وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الموصل
كلية الزراعة والغابات
فرع العلوم الأساسية
العام الدراسي: 2022-2023
المادة: الرياضيات
مدرس المادة: م.م. مصطفى ناظم سالم

Matrices

المصفوفات

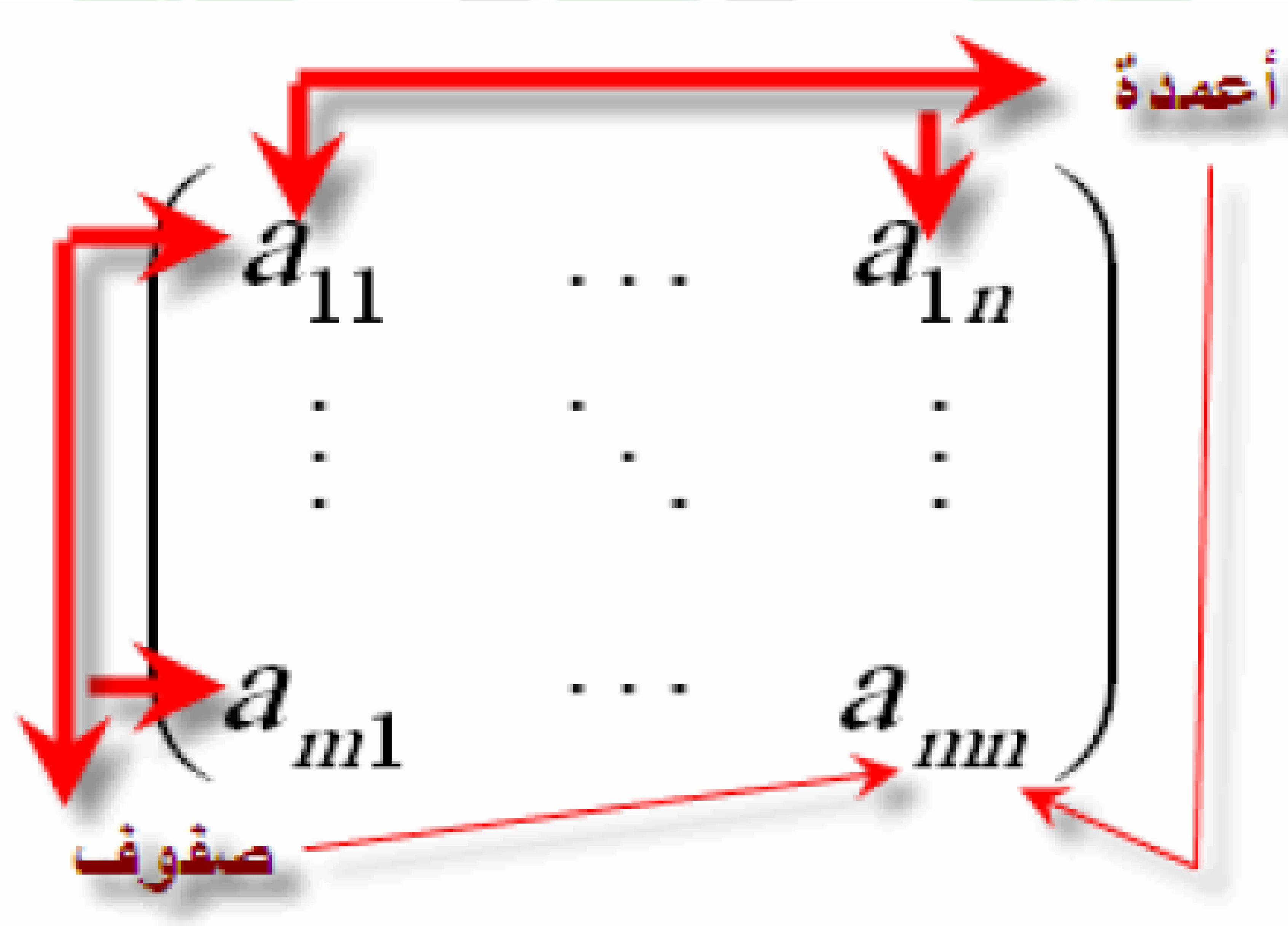
Matrix algebra has at least two advantages:

- Reduces complicated systems of equations to simple expressions
- Adaptable to systematic method of mathematical treatment and well suited to computers

Definition:

A matrix is a set or group of numbers arranged in a square or rectangular array enclosed by two brackets

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$


أعمدة
صفوف

Properties:

•A specified number of rows and a specified number of columns

•Two numbers (rows x columns) describe the dimensions or size of the matrix.

Examples:

3x3 matrix

2x4 matrix

1x2 matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 4 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$$

A matrix is denoted by a bold capital letter and the elements within the matrix are denoted by lower case letters

e.g. matrix [**A**] with elements a_{ij}

$$\mathbf{A}_{mxn}= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots & a_{ij} & a_{in} \\ a_{21} & a_{22}\ldots & a_{ij} & a_{2n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{ij} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

i goes from 1 to m

j goes from 1 to n

TYPES OF MATRICES انواع المصفوفات

1. Column matrix مصفوفة العمود:

The number of rows may be any integer but the number of columns is always 1

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

2. Row matrix مصفوفة الصف:

Any number of columns but only one row

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \Lambda & a_{1n} \end{bmatrix}$$

3. Rectangular matrix المصفوفة المستطيلة:

Contains more than one element and number of rows is not equal to the number of columns

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \\ 7 & -7 \\ 7 & 6 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$m \neq n$$

4. Square matrix المصفوفة المربعة:

The number of rows is equal to the number of columns

(a square matrix $\underset{m \times m}{\mathbf{A}}$ has an order of m)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & 9 & 0 \\ 6 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

The principal or main diagonal of a square matrix is composed of all elements a_{ij} for which $i=j$

5. Diagonal matrix المصفوفة القطرية:

A square matrix where all the elements are zero except those on the main diagonal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

i.e. $a_{ij} = 0$ for all $i \neq j$

$a_{ij} \neq 0$ for some or all $i = j$

6. Unit or Identity matrix – I مصفوفة الوحدة أو القياسية:

A diagonal matrix with ones on the main diagonal

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a_{ij} & 0 \\ 0 & a_{ij} \end{bmatrix}$$

i.e. $a_{ij} = 0$ for all $i \neq j$

$a_{ij} = 1$ for some or all $i = j$

7. Null (zero) matrix – O المصفوفة الصفرية:

All elements in the matrix are zero

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = 0$$ For all i,j

EQUALITY OF MATRICES المساواة في المصفوفات

Two matrices are said to be equal only when all corresponding elements are equal

Therefore their size or dimensions are equal as well

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

Some properties of equality:

- If **A** = **B**, then **B** = **A** for all **A** and **B**
- If **A** = **B**, and **B** = **C**, then **A** = **C** for all **A**, **B** and **C**

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

If **A** = **B** then $a_{ij} = b_{ij}$

ADDITION AND SUBTRACTION OF MATRICES الجمع والطرح في المصفوفات

The sum or difference of two matrices, **A** and **B** of the same size yields a matrix **C** of the same size

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Matrices of different sizes cannot be added or subtracted

الجمع
1+7

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

هكذا يكون شكل

لتحصل على هذه النتيجة

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+8 \\ 3+9 & 4+10 \\ 5+11 & 6+12 \end{pmatrix}_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 8 & 10 \\ 12 & 14 \\ 16 & 18 \end{pmatrix}_{3\times 2}$$

Commutative Law:

A + **B** = **B** + **A**

Associative Law:

A + (**B** + **C**) = (**A** + **B**) + **C** = **A** + **B** + **C**

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ -2 & -7 & 9 \end{bmatrix}$$

A 2x3 **B** 2x3 **C** 2x3

A + **0** = **0** + **A** = **A**

A + (-**A**) = **0** (where –**A** is the matrix composed of $-a_{ij}$ as elements)

$$\begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

SCALAR MULTIPLICATION OF MATRIX ضرب ثابت في مصفوفة

Matrices can be multiplied by a scalar (constant or single element)

Let k be a scalar quantity; then

kA = Ak

Ex. If k=4 and

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$4 \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \\ 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times 4 = \begin{bmatrix} 12 & -4 \\ 8 & 4 \\ 8 & -12 \\ 16 & 4 \end{bmatrix}$$

Properties:

- k (**A** + **B**) = k**A** + k**B**
- (k + g)**A** = k**A** + g**A**
- k(**AB**) = (k**A**)**B** = **A**(k)**B**
- k(g**A**) = (kg)**A**

MULTIPLICATION OF MATRICES ضرب المصفوفات

The product of two matrices is another matrix

Two matrices **A** and **B** must be **conformable** for multiplication to be possible

i.e. the number of columns of **A** must equal the number of rows of **B**

Example.

A	x	**B**	=	**C**
(1x3)		(3x1)		(1x1)

B x **A** = Not possible!

(2x1) (4x2)

A x **B** = Not possible!

(6x2) (6x3)

Example

A x **B** = **C**

(2x3) (3x2) (2x2)

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}$$

$$(a_{11} \times b_{11}) + (a_{12} \times b_{21}) + (a_{13} \times b_{31}) = c_{11}$$
$$(a_{11} \times b_{12}) + (a_{12} \times b_{22}) + (a_{13} \times b_{32}) = c_{12}$$
$$(a_{21} \times b_{11}) + (a_{22} \times b_{21}) + (a_{23} \times b_{31}) = c_{21}$$
$$(a_{21} \times b_{12}) + (a_{22} \times b_{22}) + (a_{23} \times b_{32}) = c_{22}$$

Successive multiplication of row *i* of **A** with column *j* of **B** – row by column multiplication

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1\times 4)+(2\times 6)+(3\times 5) & (1\times 8)+(2\times 2)+(3\times 3) \\ (4\times 4)+(2\times 6)+(7\times 5) & (4\times 8)+(2\times 2)+(7\times 3) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 31 & 21 \\ 63 & 57 \end{bmatrix}$$

Remember also:

IA = **A**

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31 & 21 \\ 63 & 57 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 31 & 21 \\ 63 & 57 \end{bmatrix}$$

Assuming that matrices **A**, **B** and **C** are conformable for the operations indicated, the following are true:

1. **AI** = **IA** = **A**
2. **A**(**BC**) = (**AB**)**C** = **ABC** - (associative law)
3. **A**(**B**+**C**) = **AB** + **AC** - (first distributive law)
4. (**A**+**B**)**C** = **AC** + **BC** - (second distributive law)

Caution!

1. **AB** not generally equal to **BA**, **BA** may not be conformable
2. If **AB** = **0**, neither **A** nor **B** necessarily = **0**
3. If **AB** = **AC**, **B** not necessarily = **C**

AB not generally equal to **BA**, **BA** may not be conformable

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$TS = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 8 \\ 15 & 20 \end{bmatrix}$$

$$ST = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 6 \\ 10 & 0 \end{bmatrix}$$

If **AB** = **0**, neither **A** nor **B** necessarily = **0**

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

TRANSPOSE OF A MATRIX مدور المصفوفة

If :

$$\underset{2x3}{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Then transpose of A, denoted A^T is:

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{ij} = a_{ji}^T$$ For all *i* and *j*

To transpose:

Interchange rows and columns

The dimensions of $\mathbf{A}^T$ are the reverse of the dimensions of $\mathbf{A}$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 7 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

2 x 3

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$

3 x 2

Properties of transposed matrices:

1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$
2. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$
3. $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$
4. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$

1. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 & -1 \\ 2 & -5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ -4 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 & 5 \\ -2 & -7 & 9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 8 & -7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & -5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 5 & -2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 8 & -7 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$$

$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 8 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 8 \end{bmatrix}$$

SYMMETRIC MATRIX المصفوفة المرتبطة

A Square matrix is symmetric if it is equal to its transpose:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$A^{T} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix}$$

When the original matrix is square, transposition does not affect the elements of the main diagonal

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

The identity matrix, **I**, a diagonal matrix **D**, and a scalar matrix, **K**, are equal to their transpose since the diagonal is unaffected.

INVERSE OF A MATRIX مقلوب أو معكوس المصفوفة

Consider a scalar k. The inverse is the reciprocal or division of 1 by the scalar.

Example:

k=7 the inverse of k or $k^{-1} = 1/k = 1/7$

Division of matrices is not defined since there may be **AB** = **AC** while **B** $\neq$ **C**

Instead matrix inversion is used.

The inverse of a square matrix, **A**, if it exists, is the unique matrix $\mathbf{A}^{-1}$ where:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

Example:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Because:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Properties of the inverse:

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(A^{T})^{-1} = (A^{-1})^{T}$$

$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$

A square matrix that has an inverse is called a nonsingular matrix

A matrix that does not have an inverse is called a singular matrix

Square matrices have inverses except when the determinant is zero

When the determinant of a matrix is zero the matrix is singular

DETERMINANT OF A MATRIX محدد المصفوفة

To compute the inverse of a matrix, the determinant is required

Each square matrix **A** has a unit scalar value called the determinant of **A**, denoted by det **A** or |**A**|

If $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix}$$

then $$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}$$

If $\mathbf{A}$ = [$\mathbf{A}$] is a single element (1x1), then the determinant is defined as the value of the element

Then $|\mathbf{A}| = \det \mathbf{A} = a_{11}$

If $\mathbf{A}$ is (n x n), its determinant may be defined in terms of order (n-1) or less.

eg.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Each element in **A** has a minor

Delete first row and column from **A** .

The determinant of the remaining 2 x 2 submatrix is the minor of a_{11}

$$m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Therefore the minor of a_{12} is:

$$m_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

And the minor for a_{13} is:

$$m_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

COFACTORS العوامل المرافقة

The cofactor C_{ij} of an element a_{ij} is defined as:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$$

When the sum of a row number i and column j is even, $c_{ij} = m_{ij}$ and when $i+j$ is odd, $c_{ij} = -m_{ij}$

$$c_{11}(i=1, j=1) = (-1)^{1+1} m_{11} = +m_{11}$$

$$c_{12}(i=1, j=2) = (-1)^{1+2} m_{12} = -m_{12}$$

$$c_{13}(i=1, j=3) = (-1)^{1+3} m_{13} = +m_{13}$$

DETERMINANTS CONTINUED

The determinant of an n x n matrix **A** can now be defined as

$$|A| = \det A = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + \ldots + a_{1n}c_{1n}$$

The determinant of **A** is therefore the sum of the products of the elements of the first row of **A** and their corresponding cofactors.

(It is possible to define |**A**| in terms of any other row or column but for simplicity, the first row only is used)

Therefore the 2 x 2 matrix :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Has cofactors :

$$c_{11} = m_{11} = |a_{22}| = a_{22}$$

And:

$$c_{12} = -m_{12} = -|a_{21}| = -a_{21}$$

And the determinant of **A** is:

$$|A| = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Example 1:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (3)(2) - (1)(1) = 5$$

For a 3 x 3 matrix:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

The cofactors of the first row are:

$$c_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

$$c_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = -(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31})$$

$$c_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}$$

The determinant of a matrix A is:

$$|A| = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Which by substituting for the cofactors in this case is:

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

Example 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$|A| = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$|A| = (1)(2-0) - (0)(0+3) + (1)(0+2) = 4$$

ADJOINT MATRIX المصفوفة المرتبطة

A cofactor matrix **C** of a matrix **A** is the square matrix of the same order as **A** in which each element a_{ij} is replaced by its cofactor c_{ij} .

