقية الموارد الانتاجية في الدالة

وهكذا يمكن استخراج الناتج الحدي لبقية الموارد الانتاجية الداخلة في التغير

$$MPX_1 = \frac{dQw}{dX_1}$$

$\mathrm{MP}X_4 = 4$

$\mathrm{MP}X_2 = \frac{dQw}{dX_2} = 6$

$$PX_3 = \frac{dQw}{dX_3} = 8.5$$

$$MpX_4 = \frac{dQw}{dX_4} = 5$$

Ex)Given the following production Function

Q=36KL-2K^2-3L^2

Find the Marginal Production of capital (K) and marginal Production of labour (L)

$$MP_k = \frac{dQ}{dK}$$

=36L-4K

$$MPL = \frac{dQ}{dL}$$

MPL=36K-6L

$$AP_k = \frac{36KL - 2K^2 - 3L^2}{K}$$

=36L-2K-3$\frac{L^2}{K}$

$$APL = \frac{36KL - 2K^2 - 3L^2}{L}$$

$APL = 36K - 2\frac{K^2}{L}$-3L

Derivative of Costs مشتقات دالة التكاليف

TC تكاليف كلية = TFC تكاليف ثابتة + TVC تكاليف متغيرة

TC=a+bQ

Fixed Cost ثابتة

Variable Cost متغيرة

التكاليف الثابتة : وهي تلك الاموال او النفقات التي يدفعها المنتج سواء انتج ام لم ينتج أي هي تلك التكاليف التي لا ترتبط بالعملية الانتاجية .

التكاليف المتغيرة : وتسمى بالتكاليف المباشرة وهي تلك الاموال التي ترتبط بعملية الانتاج أي ان يدفعها المنتج عندما يقوم بالعملية الانتاجية .

***القوانين :**

١.متوسط التكاليف الكلية ATC Average Total Cost

$$ATC = \frac{TC}{Q}$$

٢.متوسط التكاليف المتغيرة AVC Average Variable Cost

$$AVC = \frac{TVC}{Q}$$

التكاليف الحدية MC Marginal Cost

هي عبارة عن التغير في التكاليف الكلية نتيجة للتغير الكمية المنتجة في سلعة معينة بمقدار وحدة واحدة والكلفة الحدية من الناحية الرياضية تمثل ميل منحنى دالة التكاليف (مشتقة دالة التكاليف) .

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = b$$

$$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta Q}$$

TC=a+bQ

$$\frac{dTC}{dQ} = b$$

$$MC = \frac{dTC}{dQ}$$

لان التكاليف الحدية تمثل تغير في التكاليف الكلية فقط وتشمل التكاليف المتغيرة

Ex) If TC = 23 + 70 + Q^2

Find derivatives of this function ?

$$ATC = \frac{TC}{Q}$$

$$= \frac{23 + 70 + O^2}{Q}\ Average\ Total\ Cost$$

$$AFC = \frac{TFC}{Q} = \frac{23}{Q}$$

$$AVC = \frac{TVC}{Q} = \frac{7Q + Q^2}{Q}$$

$$= \frac{Q(7 + Q)}{Q} = 7 + Q\ Average\ Variable\ Cost$$

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 7 + 2Q\ Marginal\ Cos$$

$$MC = \frac{dTVC}{dQ}$$

$$\frac{dTFC}{dQ} = Zero$$

Ex)Find the Marginal and Average function from the following total cost function and then evaluat at

Q=3 and Q=5 أوجد دالة الكلفة الحدية والمتوسطة من دالة التكاليف الكلية وقد او احسب

$1-TC=3Q^2+7Q+12$

$2-TC=35+5Q+2Q^2+2Q^2$

$1-ATC=\frac{TC}{Q}$

$=\frac{3Q^2+7Q+12}{Q}=\frac{3(3)^2+7(3)+12}{3}=\frac{60}{3}=20$

When Q = 5

$ATC=\frac{3(5)^2+7(5)+12}{5}=24.4$

$MMc=\frac{dTC}{dQ}=60+7$

Q=3 MC=6(3) + 7 = 25

Q=5 MC= 6(5) + 7 = 37

مشتقات دالة الايرادات الكلية Revenue Function

الايرادات الكلية : هي عبارة عن المبالغ التي يحصل عليها المنتج من بيع كمية الانتاج التي حصل عليها من سلعة معينة مضروبة ي سعر تلك السلعة .