Example:

If $$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

The cofactor C of A is $$AC = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

The adjoint matrix of **A**, denoted by adj **A**, is the transpose of its cofactor matrix

$$adj(A) = AC^T$$

It can be shown that:

A(adj **A**) = (adj**A**) **A** = |**A**| **I**

Example:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (1)(4) - (2)(-3) = 10$$

$$adj(A) = AC^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(adjA)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}=10I$$

$$(adjA)A=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\ -3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & 0\\ 0 & 10\end{bmatrix}=10I$$

USING THE ADJOINT MATRIX IN MATRIX INVERSION

Since

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

and

$$\mathbf{A}(\text{adj } \mathbf{A}) = (\text{adj}\mathbf{A})\,\mathbf{A} = |\mathbf{A}|\,\mathbf{I}$$

then

$$A^{-1} = \frac{adjA}{|A|}$$

Example

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}$$

To check $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}$

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.2 \\ 0.3 & 0.1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Example 2

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

The determinant of **A** is

$$|\mathbf{A}| = (3)(-1-0)-(-1)(-2-0)+(1)(4-1) = -2$$

The elements of the cofactor matrix are

$$c_{11} = +(-1), \qquad c_{12} = -(-2), \qquad c_{13} = +(3),$$
$$c_{21} = -(-1), \qquad c_{22} = +(-4), \qquad c_{23} = -(7),$$
$$c_{31} = +(-1), \qquad c_{32} = -(-2), \qquad c_{33} = +(5),$$

The cofactor matrix is therefore

$$AC = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & -7 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

so

$$adj(A) = AC^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{bmatrix}$$

and

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & -7 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -1.0 & 2.0 & -1.0 \\ -1.5 & 3.5 & -2.5 \end{bmatrix}$$

The result can be checked using

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

The determinant of a matrix must not be zero for the inverse to exist as there will not be a solution

Nonsingular matrices have non-zero determinants

Singular matrices have zero determinants

Matrix Inversion

مقلوب المصفوفة

Simple 2 x 2 case

Simple 2 x 2 case

Let

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$$

Since it is known that

$$\mathbf{A}\,\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

then

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Simple 2 x 2 case

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

It can simply be shown that

$$|A| = ad - bc$$

Simple 2 x 2 case

So that for a 2 x 2 matrix the inverse can be constructed in a simple fashion as

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{|A|} & \frac{b}{|A|} \\ \frac{-c}{|A|} & \frac{a}{|A|} \end{bmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

- Exchange elements of main diagonal
- Change sign in elements off main diagonal
- Divide resulting matrix by the determinant

Simple 2 x 2 case

Example

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = -\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.3 \\ 0.4 & -0.2 \end{bmatrix}$$

Check inverse

A^{-1} A=I

$$-\frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Matrices and Linear Equations

Linear Equations

Linear Equations

Linear equations are common and important for survey problems

Matrices can be used to express these linear equations and aid in the computation of unknown values

Example

n equations in *n* unknowns, the a_{ij} are numerical coefficients, the b_i are constants and the x_j are unknowns

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \Lambda + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \Lambda + a_{2n}x_n = b_2$$

$$\mathrm{M}$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \Lambda + a_{nn}x_n = b_n$$

Linear Equations

The equations may be expressed in the form

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}$$

where

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\,\Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\,\Lambda & a_{2n} \\ \mathrm{M} & \mathrm{M} & \mathrm{M} \\ a_{n1} & a_{n1}\,\Lambda & a_{nn} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \mathrm{M} \\ x_n \end{bmatrix}, \text{ and } \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \mathrm{M} \\ b_n \end{bmatrix}$$

n x n   n x 1   n x 1

Number of unknowns = number of equations = n

Linear Equations

If the determinant is nonzero, the equation can be solved to produce n numerical values for x that satisfy all the simultaneous equations

To solve, premultiply both sides of the equation by $\mathbf{A}^{-1}$ which exists because $|\mathbf{A}| \neq \mathbf{0}$

$$\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{AX} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$$

Now since

$$\mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{A} = \mathbf{I}$$

We get

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{B}$$

So if the inverse of the coefficient matrix is found, the unknowns, **X** would be determined

Linear Equations

Example

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$2x_1 + x_2 = 1$$

$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

The equations can be expressed as

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Linear Equations

When $\mathbf{A}^{-1}$ is computed the equation becomes

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0.5 \\ -1.0 & 2.0 & -1.0 \\ -1.5 & 3.5 & -2.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Therefore

$$x_1 = 2,$$
$$x_2 = -3,$$
$$x_3 = -7$$

Linear Equations

The values for the unknowns should be checked by substitution back into the initial equations

$$x_1 = 2,$$
$$x_2 = -3,$$
$$x_3 = -7$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 = 2$$
$$2x_1 + x_2 = 1$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$

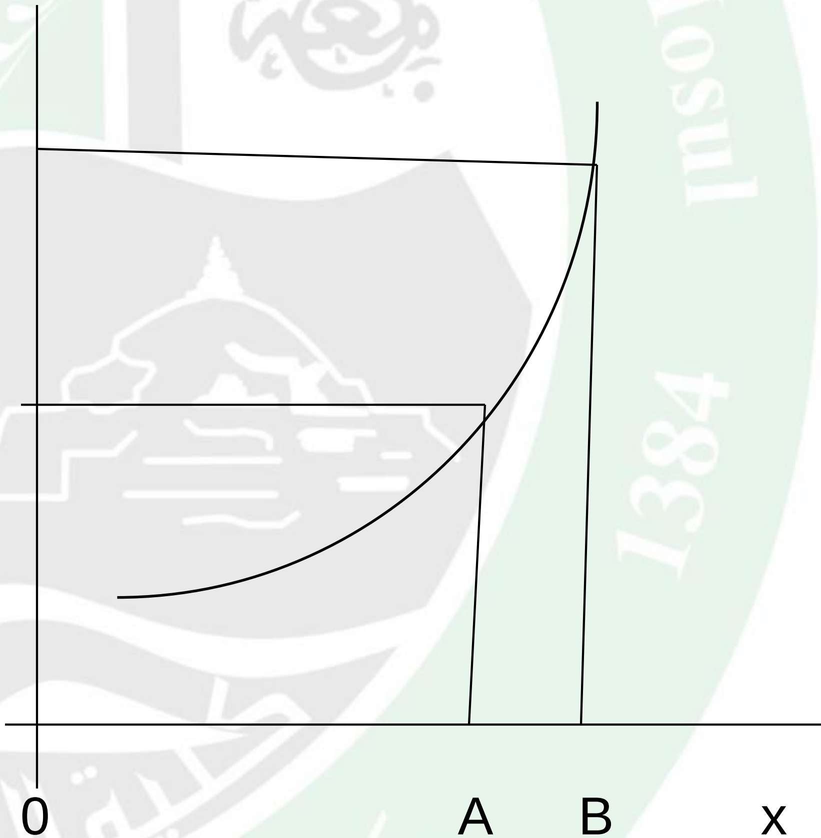
$$3\times(2)-(-3)+(-7)=2$$
$$2\times(2)+(-3)=1$$
$$(2)+2\times(-3)-(-7)=3$$

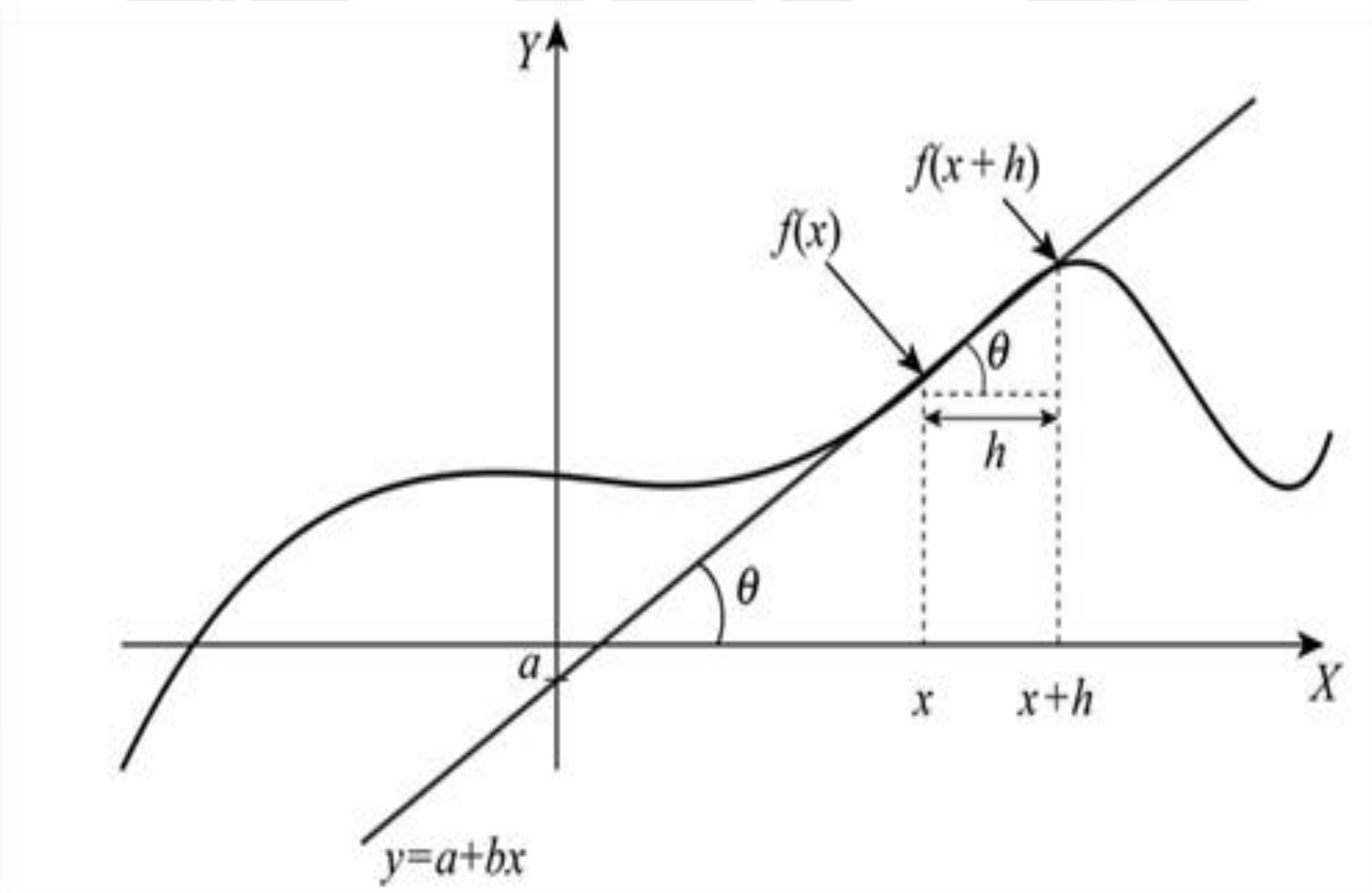
Differential التفاضل

المشتقة الأولى للدالة

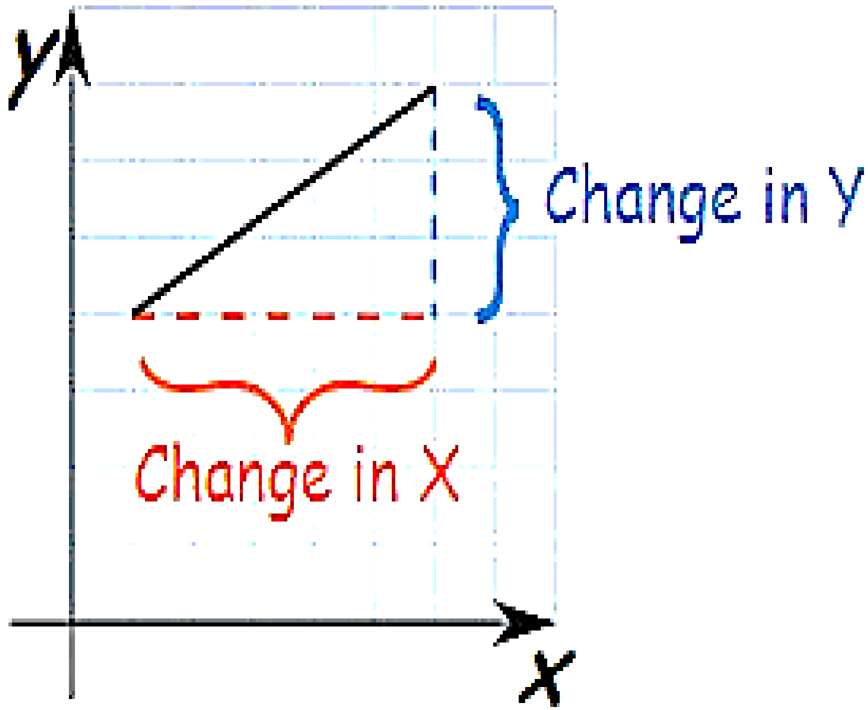
إذا كانت $y = f(x)$ هي دالة معرفة خلال فترة معينة:

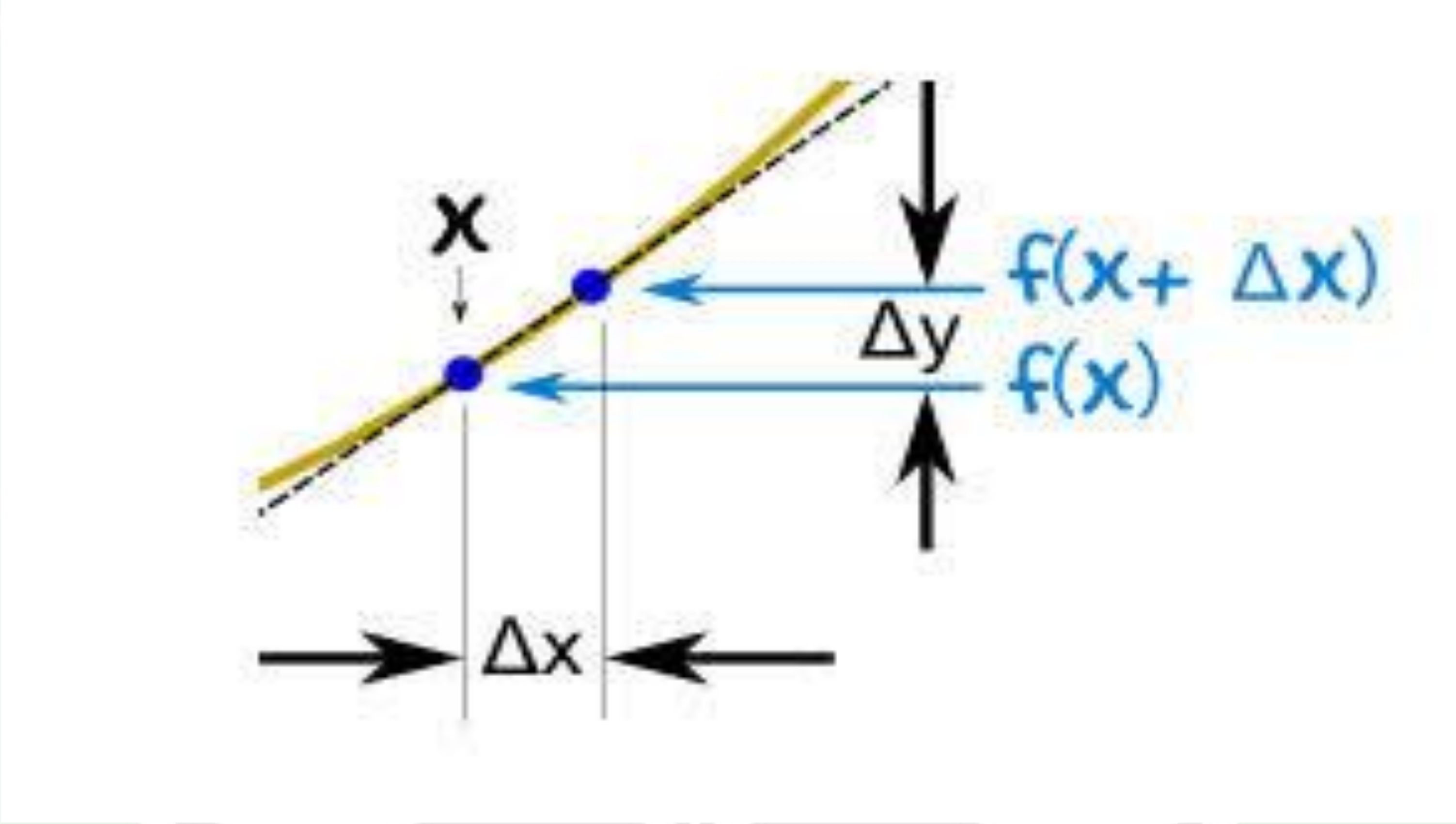
فإذا أخذنا قيمتين اختياريتين للمتغير المستقل x في منطقة تعريف الدالة مثل النقطة A على محور السينات ويرمز لها بالرمز x والنقطة B ويرمز لها بالرمز $x + \Delta x$ حيث Δx هي الكمية التي تغير بها المتغير المستقل x في انتقاله من القيمة الأولى إلى القيمة الثانية ويطلق عليه اسم الزيادة في المتغير المستقل.




Y
f(x + h)
f(x)
θ
h
θ
a
x
x+h
X
y=a+bx

$$\text{Slope} = \frac{\text{Change in Y}}{\text{Change in X}}$$




x
f(x+ Δx)
Δy
f(x)
Δx

والقيمتين: $x \;,\; x+\Delta x$ للمتغير المستقل تناظرهما قيمتين محددتان للدالة هما:

$$y \quad , \quad y+\Delta y$$

فإذا كانت القيمة الابتدائية للدالة هي:

$$y = f(x)$$

فإن قيمتها المتغيرة تكون:

$$y+\Delta y = f(x+\Delta x)$$

وبالطرح نحصل على الزيادة في الدالة y نتيجة للزيادة Δx في x

$$\therefore\ \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

ولإيجاد متوسط معدل التغير الحادث في الدالة في الفترة (y) بالنسبة إلى x في الفترة $(x, (x+\Delta x))$ توجد النسبة $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ حيث أنها مقياس لسرعة تغير الدالة في هذه الفترة فنجد أن:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

وحيث أن Δy تعتمد على Δx فإن النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ تعتمد أيضاً على Δx وبذلك عندما تؤول Δx إلى الصفر فإن Δy تؤول إلى الصفر أيضاً وتقترب من نهاية محددة عندما تؤول Δx إلى الصفر ويرمز لهذه النهاية $\frac{dy}{dx}$ **بالرمز** $\frac{df(x)}{dx}$ **أو** $f'(x)$ **أو** (y') أو $\frac{Dy}{\Delta x}$ أو Df :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

مثال (1): أوجد المشتقة الأولى للدالة $y = \sqrt{x}$ عندما x > 0

الحـــل

$$1- \quad y + \Delta y = \sqrt{x + \Delta x}$$

$$2- \quad \therefore \Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$$

$$3- \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

ويمكن كتابتها على الصورة: $\left(\frac{x^n - a^n}{x - a}\right)$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x + \Delta x)^{1/2} - x^{1/2}}{(x + \Delta x) - x}$$

$$4-\quad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{(x+\Delta x)\to x}\frac{(x+\Delta x)^{1/2}-x^{1/2}}{(x+\Delta x)-x}$$

$$=\frac{1}{2}x^{1/2-1}=\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2}x^{-1/2}$$

ملاحظة:

لاحظ أن الرمز $\frac{dy}{dx}$ ليس معناه خارج قسمة مقدارين .. إنما يقصد به الدلالة على المشتقة ، أي نهاية النسبة $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ككل لذلك يجب اعتباره وحدة واحدة وليس كسراً يمكن فصل بسطه عن مقامه.

The velocity : السرعة

نفرض أن أي جسم يتحرك يخضع في حركته إلى العلاقة:

$$s = f(t)$$

حيث أن "s "هي المسافة ، "t "هي الزمن وهما الكميتان الأساسيتان الممكن قياسهما والمطلوب إيجاد سرعة الجسم في لحظة ما "t "فمن العلاقة السابقة نجد أنه في الزمن "t"يحتل الجسم الموضع "s "بحيث :

$$s = f(t)$$

وفي الزمن $t + \Delta t$ *يكون الجسم في الموضع* :

$$s + \Delta s = f(t + \Delta t)$$

وعلى هذا ففي الفترة من t *إلى*

$$t + \Delta t$$

يكون الجسم قد انتقل مسافة قدرها:

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

ونعرف أن السرعة المتوسطة Average velocity هي معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن

$$V_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

وتكون السرعة اللحظية عند الزمن t هي نهاية السرعة المتوسطة عندما

$\Delta t \rightarrow 0$ ، أي أن:

$$V = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

ومن تعريف المشتقة ينتج أن :

$$V = \frac{ds}{dt}$$

مثـــــال (2) : أوجد سرعة جسم سقط تحت تأثير الجاذبية الأرضية

الحــــل

حيث أن الجسم الساقط تحت تأثير الجاذبية الأرضية يخضع للعلاقة التالية :

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

حيث أن s : المسافة ، t : الزمن ، g : عجلة الجاذبية الأرضية .

والسرعة هي معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن

$$V = \frac{ds}{dt}$$

$$\therefore s + \Delta s = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2$$

$$\therefore \Delta s = \frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\frac{1}{2} g (t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} g t^2}{\Delta t}$$

$$V = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} g [(t + \Delta t)^2 - t^2]}{(t + \Delta t) - t}$$

$$= \frac{1}{2} g . 2t = gt$$

$$\therefore V = \frac{ds}{dt} = gt$$

القوانين الأساسية للتفاضل:

The fundamental laws of differentiation

أولاً : مشتقة الدالة الثابتة تساوى صفراً عند أي نقطة x (تفاضل أي مقدار ثابت يساوي صفر)

فإذا كانت y = c حيث c مقدار ثابت ، فهذا يعنى ثبوت y مهما زادت x أي أنه للزيادة Δx

في x تكون الزيادة Δy مساوية الصفر، ومنها:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$$

وهذا يعنى أن الدالة y = c تعبر عن مستقيم يوازي محور x وميله يساوى صفر

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = o$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(c) = 0$$

ثانياً: مشتقة الدالة $y = x^n$ حيث n عدد حقيقي موجب أو سالب جذري أو غير جذري.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x)^n = n(x)^{n-1}$$

ويمكن إثبات ذلك باستخدام الخطوات الأربع السابق شرحها لإيجاد المشتقة الأولى.

ثالثاً: مشتقة حاصل ضرب ثابت ودالة $y = c.f(x)$ **حيث c مقدار ثابت**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[c.f(x)] = c.\frac{d}{dx}.f(x)$$

أي أن المعامل الثابت يمكن سحبه خارج علامة التفاضل ويمكن إثبات هذه القاعدة

باستخدام الخطوات الأربع السابق شرحها لإيجاد المشتقة الأولى بالمبادئ الأولية.

رابعاً: مشتقة مجموع عدد محدود من الدوال تساوى المجموع المناظر لمشتقات الدوال. فإذا كانت:

$$y = u(x) + v(x) + w(x)$$

حيث أن جميع الدوال قابلة للتفاضل في فترة معينة للمتغير (x)عند القيمة ($x + \Delta x$) يكون:

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)+(w+\Delta w)$$

$$\therefore \Delta y \;=\Delta u+\Delta v+\Delta w$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}+\frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} \;=\; \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} \;=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}+\frac{dw}{dx}$$

مثال (4) : أوجد مشتقة الدالة:

$$y = 12x^3 - 6x^2 + 5x + 9$$

الحــــل

$$\frac{dy}{dx} = 12 \times 3x^2 - 6 \times 2x + 5 \times 1 + 0$$

$$= 36x^2 - 12x + 5$$

مثال (5) : أوجد مشتقة الدالة:

$$y = \frac{3}{x^2} - 2\sqrt{x} + 7$$

الحــــل

$$\frac{dy}{dx} = 3(\frac{-2}{x^3}) - 2(\frac{1}{2\sqrt{x}}) + 0$$

$$= -\frac{6}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}$$

خامساً: **مشتقة حاصل ضرب دالتين:**

الدالة الأولى مضروبة في مشتقة الثانية + الدالة الثانية مضروبة في مشتقة الأولى. أي أن :

$$V_{av} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

- **لإثبات ذلك نتبع خطوات إيجاد المشتقة الأولى من المبادئ الأولية كما يلي:**
- **نفرض أن:**

$$y = uv$$

$$\therefore\ y + \Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v)$$

$$\Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv$$

$$= u\Delta v + v\Delta u + \Delta u \Delta v$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} u\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} v\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta u \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

حيث أن u , v لا تعتمد على Δx والحد الأخير في الطرف الأيمن عبارة عن

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

وتكون $u= f(x)$ دالة قابلة للتفاضل ومستمرة وبالتالي فإن:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0 \quad , \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} \neq \infty$$

وبذلك فإن هذا الحد الأخير يكون مساوياً للصفر ونحصل على

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{\frac{d(uv)}{dx}}{uv} = \frac{\frac{du}{dx}}{u} + \frac{\frac{dv}{dx}}{v}$$

وهذا الإثبات يوصلنا إلى قاعدة عامة لتفاضل حاصل ضرب أي عدد محدود من الدوال ...
فإذا كان لدينا حاصل ضرب ثلاث دوال $y = u \,.\, v \,.\, w$
فإنه يمكن تمثيل الطرف الأيمن كحاصل ضرب u في (vw) فنجد أن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx}(vw) + u.\frac{d}{dx}(vw)$$

$$= \frac{du}{dx}(vw) + u.(\frac{dv}{dx}w + v\frac{dw}{dx})$$

$$= \frac{du}{dx}(vw) + u.\frac{dv}{dx}w + uv\frac{dw}{dx}$$

وبهذه الطريقة يمكننا الحصول على قاعدة عامة لتفاضل حاصل ضرب أي عدد محدود من الدوال أى إذا كان $y = u_1\, u_2 \, ...u_n$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du_1}{dx} u_2 \dots . u_{n-1} u_n + \frac{du_2}{dx} u_1 \dots . u_{n-1} u_n + \dots\dots\dots\dots + \frac{du_n}{dx} u_1 u_2 \dots . u_{n-1}$$

ويمكن كتابة قانون تفاضل حاصل ضرب دالتين على الصورة الآتية:

$$\frac{\frac{d}{dx} uv}{uv} = \frac{\frac{du}{dx}}{u} + \frac{\frac{dv}{dx}}{v}$$

وذلك بقسمة كل من حدود القانون على u.v .... ومنها يمكن أيضاً الحصول على صورة عامة لتفاضل حاصل ضرب أي عدد من الدوال فنجد أن :

$$\frac{\frac{d}{dx}(u_1 u_2 u_3 \dots u_n)}{u_1 u_2 u_3 \dots u_n} = \frac{\frac{du_1}{dx}}{u_1} + \frac{\frac{du_2}{dx}}{u_2} + \dots\dots\dots + \frac{\frac{du_n}{dx}}{u_n}$$

مثال (6) : فاضل بالنسبة لـ x الدالة:

$$y = (x^2 + 2x)(3x + 1)$$

الحـــل

من الواضح أنه يمكن إيجاد التفاضل بفك الأقواس أولاً ثم نفاضل الناتج ، لكن بفرض أن الدالة عبارة عن حاصل ضرب دالتين كالآتي:

$$u = (x^2+2x) , \quad v=(3x+1)$$

وبتطبيق قاعدة حاصل ضرب دالتين ينتج أن:

$$\frac{dy}{dx} = (x^2 + 2x)(3) + (3x+1)(2x+2)$$

$$= 3x^2 + 6x + 6x^2 + 8x + 2$$

$$= 9x^2 + 14x + 2$$

سادساً: **مشتقة خارج قسمة دالتين**

مشتقة خارج قسمة دالتين عبارة عن حاصل ضرب (دالة المقام في مشتقة دالة البسط مطروحا منه حاصل ضرب دالة البسط في مشتقة دالة المقام) مقسوما على مربع دالة المقام.

$$if \quad y=\frac{u}{v} \quad then\ \frac{dy}{dx}=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2},\ v\neq 0$$

نتيجــة:

إذا كانت c مقدار ثابت ، v دالة يمكن تفاضلها فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{v}\right)=-\frac{c}{v^2}\cdot\frac{dv}{dx} \quad , \quad v\neq 0$$

دالـة الدالـة

نفرض أن:

$$y = \sqrt{3x^4}$$

فإذا وضعنا

$$u = 3\,x^4$$

فمن الواضح أن "u "دالة في" x "وممكن أن تمثل كما يلي :

$$u = f(x)$$

وعلى هذا فالدالة المفروضة:

تصبح دالة " u " التي هي بدورها دالة " x " فإذا كتبنا $y = f\,(u)$ ، $u = f(x)$ فإن:

$$y = f\,[f(x)]$$

$$y = \sqrt{3x^4} = \sqrt{u}$$

وتسمى دالة الدالة.

ومثال لدالة الدالة أيضاً نجد:

$$y = \sin x^3$$

وهي دالة الدالة نظراً لأنه يمكن أن تكون:

$$y = \sin u = \sin (x)^3$$

وعلى هذا فهي دالة الدالة.

- **مشتقة دالة الدالة:**

- إذا كانت:
- $y = f(u)$ ، $u = g(x)$
- دالتين يمكن تفاضلهما، فإن مشقة دالة الدالة $y = f[g(x)]$ تعطى بالعلاقة :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

- ويمكن تعميم هذه النظرية للدوال الأكثر تعقيداً فمثلاً إذا كان:
- $y = f(u) , u = \phi(t) , t = \psi(x)$
- فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

مثال(7) : أوجد مشتقة الدالة:

$$y = (1 + x^2)^3$$

الحـــل

نضع $u = \phi(x) = 1 + x^2$ فتصبح $y = f(u) = u^3$

وتكون المشتقة المطلوبة:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$3\,u^2 \;.\; 2x = 3.(1 + x^2)^2 \;.\; 2x$$

ويمكن الحصول على نفس النتيجة مباشرة بدون فرض الدالة الداخلية "u" كالآتي:

تفاضل الدالة الخارجية y بالنسبة للقوس فنحصل على $3(1 + x^2)^2$ ثم نضرب الناتج في تفاضل القوس نفسه (الدالة الداخلية) بالنسبة إلى "x" أي (2x) .

الدوال المثلثية :

هناك ست نسب مثلثية لأي زاوية ولتكن θ هي:

$\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$, $\cot\theta$, $\sec\theta$, $\operatorname{cosec}\theta$

أو

$\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$

والدوال المثلثية هي في الواقع دوال دورية أي أن منحنى هذه الدوال يكرر نفسه كل فترة أي أن:

$$f(x + na) = f(x)$$

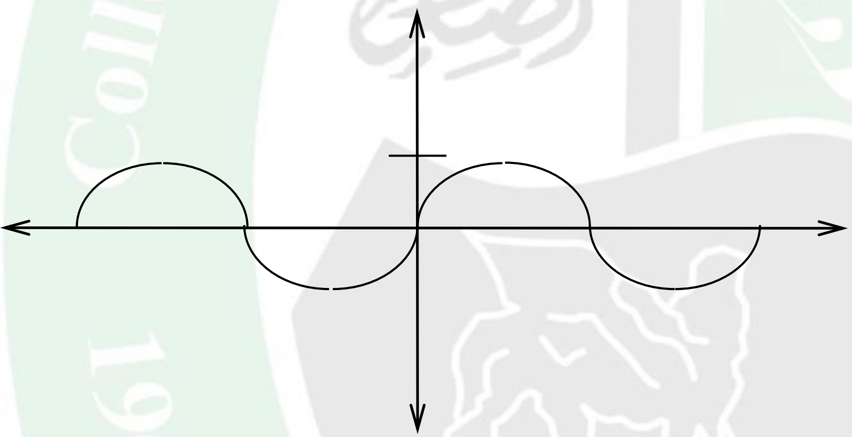
حيث a ثابت ، n عدد صحيح .فنجد أن الدالتين $\sin x, \cos x$ ومقـــلوبها $\sec x$, $\operatorname{cosec} x$ كلها دوال دورية دورة كل منها (2π) وذلك لأن :

$$\sin(x+2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x+2\pi) = \cos x$$

$y = \sin x$

نلاحـــظ أن المنحنــــى يخــرج مــن نقطـــة الأصل لأن: $\sin 0 = 0$ وتأخذ الدالـة في التزايد مع الزاوية حتى تصل إلى القيمة (1) عنـد $x=\pi/2$ ثم تعـود إلـى التنـاقص حتــى تصـل إلــى الصـفر عنـد $x= \pi$ وتتوالى في التناقص حتى تصل إلى (-1) عنـد $x= 3\pi/2$ ثم تعـاود التزايـد إلـى أن تصل إلى الصفر عند $x= 2\pi$



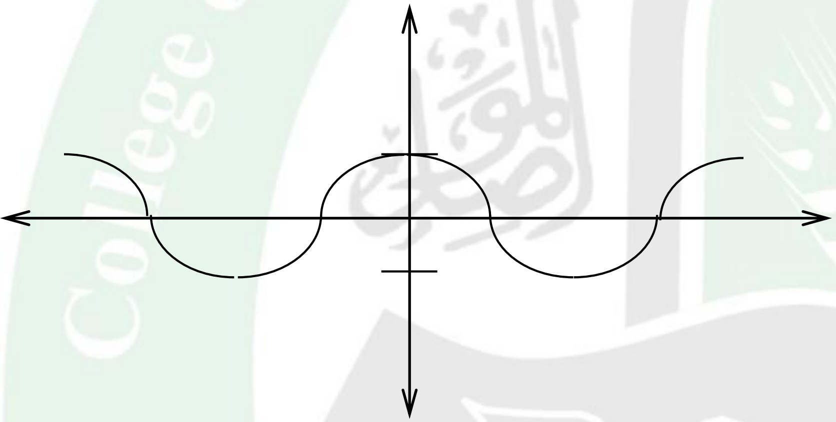
وحيث أن sin x دالة دورية كما ذكرنا في دورتها 2π فإنها تتكرر بعد ذلك كل فترة طولها 2π كذلك نجد أن هذه العلاقة فردية نظراً لأن:

$$\sin(-x) = -\sin x$$

والمنحني متماثل بالنسبة لنقطة الأصل في الشكل . كذلك نلاحظ أن الدالة sin x مستمرة عند أي قيمة للمتغير x كما هو واضح من اتصال منحناها .

كذلك يوضح الشكل التالي منحنى الدالة y=cos x

$y = \cos x$



نلاحظ أنها تبدأ بالقيمة (1) عندما x=0

وتتناقص حتى تصل إلى القيمة (-1) عند x

ثم تتزايد حتى تصل إلى الصفر عند $=\pi$

وتستمر في التزايد حتى تصل $x = 3\pi/2$

ثانية إلى أكبر قيمة لها وهي (+1) عند

$x=2\pi$

ونلاحظ أن هذه الدالة متصلة وزوجية لأن $\cos(-x) = \cos x$ ومنحناها متماثل بالنسبة لمحور الصادات ونلاحظ أن منحنى الدالة $\cos x$ ينشأ من منحنى الدالة $\sin x$ بإزاحة محور الصادات إلى اليمين مسافة $\pi/2$ وهو واضح من العلاقة:

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

كذلك فإن الدالتان $y = \cot x$, $y = \tan x$ دالتان

دوريتان دورة كل منهما π لأن:

$$\tan(\pi + x) = \tan x\ ,$$

$$\cot(\pi + x) = \cot x$$

وذلك لجميع قيم x.