R=Q.P

TR=a+bQ

Q= الكمية

P= السعر

ATR متوسط الايراد الكلي

S الربح = TR الايرادات - TC التكاليف

Marginal Revenue الايراد الحدي

$MR = \frac{\Delta TR}{\Delta Q} = \frac{dTR}{dQ}$

Ex) if TR= 750 – $4Q^2$ Find the Average total Revenue and Marginal Revenue

$$ATR = \frac{TR}{Q}$$

$$= \frac{750-4Q^2-4Q^2}{Q} = \frac{(75-4Q)}{Q}$$

=75 – 4Q

$$MR = \frac{dTR}{dQ}$$

MR=75 -8Q

Ex) If geven the demand function P=30-2Q Find the average and Marginal revenue function at Q=4 and Q=5

$$ATR = \frac{TR}{Q}$$

$TR = ATR.Q \qquad ATR = P$ سعر الوحدة الواحدة

$$TR = P.Q$$

$$TR = (30-2Q)Q$$

$$TR = 30Q - 2Q^2$$

$$ATR = \frac{(30-2Q)Q}{Q} = 30 - 2Q$$

ATR at Q =4 30-2(4) = 22

ATR at Q = 5 30-2(5) = 20

MR=$\frac{dTR}{dQ}$

=30-4Q

MR at Q=4   30-4(4) = 14

MR at Q=5   30-4(5) = 10

Profit Function مشتقة دالة الربح

$\pi = TR - TC$

التكلفة الكلية – الايراد الكلي = الربح

$\pi = a + bQ$

$$\frac{d\pi}{dQ} = b$$

Ex) $\pi = 1200 - 8Q$

$$\frac{d\pi}{dQ} = 8$$

π=TR-TC

$$\frac{d\pi}{dQ} = \frac{dTR}{dQ} - \frac{dTC}{dQ}$$

$\frac{dTR}{dQ} = MR$ الايراد الحدي $\frac{\mathrm{dTC}}{\mathrm{dQ}} = \mathrm{MC}$ التكلفة الحدية

Ex) TR=75Q+4Q^2

$TC = 3Q^2 + 7Q + 12\ Find\ \frac{d\pi}{dQ}$

$MR = 75 - 8Q$

MC=6Q+7

$$\frac{d\pi}{dQ} = 75 - 8Q - (6Q + 7)$$

=75-8Q-6Q-7

$$\frac{d\pi}{dQ} = 75 - 8Q - (6Q + 7)$$

=75-8Q-6Q-7

$$\frac{d\pi}{dQ} = 68 - 14Q$$

(تعظيم وتدنية الدالة (ايجاد النهايات العظمى والصغرى)

Maximization & Minimization of Function

ان أي منحنى دالة عندما يصل الى اعلى او ادنى له فإن ميله عند هذه النقطة يصبح صفر وبما ان الميل يمثل مشتقة الدالة من الناحية الرياضية لذلك عند حساب أدنى او اعلى قيمة يمكن ان يصلها منحنى أي دالة يجب اتباع ما يأتي :

١. استخراج المشتقة الاولى للدالة ومساواتها مع الصفر لحساب النقطة الحرجة .
٢. استخراج المشتقة الثانية للدالة فإذا كانت قيمتها سالبة فان الدالة والنقطة الحرجة التي يتم الحصول عليها من المشتقة الاولى هي نقطة نهاية عظمى وبالعكس اذا كانت قيمة المشتقة الثانية موجبة فإن النقطة الحرجة التي الحصول عليها من المشتقة الاولى هي نقطة نهاية صغرى .