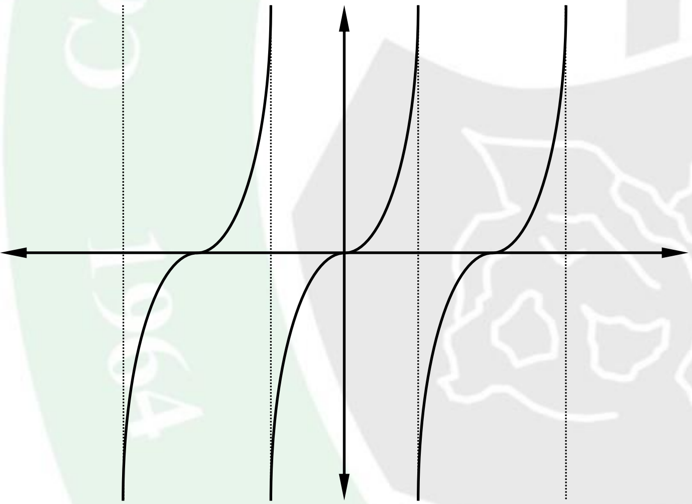
$$y = \tan x$$

1- الدالة مستمرة عند جميع قيم x

المحدودة فيما عدا النقط:

$$x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad ,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2$$



أي أن منحنى الدالة غير متصل عند النقط:

$$x = \frac{n\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \ldots\ldots$$

وهذا واضح من العلاقة :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

حيث ينعدم المقام cos x عند هذه القيم وتصبح الدالة غير معرفة عند هذه النقط.

2- الدالة tan x فردية أي أن: $\tan(-x) = -\tan x$.

3- الدالة tan x غير مقيدة ويمكن أن تأخذ القيم من $-\infty$ إلى $+\infty$ أى أن مدى الدالة غير محدود.

4- الدالة دورية دورتها π.

ويمكن إستنتاج منحنى الدالة $y = \cot x$ من منحنى الدالة $\tan x$ باعتبار أن:

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

أو من الدالتين: $\cos x$, $\sin x$ باعتبار أن:

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

ومنحنى الدالة $y = \cot x$ يكون متصلاً في جميع النقط إلا عند قيم x التي ينعدم عندها المقام $\sin x$ أي عند النقط:

$$x = n\pi \ , n = 0, \pm 1 , \pm 2$$

وهذه الدالة فردية ومنحناها متماثل بالنسبة لنقطة الأصل:

$$\cot(-x) = -\cot x$$

كما أن الدالة دورية دورتها π وهي غير مقيدة فتأخذ جميع القيم بين $-\infty$ و $+\infty$.

كذلك يمكن استنتاج منحنى الدالة sec x باعتبارها مقلوب الدالة cos x وعلى هذا فإن: sec x تكون مستمرة في جميع قيم x فيما عدا النقط التي ينعدم عندها cos x أي عند:

$$u = 3\,x^4$$

وهي دالة زوجية ومنحناها متماثل بالنسبة لمحور الصادات :

sec (-x) = sec π

كما أنها دورية دورتها 2π :

$$\sec(x+2\pi) = \frac{1}{\cos x + 2\pi} = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

وحيث أن مدى الدالة cos x هو (1 , 1-) فإن مدى الدالة sec x هو جميع الأعداد التي لا تقع في الفترة المفتوحة (1 , 1-) أي أن منحنى الدالة يقع خارج الشريط الأفقي المحدد بالمستقيمين: y = ±1.

بالنسبة للدالة $y = cosec\ x$ فإنه يمكن استنتاج منحناها بقلب منحنى الدالة $\sin x$ على اعتبار أن:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

وعلى هذا فإن الدالة مستمرة عند جميع قيم x فيما عدا عند القيم التي ينعدم عندها المقام

أي عند:

$$x = n\pi\ ,\ n = 0\ ,\ \pm 1\ ,\ \pm 2$$

وهذه الدالة غير مقيدة وتأخذ جميع القيم التي لا تقع في الفترة (1 , 1-) وهي دالة فردية ومنحناها متماثل بالنسبة لنقطة الأصل. كما أنها دورية ودورتها 2π.

المشتقة الأولى للدوال المثلثية:

أولاً: مشتقة الدالة:

$$y = \sin x$$

حيث أن الخمسة دوال المثلثية الأخرى معرفة بدلالة $\sin x$ إذن يكفي ايجاد مشتقة $\sin x$ بالمبادئ الأولية للتفاضل ومنها يمكن استنتاج باقي المشتقات للدوال المثلثية الأخرى.

وعلى ذلك فإن خطوات إيجاد المشتقة الأولى للـــدالة $y = \sin x$ من المبادئ الأولية تكون كما يلى:

$$y=\sin x \qquad \therefore\ y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$$

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x)-\sin x$$

$$= 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\therefore\ \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}$$

$$= \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{1}{2}\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)\lim_{\frac{\Delta x}{2}\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$$

$$= \cos x\,.1=\cos x \qquad \therefore\ \frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

وإذا كانت "U " أية دالة في x ويكمن تفاضلها أي $u = \Phi(x)$ وكانت $y = \sin u$ فمن قانون دالة الدالة نحصل على:

$$\frac{d}{dx}(\sin u) = \cos u . \frac{du}{dx}$$

مثال (9) : أوجد مشتقة كل من الدوال الآتية:

$$a)\quad y = \sin(3-2x) \quad , \quad b)\quad y = \sin(5x^2+1)$$

الحـــل

$$a)\quad \frac{dy}{dx} = \cos(3-2x) . \frac{d}{dx}(3-2x) = -2\cos(3-2x)$$

$$b)\quad \frac{dy}{dx} = \cos(5x^2+1) . \frac{d}{dx}(5x^2+1) = 10x \ \cos(5x^2+1)$$

ثانياً : مشتقة الدالة: $y = \cos x$

نلاحظ أن:

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

ومنها ينتج أن:

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{d}{dx}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).-1 = -\sin x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

وإذا كانت $y = \cos u$ حيث $u = \Phi\ (x)$ فإن:

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cos u) = -\sin u.\frac{du}{dx}$$

ثالثاً : المشتقة الأولى للدالة: $y = \tan x$

حيث أن:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

وبتطبيق قانون مشتقة خارج قسمة دالتين نجد أن:

$$\frac{d}{dx}=(\tan x)=\frac{(\cos x)\cos x-\sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\tan x)=\sec^2 x$$

وإذا كانت $y = \tan u$ حيث $u = \Phi(x)$ فإن:

$$\frac{d}{dx}(\tan u)=\sec^2 u\frac{du}{dx}$$

رابعاً : المشتقة الأولى للدالة: $y = \cot x$

يمكن إيجاد المشتقة الأولى لهذه الدالة إما على أساس:

$$\cot x = \frac{1}{\tan x}$$

أو على أساس أن:

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

فإذا إعتبرنا العلاقة الأخيرة. أى أن:

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{(-\sin x).\sin x - \cos x(\cos x)}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x}$$

$$= -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\cot x) = -\operatorname{cosec}^2 x$$

and

$$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\operatorname{cosec}^2 u \,.\, \frac{du}{dx}$$

خامساً : المشتقة الأولى للدالة: $y = \sec x$

لإيجاد مشتقة $\sec x$ نضع

$$y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = -\frac{(-\sin x)}{(\cos^2 x)} = \sec x \, . \tan x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \, . \tan x$$

and

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \sec u \, . \tan u \, . \frac{du}{dx}$$

سادساً : المشتقة الأولى للدالة: $y = cosec\ x$

بإعتبار أن:

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\operatorname{cosec} x \,.\, \cot x$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} x) = -\operatorname{cosec} x \,.\, \cot x$$

and

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} u) = -\operatorname{cosec} u \,.\, \cot u \,.\, \frac{du}{dx}$$

مثال (10): إوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

$$a)\quad y=\tan\sqrt{1+x^2}$$

$$b)\quad y=\operatorname{cosec}(\sin x)$$

$$c)\quad y=x^3\sec^2 3x$$

$$d)\quad y=\frac{1-\cot^2 x}{1+\cot^2 x}$$

الحــــل

بتطبيق قوانين المشتقات السابقة نجد أن:

$$a)\frac{dy}{dx}=\sec^2\sqrt{1+x^2}\ .\frac{d}{dx}\sqrt{1+x^2}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ .\ \sec^2\sqrt{1+x^2}$$

$$b)y=\operatorname{cosec}(\sin x)$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=-\operatorname{cosec}(\sin x).\cot(\sin x).\frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$=-\cos x\,.\operatorname{cosec}(\sin x).\cot(\sin x)$$

$$c)\quad y=x^3\sec^2 3x=x^3(\sec 3x)^2$$

$$\therefore\frac{dy}{dx}=x^3.2(\sec 3x).\frac{d}{dx}(\sec 3x)+(\sec 3x)^2\ .3x^2$$

$$=2x^3.\sec 3x\,.(3\sec 3x\,.\tan 3x)+3x^2.\sec^2 3x$$

$$=3x^2\ .\sec^2 3x(2x\,.\tan 3x+1)$$

$$d) \quad y=\frac{1-\cot^2 x}{1+\cot^2 x}$$

لايجاد مشتقة هذه الداله نلاحظ أنه يمكن تبسيطها كالأتى :

$$y=\frac{1-\cot^2 x}{1+\cot^2 x}=\frac{1-\cot^2 x}{\operatorname{cosec}^2 x}$$

$$=\sin^2 x-\cos^2 x=-\cos 2x$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=2\sin 2x$$

المشتقة الأولى للداله اللوغاريتمية:

سبق أن أثبتنا أن:

$$\lim_{m \to 0} (1+m)^{\frac{1}{m}} = e$$

وأمكننا حساب قيمة (e) مقربه لأي عدد يشاء من الأرقام العشرية. ويسمى اللوغاريتم طبيعيا إذا كان للأساس (e) ويرمز للوغاريتم الطبيعي بالرمز $Log\, x$ دون ذكر للأساس أو بالرمز $Ln\, x$ وللتحويل من اللوغاريتم الطبيعي إلى لوغاريتم لأي أساس a مثلا نستخدم العلاقة:

$$Log_a\ x = Log_a\, e \,.\, Ln\, x$$

وللأساس 10 أهميه خاصة كما نعلم من الحسابات باستخدام اللوغاريتم

$$Log_{10}\ x = Log_{10}\, e \,.\, Ln\, x \ = 0.4343\ Ln\, x$$

$$Ln\, x = Ln\, 10 \,.\, Log_{10}\ x = 2.303\, Log_{10}\ x \,.$$

وإذا كانت $y = \log_a x$ هي داله لوغاريتمية لأي أساس a بحيث أن $0 < x < \infty$ فإنه لإيجاد المشتقة الأولى لهذه الدالة نجد أن:

$$y = \mathrm{Log}_a\ x$$

$$\therefore y + \Delta y = \mathrm{Log}_a\ (x + \Delta x)$$

$$\therefore \Delta y = \mathrm{Log}_a\ (x + \Delta x) - \mathrm{Log}_a\ x\ ,\ x = \mathrm{Log}_a\ \frac{x + \Delta x}{x}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\mathrm{Log}_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\mathrm{Log}_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x}\mathrm{Log}_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)\frac{x}{\Delta x}$$

نضع: $$\frac{\frac{d}{dx}uv}{uv} = \frac{\frac{du}{dx}}{u} + \frac{\frac{dv}{dx}}{v}$$

$$\frac{1}{m} = \frac{x}{\Delta x}$$

فتكون:

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \operatorname{Log}_a (1+m)^{\frac{1}{m}}$$

وبأخذ النهايات عندما $\Delta x \to 0$ وملاحظة أنه عندما $\Delta x \to 0$ فإن $m \to 0$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{m \to 0} \frac{1}{x} \operatorname{Log}_a (1+m)^{\frac{1}{m}} = \frac{1}{x} \operatorname{Log}_a e$$

وبذلك فالمشتقة الأولى للداله اللوغاريتمية لأي أساس (a) هى:

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{Log}_a x\right) = \frac{1}{x} \operatorname{Log}_a e \quad .$$

- المشتقة الأولى للدوال العكسية:

إذا كان للدالة $y = f(x)$ داله عكسيه $x = \phi(y)$ (*بالطريقة السابق شرحها*) *وكان لهذه الدالة العكسية عند النقطة* y *مشتقة* $\Phi'(y)$

لا تساوى الصفر فإنه عند النقطة المناظرة x يكون للداله: $y = f(x)$ مشتقة $f'(x)$

تساوى $\dfrac{1}{\Phi'(y)}$ أي أن:

$$f'(x) = \frac{1}{\Phi'(y)} \text{ or } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

أما إذا كانت الدالة لوغاريتمية طبيعية للأساس (e) تكون المشتقة هي :

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Ln}\ x) = \frac{1}{x}$$

وعليه إذا كان $y = \mathrm{Ln}\ u$ حيث $u = \phi(x)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\mathrm{Ln}\, u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

وبالنسبه للداله اللوغاريتمية لأي أساس (a) تكون:

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{Log}_a u) = \frac{1}{u}\ \frac{du}{dx}\,\mathrm{Log}_a e$$

ويمكن كتابتها أيضا على الصورة:

$$\frac{d}{dx}(Log_a\, u) = \frac{1}{u.Ln\,a} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال (11) : إوجد مشتقة الدالة : $y = Log_a (x^2 + 2)$

الحـــــل -

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x^2+2}\frac{d}{dx}\left(x^2+2\right) Log_a e = \frac{2x\ Log_a e}{x^2+2}$$

$$\text{or}\ \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(x^2+2\right)\cdot Ln\,a}\ \frac{d}{dx}\left(x^2+2\right) = \frac{2x}{\left(x^2+2\right)Ln\,a}$$

مثال (12): فاضل بالنسبه إلى x الدالة : $y = Ln\ x^3 \left(x^2+1\right)^{\frac{5}{2}}$

الحـــــل

يمكن كتابة المعادلة على الصورة الأبسط بأخذ اللوغاريتم أولا :

$$y = 3\,Ln\ x + \frac{5}{2} Ln\left(x^2+1\right)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{3}{x} + \frac{5}{2\left(x^2+1\right)} 2x = \frac{3}{x} + \frac{5x}{x^2+1} = \frac{8x^2+3}{x\left(x^2+1\right)}$$

مثال (13): إوجد المشتقة الأولى للدالة:

$$y = Ln\ \sin x$$

الحـــــــل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x}\cos x \qquad = \cot x$$

ولإثبات ذلك نفاضل طرفي العلاقة العكسية $x = \phi(y)$ بالنسبة إلى x أخذين في الاعتبار أن y داله في x نجد أن :

$$1 = \Phi'(y) . \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{1}{\Phi'(y)} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

وهو المطلوب .

المشتقة الأولى للدوال المثلثية العكسية:

أولا : الدالة:

$$y = \sin\text{-}1\ x$$

ويقصد بهذه الداله أن y عباره عن الزاوية التي جيبها x أى أن:

$$x = \sin y$$

وتسمى الصورة الأخيرة بالداله المباشرة والصورة الأولى بالداله العكسية

ولإيجاد مشتقة هذه الدالة تفاضل طرفي العلاقه $x = \sin y$ بالنسبه إلى y :

$$\frac{dx}{dy} = \cos y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\sin^{-1} x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,, \quad -\frac{\pi}{2} \le \sin^{-1} x \le \frac{\pi}{2}$$

وقد أخذت الإشارة الموجبة أمام الجذر لأن الدالة: $y = \sin^{-1} x$ تأخذ قيما في الفتره

$$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$$

وبالتالى يكون $\cos y \ge 0$ وإذا كانت "u" داله للمتغير "x" فإنه باستخدام دالة الدالة يمكن إثبات أن:

$$\frac{d}{dx}\sin^{-1} u = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

مثال (14): إوجد تفاضل الدالة y بالنسبه إلى x إذا كان:

$y = \sin^{-1}(\tan x)$

الحـــــل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x}{\sqrt{1-\tan^2 x}}$$

ثانيا: الداله: $y = \cos^{-1} x$

من تعريف هذه الدالة العكسية على أنها الدالة العكسية للدالة $x = \cos\ y$

" ولإيجاد مشتقة دالة جيب التمام العكسية تفاضل طرفي العلا قه $x = \cos\ y$
بالنسبه إلى " y " كما سبق في الحالة السابقة.

$$\frac{dx}{dy} = -\sin\ y$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\cos^{-1} x\right) = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} \qquad 0 \le \cos^{-1} ç \le \pi$$

$$, \frac{d}{dx} \cos^{-1} u = -\frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{1-u^2}}$$

(حيث u داله للمتغير x).

ثالثا : الدالة : $y = \tan^{-1} x$

تعرف هذه الدالة بأنها الدالة العكسية للداله $x = \tan y$ وهذه الدالة معرفه لجميع قيم x في الفتره $-\infty < x < \infty$ وتعطى قيمتها الفترة:

$-\frac{\pi}{2} \langle y \langle \frac{\pi}{2}$ أى أن مداها هو: $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

ولإيجاد مشتقة هذه الدالة نتبع نفس الخطوات السابقة: $x = \tan y$

$$\therefore \frac{dx}{dy} = \sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} x\right) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tan^{-1} u\right) = \frac{\frac{du}{dx}}{1+u^2}$$

(حيث u داله للمتغير x) .

رابعاً : الدوال: $\sec^{-1} x$, $\operatorname{cosec}^{-1} x$, $\cot^{-1} x$

بنفس الطريقة السابقة يمكن حساب مشتقات الدوال المثلثية العكسية الباقية وهي كالآتي:

$$\frac{d}{dx}\left(\cot^{-1} x\right) = -\frac{1}{1+x^2} \quad , \quad 0 \langle \cot^{-1} x \langle \pi$$

$$\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} x\right) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \text{if } x \geq 1 \text{ then } 0 \leq \sec^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{if } x \leq -1 \text{ then } -\pi \leq \sec^{-1} x \langle -\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\operatorname{cosec}^{-1} x\right) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad \text{if } x \geq 1 \text{ then } 0 \langle \operatorname{cosec}^{-1} x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{if } x \leq -1 \text{ then } -\pi \langle y \leq -\frac{\pi}{2}$$

باستخدام دالة الدالة أي إذا كانت "u " داله للمتغير " x " فإن :

$$\frac{d}{d\,x}\left(\cot^{-1} u\right) = \frac{-\,{}^{du}\!/\!_{dx}}{1+u^2}$$

$$\frac{d}{d\,x}\left(\sec^{-1} u\right) = \frac{{}^{du}\!/\!_{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}\,,\ u^2 \rangle 1$$

$$\frac{d}{d\,x}\left(\operatorname{cosec}^{-1} u\right) = -\frac{{}^{du}\!/\!_{dx}}{u\sqrt{u^2-1}}\,,\ u^2 \rangle 1$$

مثال (15): إوجد

$$\frac{dy}{dx}$$

للداله: $y = \tan^{-1}(\tan x)$

الحـــــل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2 x}{1+\tan^2 x} = 1$$

وعندما d y /d x يساوى واحد معنى هذا أنه تفاضل المقدار "x" .. وهذا يمكن ملاحظته إذا حاولنا نفهم معنى المقدار tan-1 (tan x) فهو يعنى الزاوية التي ظلها ظا x فتكون هي الزاوية "x" وتفاضل "x" بالنسبه لـ "x" يساوى الواحد الصحيح

وعلى ذلك تكون قاعدة هامة بالنسبه لجميع النسب المثلثية كالآتي :

$$y = \sin^{-1} (\sin x) = x$$

$$y = \cos^{-1} (\cos x) = x$$

$$y = \tan^{-1} (\tan x) = x$$

وكذا بالنسبه لباقى النسب المثلثيه .

مثال (16) : إوجد dy / dx للداله:

$$y = \cot^{-1} x^3$$

الحــــــل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+\left(x^3\right)^2} \frac{d}{dx}\left(x^3\right) = \frac{-3x^2}{1+x^6} .$$

- المشتقة الأولى للداله الأسية: من المعروف أن الدالة العكسية للداله اللوغاريتمية $x = log_a$ y تكون الدالة الأسيه $y = a^x$ (حيث $a > 0$, $-\infty < x < \infty$) ولإيجاد مشتقة الداله الأسيه $y = a^x$ تفاضل الـــداله اللوغاريتمية $x = log_a y$ بالنسبه إلى "x":

$$1 = \frac{1}{y \,.\, Ln\, a} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = y \,.\, Ln\, a = a^x \,.\, Ln\, a$$

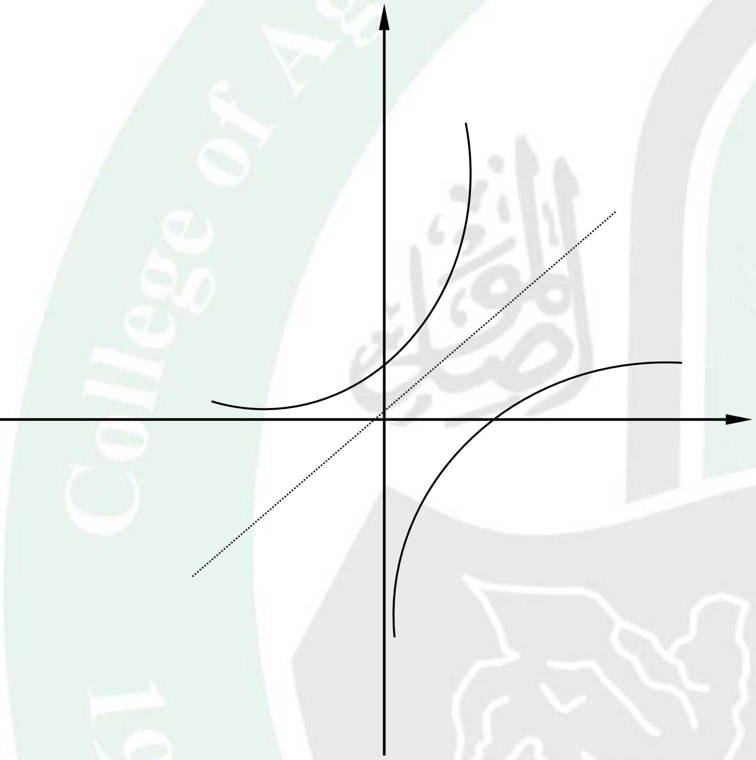
$$\therefore \frac{d}{dx}\left(a^x\right) = a^x\, Ln\, a$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(a^u\right) = a^u \,.\, \frac{du}{dx}\; Ln\, a$$

أما في حالة $a = e$ فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$$

(حيث $Ln\, e = 1$)



ويوضح الشكل التالي منحنى الدالتين: $y = \ln x$, $y = e^x$ حيث تنشأ إحداهما كصورة انعكاس للدالة الأخرى على المستقيم $y = x$

ومن الملاحظ أن مشتقة الدالة $y = e^x$ هي نفسها أي أنها لم تتأثر بعملية التفاضل وهذا يعنى بيانيا أن ميل المماس عند أي نقطة على منحنى الدالة $y = e^x$ يساوى الإحداثي الصادي لهذه النقطة.

مثال (17):

أوجد المشتقة الأولى لكل من الدالتين الآتيتين:

$$1)\ y = e^{x^2} \qquad\qquad 2)\ y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

الحـــــل

مما سبق نجد أن بالتفاضل بالنسبة إلى x فإن :

$$1)\ \frac{dy}{dx} = e^{x^2} \times \frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2x \times e^{x^2}$$

$$2)\ \frac{dy}{dx} = \frac{2\left(e^{2x}+1\right)e^{2x} - 2\left(e^{2x}-1\right)e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2} = \frac{4 \times e^{2x}}{\left(e^{2x}+1\right)^2}$$

- التفاضل اللوغاريتمي:

أحيانا يطلب منا إيجاد مشتقة بعض الدوال المعقدة مثل الدوال التي يدخل في

تكوينها عمليات ضرب وقسمة دوال "x" وأحيانا رفع دوال "x" إلى قوى هي في حد ذاتها

دوال "x" في هذه الحالة نلجأ إلى تبسيط الدالة المعطاة بأخذ اللوغاريتم للأساس "e" لكل

من الطرفين ثم نجرى عملية التفاضل بعد ذلك فمثلا:

$y = u^v$ حيث v , u دالتين لــــ x

$\therefore \ln y = \ln u^v = v \ln u$

وبالتفاضل بالنسبة إلى x نحصل على:

$$\frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \times \ln u + v \times \frac{d}{dx} \ln u$$

$$= \frac{dv}{dx} \ln u + \frac{v}{u} \times \frac{du}{dx}$$

وبالضرب في $y = u^v$ ينتج أن :

$$\frac{d}{dx}\left(u^v\right) = u^v \quad \frac{dv}{dx} \ln u + v\, u^{v-1} \; \frac{du}{dx}$$

مثــال (18): أوجد مشتقة الدالة :

$$y = x^x$$

الحـــــل

$$\ln y = x \times \ln x$$

$$\therefore \frac{1}{y} \times \frac{dy}{dx} = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(x^x\right) = x^x\,(\ln x + 1)$$

تطبيقات على التفاضل

معدلات التغير (المعادلات المرتبطة Related Rates):

- إذا ارتبط متغيران أو أكثر بعلاقة على شكل معادلة وكانت هذه المتغيرات تتوقف على الزمن t فإن معدلات التغير بالنسبة للزمن t لإحدى هذه المتغيرات يمكن حسابها إذا علمت معدلات التغير في المتغيرات الأخرى بالنسبة إلى الزمن t ويتم ذلك إذا فاضلنا العلاقات التي تربط هذه المتغيرات بعضها ببعض بالنسبة للزمن t، كما يتضح من الأمثلة التالية:

مثال (19): خزان على شكل مخروطي دائري قائم رأسه لأسفل وارتفاعه 10ft، نصف قطر قاعدته 5 ft، يسكب فيه الماء بمعدل ثابت $24\ ft^3/min$ أوجد معدل ارتفاع سطح الماء عندما يكون عمق الماء في المخروط 4 ft.

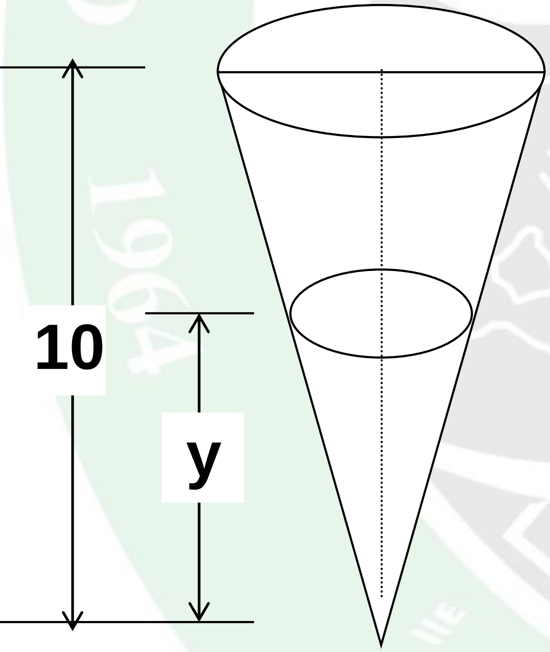
الحــــل

نفرض أن:

v = حجم الماء (ft^3) فى الخزان عند الزمن t(min).

x= نصف قطر (ft) يقطع المخروط عند سطح الماء.

y= ارتفاع الماء (ft) فـي الخزان عند اللحظة t.



معنى أن الماء يسكب في الخزان بمعدل ثابت $24\ ft^3/min$ هو أن:

والمطلوب الآن تعيين dy/dt عندما $y=4$

$$\frac{dv}{dt} = 24$$

$\therefore$ العلاقة التي تربط حجم الماء v بالعمق y وهي

$$v = \frac{1}{3}\pi . x^2 . y$$

وهى تحتوي على المتغير الإضافي x بجانب y , v إلا أنه يمكننا حذف x من تشابه المثلثات:-

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{10} \quad \text{or} \quad x = \tfrac{1}{2} y$$

ومن هذا ينتج أن:-

$$v = \frac{1}{12}\pi y^3$$

وبحساب مشتقة الطرفين بالنسبة إلى الزمن t نحصل على العلاقة بين المعدلين أي:-

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{4}\pi y^2 \frac{dy}{dt}$$

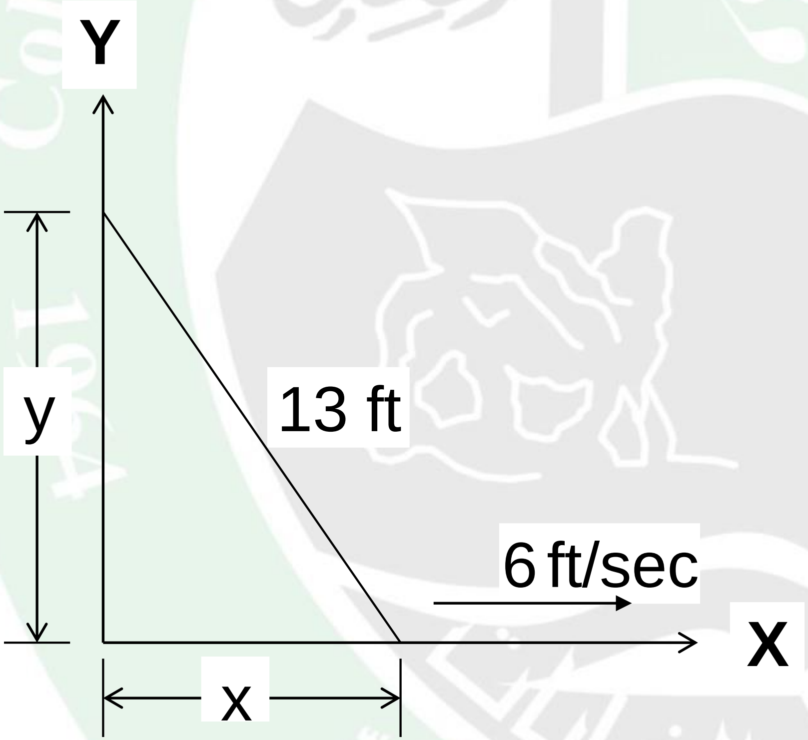
ومنها نجد أن:-

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{\pi y^2} \cdot \frac{dv}{dt}$$

وعندما يكون y=4 , dy/dt =24 تصبح:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4 \times 24}{\pi \times 16} = \frac{6}{\pi} \quad \text{ft/min}$$

مثال (20): سلم طوله 13 قدم يستند بطرفه العلوي على حائط رأسي وبطرفه السفلي على أرض أفقية. سحب السلم من طرفه السفلي بعيدا عن الحائط بمعدل ثابت 6 قدم / ثانية. احسب المعدل الذي ينزلق به الطرف العلوي للسلم على الحائط في اللحظة التي يبعد فيها عن الأرض 12 قدم.



الحــل

نفرض أن السلم في أي وضع من أوضاعه يأخذ الشكل والأبعاد المبينة بالشكل. والعلاقة التي تربط x , y عند أي لحظة t هي:

$$x^2 + y^2 = 13^2 = 169$$

والمطلوب إيجاد dy/dt عند اللحظة التى يكون فيها:

$$y = 12 \quad \text{ft} \quad \text{and} \quad \frac{\text{dx}}{\text{dy}} = 6 \quad \text{ft/sec.}$$

نفاضل العلاقة الأولى ضمنيا بالنسبة إلى الزمن t فنجد أن:

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \cdot \frac{dx}{dt}$$

حيث أنه عندما y=12، تكون x=5 من العلاقة الأولى. فبالتعويض ينتج أن:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{5}{12} \cdot 6 = -2.5 \quad ft/sec.$$

أي أن رأس السلم ينزلق إلى أسفل (وهذا ما تعنيه الإشارة السالبة من تناقص القيمة y) بمعدل 2.5 ft/sec

مثال (21): صفيحة من المعدن مثلثة الشكل تتمدد بالحرارة وارتفاعها يساوي نصف قاعدتها. أوجد طول القاعدة عندما يكون معدل زيادة المساحة $0.05\ cm^2/sec$ ومعدل زيادة طول قاعدتها مساويا $0.01\ cm/sec$.

الحـــل

نفرض أن الارتفاع h وطول القاعدة L والمساحة S

$$\therefore S = \tfrac{1}{2} hL = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} L^2 = \tfrac{1}{2} L^2$$

$$\therefore 0.05 = \tfrac{1}{2} L \times 0.01$$

$$\therefore L = \frac{2 \times 0.05}{0.01} = 10\ cm$$

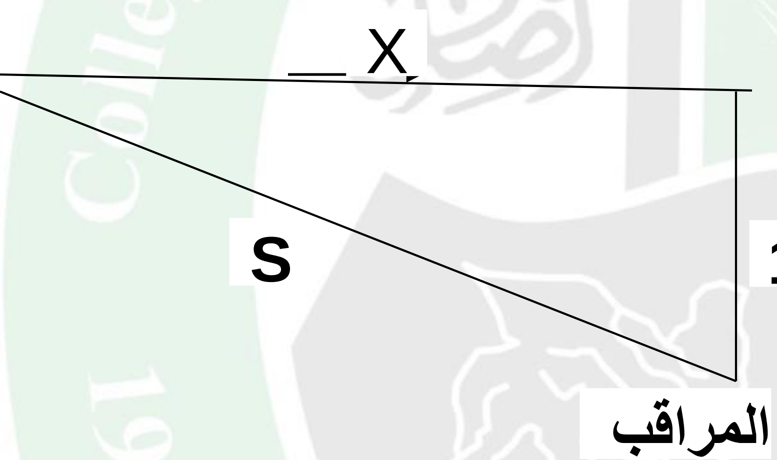
ومن حل الأمثلة السابقة يمكن أن نستنتج خطوات عامة لحل مثل هذه المسائل كما يلي:

- يرسم شكل مبسط يمثل المسالة وتوضح عليه الكميات العددية التي تبقى ثابتة خلال المسألة.
- يعبر عن الكميات والمتغيرات التي تتغير مع الزمن برموز جبرية ثم توجد علاقة أو علاقات تربط هذه المتغيرات مع بعضها.
- نفاضل مباشرة بالنسبة للزمن فنحصل على معدلات التغير للمتغيرات المختلفة.
- نعوض عن الكميات والمعدلات المعروفة من المسألة بقيمتها الحسابية للحصول على المعدل المطلوب إيجاده.