Y=F(x) : بالنسبة لتعظيم دالة

$\frac{dy}{dx} = 0$ نقطة موجبة $Critical\ Value$

For are lative Maximum

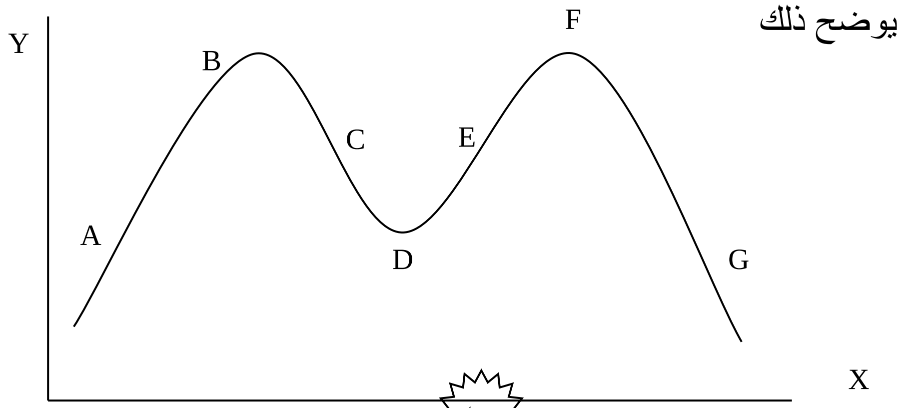
$\frac{d^2y}{dx^2}$ 70 قيمة سالبة

And for arelative minimum : تدنية الدالة

$\frac{dy}{dx} = 0$ لايجاد النقطة الحرجة

$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ اكبر من الصفر

والرسم البياني يوضح ذلك



نلاحظ من خلال الرسم قد وصل الى اعلى نقطة لـه مرتين عند النقطـة (F, B) وبذلك يكون ميلـه (المشتقة الاولى) يساوي صفراً عندها هاتين النقطتين وقد وصـل هذا المنحنـى أدى نقطـة لـه (D) وبذلك يصبح ميله صفراً عند هذه النقطة كمـا يلاحظ ان ميـل المنحنـى هذه الدالـة اصبح سـالباً بعد النقطتين (F, B) للدالة على ان هاتين النقطتين هما نقطتا نـهاية عظمى الدالـة بينمـا نلاحـظ ان ميل هذه الدالة اصبح موجباً بعد نقطة التدنيـة (D) ممـا يعنـي ان هذه النقطـة تمثل نقطـة نـهايـة صـغرى لـهذه الدالة :

Ex) Given : TC = 31 + 24 Q-5.5Q2=$\frac{1}{3}$ Q^3

Find The Yelative minimum or Maximum From a total Cost Function .