مثال (22): طائر على ارتفاع 1000 متر يطير أفقيا بسرعة 360كم/س يمر مباشرة فوق مراقب. أوجد معدل اقتراب الطائر من المراقب عندما يكون على بعد 2000 متر.

الحـــل

في هذه المسألة الارتفاع ثابت بالنسبة للطائر ولا يتغير لذا فقد وضع على الرسم المسافة x تتغير مع الزمن وكذلك S لذا فقد وضعت على هيئة رمز جبري.



ومن هندسة الشكل يتضح أن:

$$S^2 = x^2 + (1000)^2$$

نفاضل طرفي المعادلة بالنسبة إلى الزمن t

$$2S\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt}$$

Integration التكامل

- تعريف :
- تسمى الدالة $F(x)$ الدالة المقابلة بالتفاضل Anti-derivative للداله $f(x)$ فى الفترة $[a, b]$ إذا تحققت عند جميع نقط هذه الفترة المتساوية:
- مثال (1): أوجد الدالة المقابلة للداله: $f(x) = x^3$
- الحـــل
- من التعريف نجد أن:

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4$$

- هي الدالة القابلة حيث أن :

$$F'(x) = \left(\frac{x^4}{4}\right)' = x^3$$

- ولكن من الواضح أن هذه الدالة المقابلة ليست الوحيدة فيمكن اعتبار الدوال التالية دوال مقابله للداله: $f(x) = x3$

$$F(x) = \frac{1}{4}x^4 + 1 \quad , \quad F(x) = \frac{1}{4}x^4 - 5$$

$$F(x) = \tfrac{1}{4}x^4 + c$$

تعريـف: إذا كانت الدالة $F(x)$ داله مقابله للداله $f(x)$ فإن التعبير $F(x)+c$ يسمى التكامل غير المحدود Indefinite integrate للدالة $f(x)$ ويرمز له بالرمز :

$$\int f(x)\,dx$$

من التعريف ينتج أن:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

إذا تحقق $F'(x) = f(x)$ وفى هذا التعبير تسمى الدالة $f(x)$ موضوع التكامل والرمز $\int$ علامة التكامل كما يسمى العبارة $f(x)\,dx$ عنصر التكامل ، c ثابت التكامل ويمكن ملاحظة أن التكامل الغير محدود هو مجموع دوال أو منحنيات على الصورة: $y = F(x) + c$

مثـال (2): إذا كان ميل المماس عند أي نقطه من منحنى يتعين من المعادلة:

$$y = 15x^2$$

فأوجد معادلة المنحنى علما بأنه يمر بالنقطة: (-1,4).

الحـــل

ميل المماس هو:

$$\frac{dy}{dx} = 15x^2$$

وبالتحقيق مؤقتا نجد أن:

$$y = 5x^3 + c$$

وبما أن المنحنى يمر بالنقطة (-1,4)

$$4 = -5 + c \qquad c = 9$$

وتكون معادلة المنحنى هي:

$$y = 5x^3 + 9$$

بعض خواص التكامل غير المحدود :

1- تفاضل التكامل غير المحدود يساوى موضوع التكامل أى أنه :

$$\left(\int f(x)\ dx\right)' = \left(F(x) + c\right)' = f(x) \cdot$$

فمثلا:

$$\left(\int x^2\ dx\right)' = \left(\frac{x^3}{3} + c\right)' = x^2$$

2- تفاضله التكامل غير المحدود يساوى عنصر التكامل أي:

$$d\left(\int f(x)\ dx\right) = f(x)\ dx$$

وهذا ينتج مباشرة من الخاصية الأولى .

3- التكامل غير المحدود بتفاضله ينتج داله ما تساوى نفس الدالة مضافا إليها ثابت اختياري أي أن :

$$\int d\,F(x) = F(x) + c$$

والإثبات بحساب تفاضل كل من الطرفين.

-4 التفاضل غير المحدد للمجموع الجبري لعدد محدود من الدوال يساوى نفس المجموع الجبري لتكاملات هذه الدوال ، أي:

$$\int \left(f_1(x) + f_2(x) \right) \, dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx$$

ولإثبات ذلك نفاضل هذه العلاقة أخذين في الاعتبار الخاصية المشابهة لها في التفاضل فنجد أن :

$$\left[\int \left(f_1(x) + f_2(x) \right) dx \right] = f_1(x) + f_2(x)$$

$$\left[\int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx \right] = \left(\int f_1(x)\,dx \right) + \left(\int f_2(x)\,dx \right)$$

$$= f_1(x) + f_2(x)$$

5- يمكن أخذ المعامل الثابت في موضوع التكامل خارج علامة التكامل أي إذا كانت a قيمه ثابتة فإن:

$$\int a \; f(x)\, dx = a \int f(x)\, dx$$

وهذه الخاصية تأتى من نظيرتها في التفاضل:

$$\frac{d}{dx}\, a\, f(x) = a \frac{d}{dx} f(x)$$

أو بتفاضل طرفي المعادلة.

6- ضرب x في ثابت a :

$$if \quad \int f(x)\, dx = F(x) + c$$

$$\text{Then} \quad \int f(ax)\, dx = \frac{1}{a} F(ax) + c$$

بتفاضل طرفي المعادلة الأخيرة نجد أن :

$$\left(\int f(ax)\, dx \right)' = f(ax)$$

$$\left(\frac{1}{a} F(ax) + c \right)' = \frac{1}{a} (F(ax))' = \frac{1}{a} F'(ax)\, a$$

$$= F'(ax) = f(ax)$$

7- إضافة ثابت b إلى x

$$if \int f(x)\,dx = F(x) + c$$

$$\text{Then} \int f(x+b)\,dx = F(x+b) + c.$$

والإثبات بتفاضل طرفي المعادلة الأخيرة .

8- الجمع بين الحالتين (6) و (7)

$$if \quad \int f(x)\,dx = F(x) + c$$

$$\therefore \int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$$

مثال (3):

$$\int x^6\,dx = \frac{x^{6+1}}{6+1} + c = \frac{1}{7}x^7 + c$$

مثال (4):

$$\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$$

مثال (5):

$$\int (x+1)(x-2)\,dx = \int \left(x^2 - x - 2\right)dx$$

$$= \int x^2dx - \int xdx - 2\int dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + c$$

مثال (6):

$$\int \frac{x^2-2x+3}{x^3}\,dx = \int\left(\frac{1}{x} - 2x^{-2} + 3x^{-3}\right)dx$$

$$= \ln x - 2\frac{x^{-1}}{-1} + 3\frac{x^{-2}}{-2} + c = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + c$$

مثال (7):

$$\int \frac{dx}{x+5} = \ln(x+5) + c$$

مثال (8) :

$$\int \cos 3x\, dx = \frac{1}{3}\sin 3x + c$$

مثال (9):

$$\int \sin(2x-5)\, dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-5) + c$$

مثال (10):

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin x}\, dx = \ln(1+\sin x) + c$$

مثال (11):

$$\int \left(5e^x - \frac{4}{x} + 3^x\right) dx = \int 5e^x\, dx - \int \frac{4}{x}\, dx + \int 3^x\, dx$$

$$= 5e^x - 4\ln x + \frac{1}{\ln 3}.3^x + c$$

بعض التكاملات القياسية العامـة :

أولا : صورة التكاملات الآتية:

$$\int (x+b)^n \, dx,,, \int (ax+b)^n \, dx$$

نعلم من التفاضل أن :

$$\frac{d}{dx}(x+b)^{n+1} = (n+1)(x+b)^n$$

$$\therefore (x+b)^n = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{n+1}\right)(x+b)^{n+1}$$

$$\therefore \int (x+b)^n dx = \frac{(x+b)^{n+1}}{n+1} + c.........(1)$$

والقانون (1) صحيح لجميع قيم n ما عدا القيمة الوحيدة n=-1 إذ أنه بتطبيقه على هذه الحالة الخاصة يعطى نتيجة ليس لها معنى معين ، غير أننا نعلم من التفاضل أن الدالـــــــــة: $ln\ (x+b)$ هي الدالة التي مشتقتها الأولى بالنسبة إلى (x) تساوى

$$\frac{1}{x+b}$$

وعلى ذلك تكون :

$$\int \frac{1}{x+b}\,dx = \ln\left(x+b\right)+c \ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

كذلك نعلم من التفاضل أن:

$$\frac{d}{dx}(ax+b)^{n+1} = a\,(n+1)(ax+b)^{n}$$

$$\therefore \int (ax+b)^{n}dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

والقانون (3) صحيح لجميع قيم n ما عدا القيمة الو حيده n= -1 وفى هذه الحالة الخاصة نرى كما سبق أن:

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\ln\,(ax+b)+c$$

مثال (12):

$$\int \frac{1}{(2x-7)^6}.dx = \int (2x-7)^{-6}.dx$$

$$= \frac{(2x-7)^{-6+1}}{2(-6+1)} + c = \frac{-1}{10(2x-7)^5} + c$$

مثال (13):

$$\int \frac{1}{3-5x}.dx = \frac{-1}{5}\ln(3-5x) + c$$

ثانيا : قياسا على القواعد السابقة يمكننا إيجاد التكاملات القياسية العامة التالية :

$$(1)\ \int \sin(ax+b)\,dx = \frac{-1}{a}\cos(ax+b)+c$$

$$(2)\ \int \sec^2(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)+c$$

$$(3)\ \int \operatorname{cosec}(ax+b)\cdot\cot(ax+b)\,dx = \frac{-1}{a}\operatorname{cosec}(ax+b)+c$$

$$(4)\ \int e^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax+b}+c$$

$$(5)\ \int k^{ax+b}\,dx = \frac{1}{a.\ln k}.k^{ax+b}+c\ (k=cons.t)$$

أمثلـــه:

$$(1)\quad \int \frac{1}{4x^2+5}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+\frac{5}{4}} = \frac{1}{4}\times\frac{2}{\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}\tan^{-1}\frac{2x}{\sqrt{5}}+c$$

$$(2)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}} = \sin^{-1}\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\frac{3}{2}} = \sin^{-1}\left(\frac{2x+1}{3}\right)+c$$

$$(3)\quad \int \frac{dx}{4x^2-12x+9} = \int \frac{dx}{(2x-3)^2} = \frac{-1}{2(2x-3)}+c$$

تكامل الدوال المثلثيه:

أولا : الدوال المثلثيه الأساسيه :

$$(1)\quad \int \sin x.\,dx = -\cos x.\,dx + c$$

$$(2)\quad \int \cos x.\,dx = \sin x.\,dx + c$$

$$(3)\quad \int \tan x.\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx$$
$$= -\ln(\cos x) + c = \ln(\sec x) + c$$

$$(4)\quad \int \cot x.\,dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx = \ln(\sin x) + c$$

$$(5)\quad \int \sec x . dx = \int \sec x \frac{\tan x + \sec x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} dx$$

$$= \ln\left(\sec x + \tan x\right) + c$$

$$(6)\quad \int co\sec x..dx = \int co\sec x \frac{-\cot x + co\sec x}{co\sec x - \cot x} dx$$

$$= \int \frac{-co\sec x \cot x + co\sec^2 x}{co\sec x - \cot x} dx$$

$$= \ln\left(co\sec x - \cot x\right) + c$$

مثال (14):

$$\int \sec 5x \, dx = \frac{1}{5} \ln \left(Sec\, 5x + \tan 5x \right) + \mathrm{c}$$

مثال (15):

$$\int \tan \frac{1}{7} x \, dx = 7 \ln \sec \frac{1}{7} x + c$$

$$\int \operatorname{cosec}(3x+2)\, dx = \frac{1}{3} \ln \left[\operatorname{cosec}(3x+2) - \cot(3x+2) \right] + c$$

مثال (16): إوجد قيمة :

$$\int \frac{\tan\frac{1}{x}}{x^2}\,dx$$

$$\therefore \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}$$

$$\therefore d\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{dx}{x^2}$$

$$\therefore \int \tan\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x^2} = -\int \tan\frac{1}{x}\cdot d\,\frac{1}{x} = -\ln\sec\frac{1}{x} + c$$

ثانيا : تكاملات مربعات الدوال المثلثية الأساسية :

$$(1)\ \int \sin^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\, dx = \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{1}{2}\sin 2x\right) + c$$

$$(2)\ \int \cos^2 x\, dx = \tfrac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx = \tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\sin 2x + c$$

$$(3)\ \int \tan^2 x\, dx = \int \left(\sec^2 x - 1\right) dx = \tan x - x + c$$

$$(4)\ \int \cot^2 x\, dx = \int \left(\operatorname{cosec}^2 x - 1\right) dx = -\cot x - x + c$$

$$(5)\ \int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$$

$$(6)\ \int \operatorname{cosec}^2 x\, dx = -\cot x + c$$

مثال (17): إوجد:

$$\int (\sec \tfrac{1}{2} x + \tan \tfrac{1}{2} x)^2 \, dx$$

الحــــل

$$\int \left(\sec^2 \tfrac{1}{2} x + 2\sec \tfrac{1}{2} x \tan \tfrac{1}{2} x + \tan^2 \tfrac{1}{2} x\right) dx$$

$$= \int \left(\sec^2 \tfrac{1}{2} x + 2\sec \tfrac{1}{2} x \tan \tfrac{1}{2} x + \sec^2 \tfrac{1}{2} x - 1\right) dx$$

$$= \int \left(2\sec^2 \tfrac{1}{2} x + 2\sec \tfrac{1}{2} x \tan \tfrac{1}{2} x - 1\right) dx$$

$$= 2 \times 2 \tan \tfrac{1}{2} x + 2 \times 2 \sec \tfrac{1}{2} x - x + c$$

$$= 4 \tan \tfrac{1}{2} x + 4 \sec \tfrac{1}{2} x - x + c$$

مثال (18): أوجد:

$$\int (1+\sin 2x)^2 \, dx$$

الحــــل

$$\int (1+\sin 2x)^2 dx = \int \left(1+2\sin 2x+\sin^2 2x\right) dx$$

$$= \int \left(1+2\sin 2x+\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{3}{2}+2\sin 2x-\tfrac{1}{2}\cos 4x\right) dx$$

$$= \frac{3}{2}x-\cos 2x-\tfrac{1}{8}\sin 4x+c.$$

ثالثا : تكاملات حواصل ضرب الدوال المثلثية :

لتقييم التكاملات الأتيه:

$$(1)\ \int \sin mx \cdot \sin nx .\, dx$$

$$(2)\ \int \cos mx \cdot \cos nx .\, dx \qquad\qquad (m \# n)$$

$$(3)\ \int \sin mx \cdot \cos nx .\, dx$$

نحول حاصل الضرب إلى مجموع باستخدام إحدى المتطلبات التالية :

$$\sin mx \cdot \sin nx = \tfrac{1}{2}\left(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x\right)$$

$$\cos mx \cdot \cos nx = \tfrac{1}{2}\left(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x\right)$$

$$\sin mx \cdot \cos nx = \tfrac{1}{2}\left(\sin(m-n)x + \sin(m+n)x\right)$$

:أمثله محلوله

$$(1)\int \sin 5x \sin 2x\, dx = \int \tfrac{1}{2}\left(\cos 3x - \cos 7x\right) dx$$

$$= \tfrac{1}{6}\sin 3x - \tfrac{1}{14}\sin 7x + c$$

$$(2)\int \cos 3x \cos 5x\,.dx = \int \tfrac{1}{2}\left(\cos(-2x) + \cos 8x\right) dx$$

$$= -\tfrac{1}{4}\sin(-2x) + \tfrac{1}{16}\sin 8x + c$$

$$(3)\int \sin 3x.\cos x\, dx = \tfrac{1}{2}\int \left(\sin 2x + \sin 4x\right) dx$$

$$= -\tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{2}\cos 2x - \tfrac{1}{2}\times\tfrac{1}{4}\cos 4x + c$$

$$= -\tfrac{1}{8}\left(2\cos 2x + \cos 4x\right) + c.$$

طرق التكامل :

1- التكامل بالتعويض : (تحويل المتغير) :

Integration by substitution (Change of variable)

نفرض أن المطلوب إيجاد التكامل

$$\int f(x)\,dx$$

وقد تعذر تعيين الدالة المقابلة للدالة $F(x)$ مع علمنا أنها تتواجد فنحول المتغير في التعبير تحت علامة التكامل بوضع:

$$x = \Phi(u) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

حيث $\Phi(u)$ داله مستمرة لها مشتقة مستمرة ودوال عكسية فيكون :

$$dx = \Phi'(u)\,du$$

$$\therefore \int f(x)\,dx = \int f[\Phi(u)]\,\Phi'(u)\,du \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

والمقصود هنا أننا بعد إجراء التكامل في الطرف الأيمن نعبر عن (u) في الناتج بدلالة (x) في العلاقة (1).