اوجد النـهاية العظمى او الصـغرى من دالة التكاليف الكلية

١. نـجد المشتقة الاولى

$$\frac{dTC}{dQ} = 0$$

$$\frac{dTC}{dQ} = 24 - 11Q + Q^2 = 0$$

$$(Q-8)(Q-3) = 0$$

Q=8,   Q=3

٢-نـأخذ المشتقة الثانية ونعوض عن قيمة Q=3 , Q=8

$$\frac{d^2TC}{dQ^2} = -11 + 2Q$$

$$a + Q = 8 \;\; \frac{dTC}{dQ^2} = -11 + 2(\quad) = 5 > 0\ (+)$$

Q=8 الدالة في حالة تدنية عندما = $Minimum$

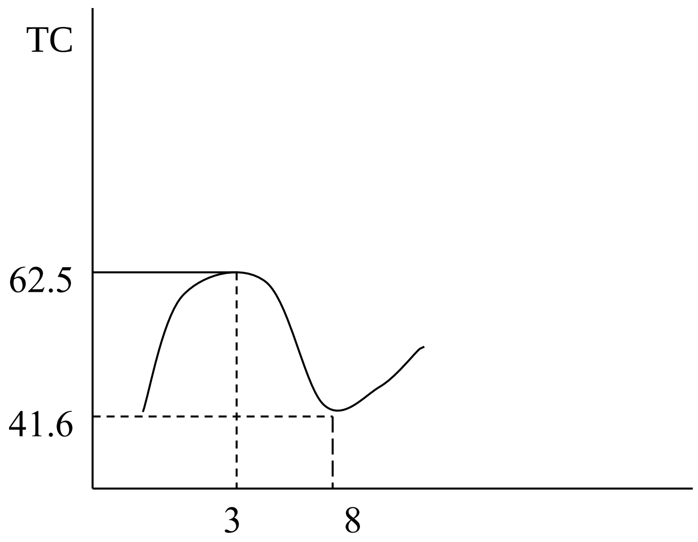
$$at\ Q = 3\frac{d^2TC}{dQ^2} = -11 + 2(3) = -5 < 0(-)$$

Maximum : الدالة في حالة تعظيم عندما Q=3 .

اما لاستخراج قيمة الكلفة الكلية (أعلى او ادنى نقطة بها) عند كميات (٨،٣) نعوض هاتين النقطتين في دالة الكلفة الاصلية .

$$Q = 8 \quad TC = 31 + 24(8) - 5.5(8)^2 + \frac{1}{3}(8)^3 = 41.6$$

$$Q = 3 \quad TC = 31 + 24(3) - 5.5(3)^2 + \frac{1}{3}(3)^2 = 62.5$$



ex) Maximaiza following total revenue and total Profi functions:

1-$TR=32Q-Q^2$

2-$\pi=-Q_2+11Q-24$

1-$TR=32Q-Q^2$

$$\frac{dTR}{dQ} = 0 \quad 32 - 2Q = 0$$

$\frac{d^2TR}{dQ^2} < 0$ (–) يجب ان تكون اقل من الصفر

$\frac{d^2TR}{dQ^2} = -2 < 0$ عندما تكون Q=16 تكون نهاية عظمى

$Q = \frac{32}{2} = 16$ النقطة الحرجة

Ex)Prove hat total revenue is maximized for alinear demand function

P=a-bQ at point where $Q = \frac{a}{2b}$ a, b is plas constants

اثبت ان دالة الايراد الكلي في نهايتها العظمى وتصل على نقطة لها في دالة الطلب الخطية عندما تكون دالة الانتاج

$$Q = \frac{a}{2b}$$

TR=P.Q

P=a-bQ

TR=(a-bQ)Q=aQ-bQ^2

$\frac{dTR}{dQ} = MR$ الايراد الحدي

MR=a-2bQ=0

$Q = \frac{a}{2b}$ النقطة الحرجة

$\frac{d^2TR}{dQ^2 =}$=2b<0

تكون كمية الانتاج في نهايتها العظمى عندما تكون

$$Q = \frac{a}{2b}$$

وتكون ايضا كمية الايراد اعلى ما يكون عند هذه النقطة من الانتاج

Ex) Prove that Marginal cost (MC) Must equal marginal revenue (MR) at the profit minimizing level of out put .

اثبت ان التكاليف الحدية = الايراد الحدي عند مستوى الانتاج الاعظم الذي يعظم الربح .