ملاحظات :

1- المفروض في تطبيق القاعدة السابقة أن نختار الدالة $x = \Phi(u)$

بحيث يمكن تقييم التكامل غير المحدود من الطرف الأيمن من المعادلة (2). إلا أنه من الناحية العملية يكون من الأوفق أحيانا أن نجرى عملية تحويل المتغير في الصورة $\boldsymbol{u = \Phi(x)}$ **بدلا من** $x = \Phi(u)$ وتطبق القاعدة (2) في الاتجاه العكسي أي أن:

$$u = \Phi(x)$$

$$\therefore du = \Phi'(x)\cdot dx$$

$$\int f\left[\Psi(x)\right]\Psi^{'}(x)\,dx = \int f(u)\,du \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

- كتطبيق الملاحظة السابقة تعتبر التكاملات التي على الصورة:

$$\int \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)} dx \cdot$$

بوضع

$$u = \Psi(x)$$

نجد أن:

$$du = \Psi'(x)\, dx$$

$$\therefore \int \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)}\, dx = \int \frac{du}{u} = \ln u + c = \ln\left(\Psi(x)\right) + c$$

من هذا نستخلص القاعدة التالية :

إذا كان موضوع التكامل كسرا بسطه هو مشتقة المقام فإن التكامل يكون لوغاريتم المقام مضافا إليه ثابت اختياري .

- تعتبر التكاملات التى على الصورة :

$$\int \frac{\Psi'(x)}{\sqrt{\Psi(x)}}dx$$

بوضع:

$$u = \Psi(x)$$

$$\therefore du = \Psi'(x)\,dx$$

$$\therefore \int \frac{\Psi'(x)}{\sqrt{\Psi(x)}}\,dx = \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \int u^{-1/2}\,du = 2\sqrt{u} + c = 2\sqrt{\Psi(x)} + c$$

بذلك نحصل على القاعدة التالية :
إذا كان موضوع التكامل كسرا بسطه هو مشتقة المقدار تحت الجذر الموجود فى المقام فإن التكامل يصبح ضعف الجذر الموجود فى المقام مضافا إليه ثابت اختياري .

مثال(19): أوجد قيمة :

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

الحـــل

في هذا المثال يمكن جعل البسط تفاضل المقام بضرب الأول في (2) وقسمة التكامل على (2) ينتج أن :

$$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = \tfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c$$

مثال (20):   إوجد قيمة:

$$\int \sqrt{\sin x}\ \cos x . dx$$

الحـــل

$$Put \quad u = \sin x$$

$$\therefore du = \cos x \ dx$$

$$\therefore \int \sqrt{\sin x} \quad \cos x \ \ dx = \int \sqrt{u} \quad du = \int u^{1/2} \quad du$$

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} + c = \frac{2}{3} (\sin \ x)^{3/2} + c$$

مثال (21): إوجد قيمة:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$$

الحــــل

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}$$

$$Put \qquad u=\frac{x}{a} \quad , \quad x=au \quad , \quad dx = a \ du$$

$$\therefore \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1} u + c$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a} + c \quad .$$

مثال (22): إوجد قيمة:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

الحـــل

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}$$

$$\text{put} \quad u = \frac{x}{a} \quad , x = a\,u \quad dx = a\,du$$

$$\frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{a\,du}{\sqrt{1 - u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1 - u^2}} = \text{Sin}^{-1} u + c$$

$$= \text{Sin}^{-1} \frac{x}{a} + c$$

مثال (23): أوجد قيمة :

$$\int \frac{(\ln x)^3\, dx}{x}$$

الحــــل

$$Put \ u = \ln x \quad , \quad du = \frac{dx}{x}$$

$$\therefore \int \frac{(\ln x)^3\, dx}{x} = \int u^3 \cdot du = \tfrac{1}{4} u^4 + c = \tfrac{1}{4} (\ln x)^4 + c$$

مثال (24): أوجد قيمة :

$$\int \frac{x\, dx}{1 + x^4}$$

الحــــل

$$Put \quad u = x^2 \ , \qquad du = 2x\, dx$$

$$\int \frac{x\, dx}{1 + x^4} = \tfrac{1}{2} \int \frac{du}{1 + u^2} = \tfrac{1}{2} \tan^{-1} u + c = \tfrac{1}{2} \tan^{-1} x^2 + c$$

مثال (25): إوجد قيمة :

$$\int \frac{x\ dx}{\sqrt{2x^2+5}}$$

الحــــل

نجعل البسط مشتقة المقدار تحت الجذر في المقام ينتج أن :

$$\int \frac{x\ dx}{\sqrt{2x^2+5}} = \tfrac{1}{4}\int \frac{4x\ dx}{\sqrt{2x^2+5}} = \tfrac{1}{4}\cdot 2\sqrt{2x^2+5} + c$$

$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{2x^2+5} + c$$

مثال (26): إوجد قيمة:

$$\int \frac{Ln\,x}{x\left(1+(\mathrm{Ln}\,x)^2\right)}\,dx$$

الحــــل

$$Put \quad u = \mathrm{Ln}\,x \qquad , \qquad \therefore du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\therefore \int \frac{\ln x}{x\left(1+(\ln x)^2\right)}\,dx = \int \frac{u \cdot x}{x\left(1+u^2\right)}\,du = \tfrac{1}{2}\int \frac{2u}{\left(1+u^2\right)}\,du$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\left(1+u^2\right) + c$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln\left[1+(\ln x)^2\right] + c \quad .$$

مثال (27): أوجد قيمة:

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx \quad .$$

الحـــل

$$Put\ u = \frac{1}{x} \quad , \quad du = -\frac{1}{x^2}\, dx$$

$$\therefore \int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx = \int \frac{e^u}{x^2} \times -x^2\, du = -e^u + c$$

$$= -e^{\frac{1}{x}} + c$$

مثال (28): احسب التكامل غير المحدود :

$$\int x \sin\left(5x^2\right) dx$$

الحـــــل

$$Put\ u = 5x^2, \qquad \therefore du = 10x\ dx.$$

$$\therefore \int x \sin\left(5x^2\right) dx = \int \frac{x \sin u . du}{10x} = \tfrac{1}{10}\int \sin u . du$$

$$= -\tfrac{1}{10}\cos u + c = -\tfrac{1}{10}\cos\left(5x^2\right) + c$$

مثال (29):   إوجد قيمة:

$$\int \sin^3 x \ \cos x \ \ dx$$

الحـــــل

$$Put \ \ u = \sin x \ , \qquad \qquad \therefore du = \cos x \ \ dx$$

$$\therefore \int \sin^3 x \ \cos x \ \ dx = \int u^3 \ \cos x \ \frac{du}{\cos x} = \int u^3 \, du$$

$$= \tfrac{1}{4} u^4 + c$$

$$= \tfrac{1}{4} \sin^4 x \ + c \cdot$$

Integration by Parts 2- التكامل بالتجزئة

تعتبر طريقة التكامل بالتجزئة أهم طرق التكامل فبواسطتها يمكننا إيجاد تكاملات حواصل الضرب التي تحتوى على الدوال اللوغاريتمية $\ln x$ أو x^n الأسية e^x

أو إحدى الدوال المثلثية العكسية أو الدوال الجبرية

ونظرية التكامل بالتجزئة هي العملية العكسية لقاعدة المعامل التفاضلي لحاصل ضرب دالتين . وتنحصر في تحويل التكامل المراد إيجاده إلى تكامل آخر أبسط من الأول كما يتضح ذلك مما يأتى:

فلقد سبق أن علمنا من التفاضل أن :

$$\frac{d}{dx}(u\,v) = u\,v' + v\,u'$$

or $$d(u\,v) = u\,dv + v\,du$$

$$\therefore u\,v = \int u\,dv + \int v\,du$$

or $$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

وتسمى هذه العلاقة بعلاقة التكامل بالتجزئة وتستعمل بكثرة في تكامل الدوال التي يمكن كتابتها على صورة حاصل ضرب عاملين $(u\ ,\ dv)$ بشرط أن تكون عملية إيجاد v من du وحساب التكامل

$\int v\ du$ أبسط من الحساب المباشر للتكامل الأصلي

$\int u\ dv$ وإذا لم يمكن إجراء عملية التكامل $\int v \cdot du$

في الطرف الأيمن من (1) فإنه يمكن استخدام القانون البديل التالي

$$\int v\,du = v\,.\,u - \int u\,dv$$

أي نستبدل ترتيب الدوال المطلوب تكامل حاصل ضربها.

مثال (30) :   إوجد قيمة:

$$\int x\sin x\ dx$$

الحـــل

$$Put \quad u = x\ , \qquad dv = \sin x\, dx = -d(\cos x)$$

$$\text{Then} \quad du = dx \qquad v = -\cos x$$

$$\therefore \int x\ \text{Sin}\, x\ dx = -\int x\, d\cos x = -x\cos x + \int \cos x\ dx$$

$$= -x\cos x + \sin x + c$$

من المثال السابق يتضح أن اختيارنا كان موفقا فى فرضنا حيث:

$$u = x\ , \qquad dv = \sin x\ dx = -d(\cos x)$$

فى حين أننا لو إخترنا بدلا من ذلك مثلا :

$$u = \sin x \qquad , dv = x\ dx\ = d\left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\therefore du = d\ \sin x \qquad , v = {x^2}/{2}$$

فإننا نجد أن:

$$\therefore \int (\sin x)\cdot x\ dx = \int u\ .dv\ = \int \sin x\ .d\ {x^2}/{2}$$

$$= \text{Sin}\ x\ .{x^2}/{2} - \int {x^2}/{2}\ ,$$

$$d \sin x\ = {1}/{2}\, x^2 \sin x - {1}/{2} \int x^2 \cos x\ \ dx$$

والتكامل الأخير أكثر تعقيدا من التكامل الأصلي في الطرف الأيمن ، أي أن هذا الاختيار يؤدى إلى عكس المطلوب.

مثال (31) :

$$\int \tan^{-1}x \, dx = x\tan^{-1}x - \int x \, d\left(\tan^{-1}x\right).$$

$$= x \tan^{-1}x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx$$

$$= x\tan^{-1}x - ½\int \frac{2x}{1+x^2} \, dx$$

$$= x\tan^{-1}x - ½\,\mathrm{Ln}\left(1+x^2\right) + c$$

مثال (32):

$$\int x^2 e^x\, dx = \int x^2 . d e^x = x^2 e^x - \int e^x \, dx^2$$

$$= x^2 e^x - 2\int x e^x \, dx$$

في التكامل في الطرف الأيمن له صوره مشابهة للتكامل الأصلي خفضت فيه قوة (x) الموجودة . فإذا كررنا التكامل بالتجزيء على التكامل الجديد. نصل في النهاية إلى التكامل التالي وهو من الصور القياسية :

$$\int e^x \, dx$$

$$\therefore \int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2\int x \, d e^x$$

$$= x^2 e^x - 2\left(x e^x - \int e^x dx\right)$$

$$= x^2 e^x - 2 x e^x - 2e^x + c$$

$$= e^x \left(x^2 - 2x + 2\right) + c$$

وتسمى هذه الطريقة بطريقة الاختزال المتتالي Successive reduction

مثال (33):

$$\int \ln x \; dx = x \ln x - \int x \; d \ln x$$

$$= x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx$$

$$= x \ln x - x + c$$

$$= x \left(\ln x - 1 \right) + c$$

مثال (34):

$$\int x^m \ln x \, dx = \frac{1}{m+1}\int \ln x \, dx^{m+1} \qquad , \quad m \neq -1$$

$$= \frac{1}{m+1}\left[x^{m+1} \ln x - \int x^{m+1} \, d \ln x \right]$$

$$= \frac{1}{m+1}\left[x^{m+1} \ln x - \int x^{m+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx \right]$$

$$= \frac{1}{m+1}\left(x^{m+1} \ln x - \frac{x^{m+1}}{m+1} \right) + c$$

$$= \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2}\left[(m+1) \ln x - 1 \right] + c \quad .$$

3- التكامل المحدود

تعريف : سبق أن بينا أن :

$$\int f'(x)\ dx = f(x) + c$$

حيث : (c) ثابت اختياري لا يتوقف على (x) ولذلك سمى التكامل السابق بالتكامل الغير محدود لأن قيمة التكامل لا تكون محدودة .

وعندما $x = a$ فإن قيمة التكامل تصبح $= f(a) + c$

وعندما $x = b$ فإن قيمة التكامل تصبح $= f(b) + c$

ويكون الفرق بين قيمتي التكامل للدالة المستمرة $f(x)$ ومعرفه في الفترة a , b عندما $x = b$, $x = a$ هو الفرق بين القيمتين السابقتين.

أي أن:

$$(f(b)+c)-(f(a)+c)$$

أي تساوى $f(b)-f(a)$ حيث $a<b$ ولهذه قيمه معينه مهما كانت قيمة الثابت (c) ويكتب التكامل فى هذه الحالة على الصورة:

$$\int_{a}^{b} f'(x)\, dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$$

ويقرأ تكامل $f(x)$ بالنسبة إلى x من a إلى b وتسمى (a) النهاية السفلي, (b)النهاية العليا للتكامل . ويتضح من ذلك أنه لتقدير أى تكامل محدود نوجد أولا التكامل غير المحدود المناظر له ثم نعوض فيه أولا بقيمة النهاية العليا ثم نعوض ثانيا بقيمة النهاية السفلي. ونطرح النتيجة الثابتة من الأولى كما يتضح من الأمثلة التالية

مثال (35): إوجد :

$$\int_1^3 f\left(x^3\right)dx = \int_1^3 x^3\ dx = \left(\tfrac{1}{4}x^4\right)_1^3 = \tfrac{1}{4}(3)^4 - \tfrac{1}{4}(1)^4$$

$$= \tfrac{1}{4}(81-1) = 20$$

.

مثال (36): إوجد قيمة:

$$\int_0^{\pi/2} (5\cos 4x + 7)\,dx$$

الحـــل

$$= \left(\frac{5}{4}\sin 4x + 7x\right)_0^{\pi/2}$$

$$= \left(\frac{5}{4}\sin 2\pi + \frac{7\pi}{2}\right) - \left(\frac{5}{4}\sin 0 + 7\times 0\right)$$

$$= \frac{7\pi}{2} = \frac{7}{2}\times\frac{22}{7} = 11$$

مثال (37): إوجد قيمة:

$$\int_{2}^{3} \frac{x}{x^2-1}\ dx$$

الحــــل

$$\int_{2}^{3} \frac{x}{x^2-1}\ dx = \tfrac{1}{2}\int_{2}^{3} \frac{2\,x}{x^2-1}\, dx = \tfrac{1}{2}\left[\ln\left(x^2-1\right)\right]_2^3$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\ln\left(9-1\right)-\ln\left(4-1\right)\right] = \tfrac{1}{2}\ln\frac{8}{3}$$

$$= \tfrac{1}{2}\ln 2.666 = \frac{\log 2.666}{2\log e} = \tfrac{1}{2}\times\frac{0.426}{0.4343}$$

$$= 0.4904 \quad .$$

مثال (38): إوجد قيمة :

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\ dx$$

الحـــل

$$\int_1^4 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}\ dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right) dx$$

$$= \int_1^4 \left(x^{-2} + x^{-3/2}\right)\ dx = \left[\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{x^{-1/2}}{-1/2}\right]_1^4$$

$$= \left[-\frac{1}{x}-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^4 = \left(-1/4-\frac{2}{\sqrt{4}}\right)-\left(-\frac{1}{1}-\frac{2}{1}\right)$$

$$= \left(-\frac{5}{4}\right)-(-3) = 3-\frac{5}{4} = \frac{7}{4}$$

.