الحل /

$$\pi = F(Q)$$

$$\pi = TR - TC$$

$$\frac{d\pi}{dQ} = \frac{dTR}{dQ} - \frac{dTC}{dQ}$$

$$\frac{d\pi}{dQ} = MR - MC = 0$$

MR=MC

Use the MR=MC condition derived in above example to find the critical values of which profit will be maximized when :

باستخدام شرط MR = MC الايراد الحدي = الكلفة الحدية المشتقة من اعلاه اوجد القيم الحرجة والتي يبلغ عندها الربح اعلى وحدة واذا كانت الدالتين الايراد الكلي والتكلفة الكلية كالاتي :

$$TR = 45Q - 0.5Q^2$$

$$TC = Q^3 - 39.5Q^2 + 120Q + 125$$

MR=MC

$$MR = \frac{dTR}{dQ} = 45 - Q$$

$$MC = \frac{dTC}{dQ} = 3Q^2 - 79Q + 120$$

$45-Q=3Q_2-79Q+120$

$-3Q_2+78Q-75=0$

نستخدم طريقة التجربة لاستخراج قيمة Q (النقاط الحرجة)

(3Q-3) (-Q+25)=0

3Q-3=0 Q=1

-Q+25=>Q=25

لمعرفة أي من هاتين الكميتين (٢٥،١) هي الكمية التي تعظم الارباح والتي يبلغ عندها الربح اعلى حد سوف نستخرج المشتقة الثانية بشرط MR=MC ومن ثم نعوض هاتين الكميتين في المشتقة الثانية وكما يلي:

$$\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6Q + 78$$

$At\ Q = 1 => \frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6(1) + 78$

=72>0

ATQ=25 $\frac{d^2\pi}{dQ^2} = -6(25) + 78$

= -72 < 0

عندما تكون Q=25 (كمية الانتاج) يكون الربح في حالة تعظيم .

المصفوفة Matrix :

المصفوفة عبارة عن مجموعة من الاعداد او المتغيرات او المعالم الموضوعة على شكل صفوف او اعمدة منتظمة ويسمى عدد الصففو واعمدة المصفوفة بابعاد المصفوفة Dimensions او اربعة المصفوفة بحيث يتقدم عدد الصفو على عدد الاعمدة وتتكون المصفوفة بالمتجهات صفية Row Vectors وأخرى عمودية Column vectors موضوعة داخل قوسين [ ] او < > .

$ex)\ A = [a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}\ ]_{\ 1-3}$

$A\ = [3 \quad 2 \quad 5\ ]_{\ 1-3}$

متجه عمودي

Ex) B=$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{bmatrix}_{3-1}$

B=$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}_{3-1}$

مصفوفة من الرتبة ٢,٢

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{12} \end{bmatrix}_{2.2}$

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}_{22}$

مصفوفة من الرتبة ٣-٣

$$B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}_{3-3}$$

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{bmatrix}_{3-3}$$

المصفوفة المربعة Square Matrix

هي المصفوفة التي يتساوى فيها عدد الصفوف مع عدد الاعمدة مثل :

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}_{3-3}$$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}_{2-2}$$

مصفوفة الوحدة Identify Matrix

وهي عبارة عن مصفوف مربع كل قيمة تكون فيها واقعة على القطر الرئيسي تساوي واحد اما القيم الباقية تساوي اصفار ومن خواص هذه المصفوفة باها لو ضربت باي مصفوفة لها ملائمة من حيث الحجم سواء من الامام او الخلف فان قيمة المصفوفة لا تتغير ويرمز للمصفوفة الوحدة بالرمز In . حيث يشير الحرف n الى حجم المصفوفة

$$I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}_{3-3}$$

$$, I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}_{2-2}$$

المصفوفة القطرية Diagonal Mztrix

وهي مصفوفة مربعة تكون جميع عناصرها الغير واقعة على القطب الرئيسي اصفار مثل :

$$I_3=\begin{bmatrix}3&0&0\\0&2&0\\0&0&5\end{bmatrix}_{3-3}$$

$$, I_2=\begin{bmatrix}3&0\\0&5\end{bmatrix}_{2-2}$$

المصفوفة المثلثية العليا Upper Traingular Matrix

هي المصفوفة المربعة التي تكون فيها قيم العناصر الواقعة اسفل القطر الرئيسي اصفار

$$A=\begin{bmatrix}3&5&7\\0&2&3\\0&0&0\end{bmatrix}, A=$$

المصفوفة المثلثية السفلى Lower Traingular Matrix

هي المصفوفة المربعة التي تكون فيها القيم العناصر الواقعة اعلى القطر الرئيسي اصفار

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&5&0\\4&2&3\end{bmatrix}$$

المصفوفة الصفرية Null Matrix

هي المصفوفة التي تكون جميع عناصرها اصفار ومن خواص هذه المصفوفة ان اضافتها او طرحها من أي كمية مصفوفة لا يؤدي الى تغير فيها كما ان ضربها بأي مصفوفة اخرى يؤدي الى الحصول على المصفوفة الصفرية .

$$A=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}_{3-3} \quad , A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}_{2.2}$$

$$A=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}_{4.2}$$

مبدلة المصفوفة Trans pose Matrix

هي المصفوفة الناتجة من تحويل المصفوفة الى اعمدة والاعمدة الى صفوف ويرمز لمبدلة المصفوفة A (A^1, A^T) ، فذا كانت لدينا المصفوفة A كما يلي :

$$A=\begin{bmatrix}2&1\\3&4\end{bmatrix}$$

فان مبدلتها تكتب كما يلي :

$$A^T=\begin{bmatrix}2&3\\1&4\end{bmatrix}$$

وكذلك فان مبدلة المصفوفة

$$A=\begin{bmatrix}2&1&-3\\3&1&2\\1&-1&3\end{bmatrix}$$

$$A^T=\begin{bmatrix}2&3&1\\1&1&-1\\-3&2&3\end{bmatrix}$$

المحدد Determinant

المحدد بالنسبة للمصفوفة الثنائية (٢×٢) هي القيمة الناتجة من ضرب عناصر القطر الرئيسي مطروحاً منها القيمة الناتجة من ضرب عناصر القطر الثانوي ويستخرج المحدد فقط في حالة المصفوفات المربعة ماا المصفوفة الشاذة فان قيمة محددها تساوي صفر .

المصفوفة الشاذة: هي المصفوفة التي يكون احد صفوفها او اعمدتها من مضاعفات الصف او العمود الثاني مثل

$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

اما في حالة المصفوفة الثلاثية فان قيمة المحدد تستخرج اما بطريقة الحل العالم (طريقة لابلاس) او بطريقة الاسهم وان طريقة الحل العام تعتبر اكثر استخداماً لانها ممكنة التطبيق بغض النظر عن حجم المصفوفة اما طريقة الاسهم فانها تستخدم حصراً في حالة المصفوفة الثلاثية .

Ex) Find the determinant of this matrix

$A =\begin{bmatrix}2 & -2\\ 4 & 5\end{bmatrix}$

$|A| = (3 \times 5) — 2 \times 4 = -15 — 8 = 23 \neq 0$

$B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$

مصفوفة شاذة $|B| = (١ \times ٤) - (٢\times٢) = ٤ - ٤ = ٠$

Ex)Find the determinant of this Matrix

$$A= \begin{matrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 3\end{matrix}$$

$|A| = 2[(0 \times 3) - (2 \times 1)] - 3[(1 \times 3) - (2 \times 0)] + 0[(1 \times 1) - (0 \times 0)]$

=2(-2)-3(3-0)+0=-4-9=-13≠0

طريقة الاسهم : تتلخص هذه الطريقة باضافة العمود بين الاولين (٠،١) الى الجهة اليمنى من المصفوفة مع المحافظة على مسافات متساوية بين الاعمدة ثم تقوم باستخراج مجموع حاصل ضرب العناصر الواقعة على الاقطار الرئيسية الثلاثة ونطرح منه مجموع حاصل ضرب العناصر الواقعة على الاقطار الثانوية الثلاثة

$$A = \begin{matrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{matrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{matrix}$$

=[(1×1×1)+(-2×3×2)+(2×0×3)]-[(2×1×2)+(3×3×1)+(1×0×2)]=-24

المصفوفة المرافقة Adjoint Matrix

في حال المصفوفة الثنائية فان المصفوفة المرافقة تستخرج باستبدال عناصر القطر الرئيسي احدهما محل الاخر وتغير اشارة عناصر القطر الثاني .

Ex) Find the Adjoint Matrix

$A= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ Adj$=\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

*معكوس المصفوفة Inverse Matrix

$A^{-1}=\frac{1}{|A|} AdjA$

Ex) Find the inverse Matrix

$A= = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{|A|} AdjA$

$|A|=[(1 \times 2)] - [3 \times -2)] = 2 + 6 = 8$

$AdjA=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$A^{-1}=\frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-3}{8} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$

طريقة كريم راو طريقة المحددات Gramer's Rule

3x-2y=4 $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

X+2y = 4

طريقة الحل بـ Gramer's Rule

نستخرج قيمة المحدد $|A|$ ونتأكد بكونه لا يساوي صفر

$$A=\begin{bmatrix}3 & -2\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$|A|$=(3×2)-(-2×1)=6+2=8≠0

٢نستخرج قيمة المحدد $|A|$ والذي يمثل العمود الاول فيه عمود القيم الثانية المطلقة اما العمود الثاني فهو نفس العمود الثاني للمصفوفة A .

$$|A| = \begin{vmatrix}4 & -2\\ 4 & 2\end{vmatrix} = (4\times 2)—2\times 4 = 8+8 = 16$$

٣-وبنفس الطريقة نستخرج قيمة المحدد $|A|$ والذي يمثل العمود الثاني فيه القيم المطلقة اما العمود الاول فيبقى العمود الاول للمصفوفة A .

$$|A_2| = \begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 4\end{vmatrix} = (3\times 4)-(4\times 1) = 8$$

$$X=\frac{|A_1|}{|A\ \ |} = \frac{16}{8} = 2$$

$$Y=\frac{|A_2|}{|A\ \ |} = \frac{8}{8} = 1$$

X=2 , y=1

Ex) The equilibrium condition for two related Marlets (chicken and beef) are given by :

$6X_1+5X_2=49$

$3X_1+4X_2=32$

Using Gramerts rule

AX=B

$$\begin{bmatrix}5 & 5\\ 3 & 4\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}X_1\\ X_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}49\\ 32\end{bmatrix}$$

$$|A\ \ | = (6\times 4)-(5\times 3) = 9$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix}49 & 5\\ 32 & 4\end{vmatrix} = (49\times 4)-(5\times 32) = 36$$

$|A_2| = \begin{vmatrix} 6 & 49 \\ 3 & 32 \end{vmatrix} = (6 \times 32) - (49 \times 3) = 45$

$X_1 = \frac{|A_1|}{|A\ \ |} = \frac{36}{9} = 4$

$X_2 = \frac{|A_2|}{|A\ \ |} = \frac{45}{9} = 5$

Ex)The equilibrium Condition for two substitute goods is given by:

$5P_1 - 2P_2 = 15$

$-P_1 + 8P_2 = 16$

Find the equilibrium price using (inverse Matrix)

$A^{-1} = \frac{1}{|A\ \ |} AdjA$

Ax=B

$\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 16 \end{bmatrix}$

$|A| = (5 \times 8) — \mathbf{1} \times -2 = 40 - 2 = 38$

المصفوفة المرافقة $C = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ AdjA=$\begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{38} \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{1}{19} \\ \frac{1}{38} & \frac{5}{38} \end{bmatrix}$

Ax=B

$X = \frac{B}{A}$

$X = \begin{bmatrix} \frac{4}{19} & \frac{1}{19} \\ \frac{1}{38} & \frac{5}{38} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 15 \\ 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{60+16}{19} \\ \frac{15+80}{38} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2.5 \end{bmatrix}$

$P_1 = 4 / P_2 = 2.5$