مثال (39): إوجد قيمة:

$$\frac{\int_2^4 5x^5\,dx}{\int_2^4 5x^3\,dx}$$

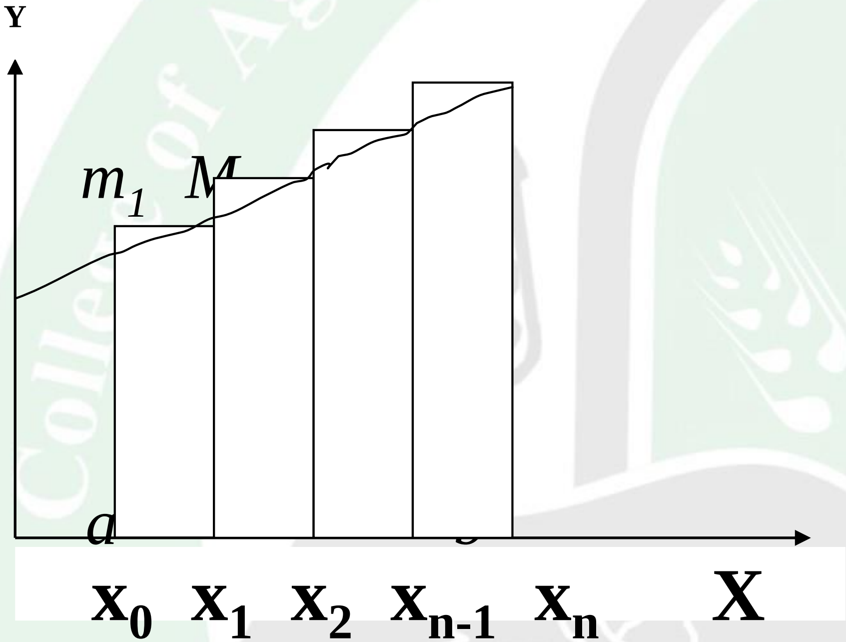
الحــــل

$$\int 5x^5\,dx = \frac{5}{6}x^6 + c \qquad , \quad \int 5x^3\,dx = \frac{5}{4}x^4 + c$$

$$\frac{\int_2^4 5x^5dx}{\int_2^4 5x^3dx} = \frac{\left[\frac{5}{6}x^6\right]_2^4}{\left[\frac{5}{4}x^4\right]_2^4} = \frac{\frac{5}{6}(4)^6 - \frac{5}{6}(2)^6}{\frac{5}{4}(4)^4 - \frac{5}{4}(2)^4}$$

$$= \frac{2\times 64\times 63\times 4}{6\times 5\times 16\times 15} = 11.2 \quad .$$

المعنى الهندسي للتكامل المحدود :



نفرض أن $y = f (x)$ داله

مستمرة معرفة في الفترة $[a , b]$

كما في الشكل المبين . نقسم الفترة $a ,$

b إلى n من الأقسام (ليست

بالضرورة متساوية) بالنقط: $x_0 ,x_1,$

$...x_n$

Put $x_1 - x_0 = a x_1 \quad x_2 - x_1 = a x_2 \qquad x_n - x_{n-1} = ax_n$

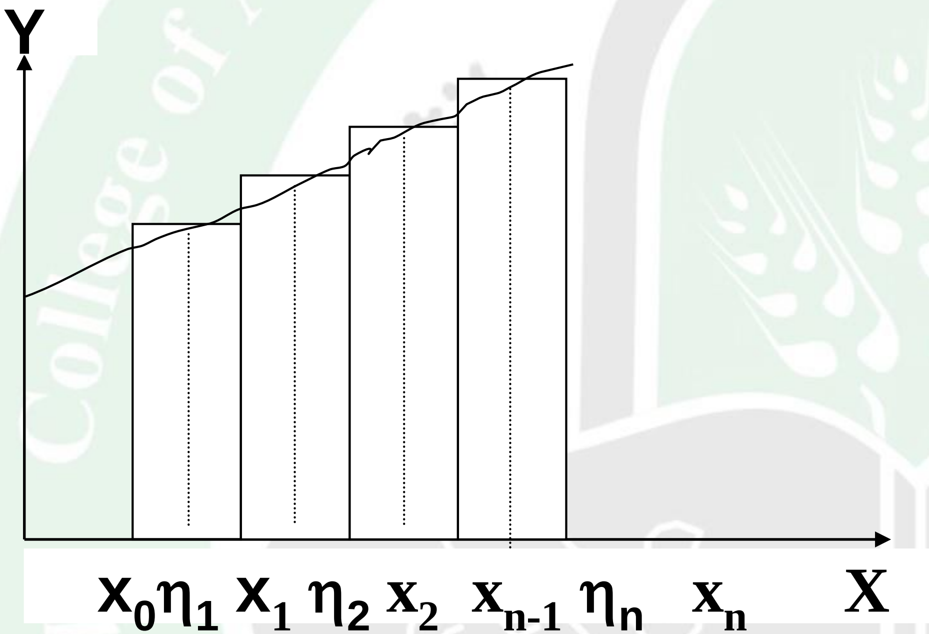
نرمز لأصغر وأكبر قيمه للدالة فى الفترة x1 , x0 بالرمز m1 , M1 وفى الفترة x1 , x2 بالرمز m2 , M2 وفى الفتره xn , xn-1 بالرمز mn , Mn وتكون المجموعتين :

$$\underline{Sn} = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \dots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad (1)$$

$$\overline{Sn} = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \dots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \quad (2)$$

يسمى المجموع $\underline{Sn}$ المجموع الأدنى (للتكامل) كما يسمى $\overline{Sn}$ المجموع الأعلى . والمجموع $\underline{Sn}$ يساوى مجموع مساحات المستطيلات التـي يحدها المنحنى من أعلى بينما المجموع $\overline{Sn}$

يمثل مجموع مساحات المستطيلات التي تغطى المنحنى بأكمله.



وإذا إخترنا نقطه فى كل من الفترات:

$[x_0 , x_1] , [x_2 , x_1], [x_{n-1} , x_n]$

وسميناها $\eta_{1,} \eta_2, \ldots \eta_n$ على الترتيب

كما فى الشكل المقابل حيث

$x_0<\eta_1<x_1,\ldots$

$x_{n-1}<\eta_n<x_n$

نوجد قيمة الدالة عند النقط المختارة أي:

$f(\eta_n), .. f(\eta_1)$ ويكون المجموع :

$$S_n = f\left(\eta_1\right)\Delta x_1 + f\left(\eta_2\right)\Delta x_2 + \ldots\ldots\ldots + f\left(\eta_n\right)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f\left(\eta_i\right)\Delta x_i \;.$$

يسمى هذا المجموع بمجموع التكامل Integral sum للدالة *f (x)* في الفترة *[a , b]*
وحيث أنه لأية قيمه اختياريه η_i في الفترة $[x_{i-1} , x_i]$ ويكون :

$$m_i \le f(\eta_i) \le M_i$$

وكل $\Delta x_I = 0$ فإنه ينتج أن:

$$m_i \Delta x_i \le f(\eta_i) \Delta x_i \le Mi \Delta x_i$$

وبالجمع لجميع قيم i نحصل على :

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\eta_{i_i}) \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

$$\text{or} \quad \underline{Sn} \le Sn \le \overline{Sn}$$

نفرض أننا أجرينا عمليات تقسيم مختلفة للفترة [a , b] واعتبرنا اختيارات مختلفة للنقط η_i وحسبنا في كل مره المجموع $\sum f(\eta_i)\,\Delta x_i$ وأخذنا نهاية هذا المجموع عندما $\max \Delta x \to 0$ ووجدنا في جميع الحالات أن نهاية المجموع تكون دائما واحده فإننا نقول أن الدالة قابله للتكامل Integrable في الفترة [a , b] ونسمى النهاية الواحدة التي حصلنا عليها التكامل المحدود definite integration للدالة f(x) في الفترة [a , b] ويرمز له بالرمز:

$$\int_a^b f\,(x)$$

وتكتب:

$$\lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f\,(\eta_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f\,(x)\,dx$$

يسمى العدد a النهاية السفلي للتكامل , b النهاية العليا للتكامل , كما تسمى الفترة $[a , b]$ فترة التكامل والحرف x متغير التكامل.

من الواضح أننا إذا اعتبرنا (في التقسيمات المختلفة للفترة) المجموع الأدنى <u>Sn</u> والمجموع الأعلى

$$S\overline{n}$$

للتكامل عندما $\max \Delta x \to 0$ فإن هذه المجاميع تؤول أيضا إلى نفس النهاية في المجاميع Sn أي إلى التكامل المحدد للداله $f(x)$.

$$\max \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta x_i = \int_a^b f(x) \, dx$$

$$\lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \, \Delta x_i = \int_a^b f(x) \, dx$$

وإذا رسمنا منحنى موضوع التكامل $y = f(x)$ وكانت $f(x) \geq 0$ فإن التكامل:

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

يساوى عدديا المساحة المحددة بالمنحنى من أعلى والمستقيمين $x = a$, $x = b$ ومحور x.

تغيير نهايتى التكامل أو (تحويل المتغير):

سبق أن عرفنا في التكامل بالتعويض بأنه يلزم في بعض التكاملات الغير محدودة. التعويض عن متغير التكامل بمتغير آخر ثم نعود بعد إجراء التكامل بوضع الناتج بدلالة المتغير الأصلي. وكثيرا ما يكون هذا التحويل إلى المتغير الأصلي معقدا , لذلك يمكن تغيير نهايتي التكامل وذلك بالتعويض عن قيمتي نهايتى التكامل اللتين يأخذهما المتغير الأصلي بالقيمتين المناظرتين اللتين يأخذهما المتغير الجديد كما يظهر ذلك من المثال التالي:

إحسب قيمة:

$$I = \int_{1}^{2} (x+1)\left(x^2 + 2x + 2\right)^{\frac{1}{3}} \, dx$$

الحــل

$$Put \quad u = x^2 + 2x + 2 \qquad , du = 2(x+1) \, dx$$

$$x = 1 \text{ for } u = 5 \;, \qquad x = 2 \quad \text{for } u = 10$$

$$\therefore I = \int_{5}^{10} u^{\frac{1}{3}} \, \tfrac{1}{2} \, du = \frac{3}{8}\left(u^{\frac{4}{3}}\right)_{5}^{10} = \frac{3}{8}\left(10^{\frac{4}{3}} - 5^{\frac{4}{3}}\right) = 4.873$$

بعض الخواص الأساسيه للتكامل المحدود :

أولا : وضع نهايتي التكامل المحدود كل محل الأخير يغير إشارته أى أن :

$$\int_a^b f'(x)\,dx = -\int_b^a f'(x)\,dx$$

البرهان :

$$\int_a^b f'(x)\,dx = [f(x)]_a^b = f(b) - f(a)$$

$$= -[f(a) - f(b)] = -\int_b^a f'(x)$$

وفى حالة $a = b$ يكون

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

ثانيا : يمكن تقسيم التكامل المحدود إلى أى عدد من التكاملات المحدوده فمثلا :
لأية أعداد a , b , c تتحقق المتساويه .

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{€} f(x)\,dx + \int_{€}^b f(x)\,dx$$

ثالثا : يمكن أخذ المعامل الثابت خارج علامة التكامل المحدد :

$$\int_a^b A\,f(x)\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx \qquad (A = \text{Const}).$$

رابعا : التكامل المحدد لمجموع جبري من دوال متعددة يساوى المجموع الجبري لتكاملات هذه الدوال ..... ففي حالة دالتين يكون :

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

خامسا : إذا كانت $f(x)$ داله زوجيه مستمره فى الفتره $(-b, b)$ فإن:

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{b} f(x)\,dx \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(1)$$

أما إذا كانت $f(x)$ داله فرديه فإن :

$$\int_{-b}^{b} f(x)\,dx = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots(2)$$

الإثبات :

بإجراء التحويل $x = -u \quad , \quad dx = -du$ نجد أن :

$$\int_{-b}^{0} f(x)\,dx = \int_{-b}^{0} f(-u)(-1)\,du = \int_{0}^{b} f(-u)\,du$$

$$= \int_{0}^{b} f(-x)\,dx \,.$$

$$\therefore \int_{-b}^{b} f(x)\,dx = \int_{-b}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{b} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{b} f(-x)\,dx + \int_{0}^{b} f(x)\,dx \,.$$

$$= \int_{0}^{b} \left[f(x) + f(-x) \right] dx \,.$$

فإذا كانت f(x) زوجيه يكون f(x) = f(-x) وبالتالى نحصل على (1) أما إذا كانت f(x) فرديه فإن f(-x) = -f(x) ونحصل على (2) .

أمثـــــــــــله :

لأن x^3 داله فرديه

$$\therefore \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0$$

لأن الداله فرديه أيضاً:

$$\int_{-4}^{4} \frac{x^3}{a^2 + x^2} = 0$$

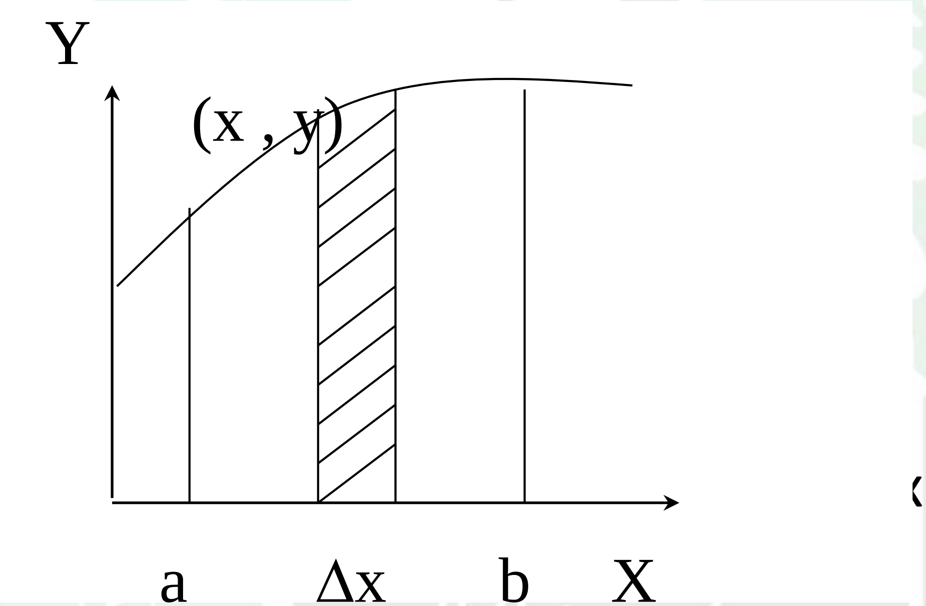
لأن x^4 داله زوجيه:

$$\int_{-2}^{2} x^4 \quad dx = 2\int_{0}^{2} x^4 \ dx$$

$$= 2\left(\frac{x^5}{5}\right)_0^2 = \frac{2 \times 32}{5} = \frac{64}{5}$$

ـ تطبيقات على التكامل المحدد

- 1- مساحة الأشكال المستخدمة:
- أولا: مساحة الأشكال المستوية المحدودة بمنحنى ومحور السينات
- لإيجاد مساحة الأشكال المستوية المحدودة بمنحنى
- $y = f(x)$ ومحور السينات ومستقيمين متوازيين لمحور الصادات هما $x=a, x=b$
- نأخذ أي نقطة على المنحنى مثل (x,y) وتعتبر جزءا من المساحة على شكل مستطيل طوله y وعرضه Δx فتكون المساحة بالتقريب هي:



$$\Delta s = y.\Delta x$$

وتكون مساحة الشكل

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x=a}^{x=b} y.\Delta x = \int_a^b y.dx$$

وبالتعويض عن y بدلالة x من معادلة المنحنى

$$y = f(x)$$

تنتج المساحة المطلوبة وهي:

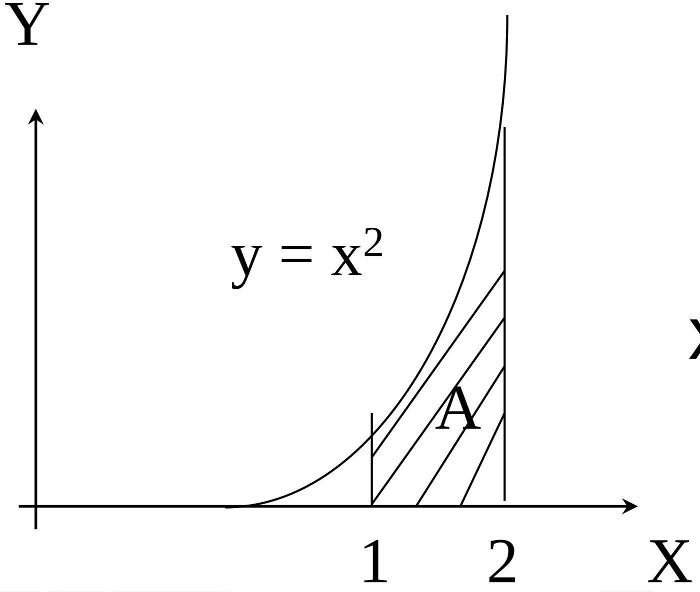
$$S = \int_a^b f(x)dx$$

مثال (40):

احسب المساحة المظللة في الشكل المقابل والمحصورة بين

المنحنى $y = x^2$ ومحور x من $x = 1$

$, x = 2$

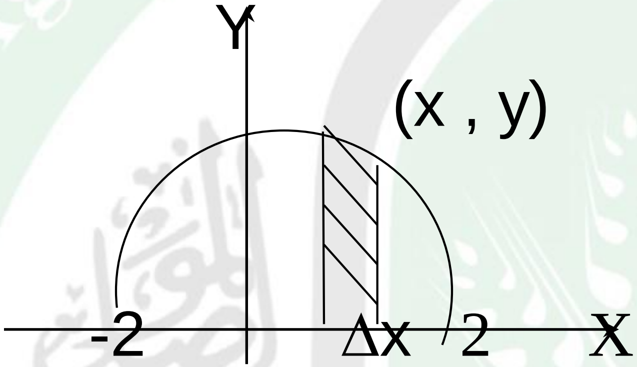


الحل: إذا رمز المساحة المطلوبة بالرمز A فإن

$$A = \int_a^b f(x)dx = \int_1^2 x^2 dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$

مثال (41):
أوجد المساحة المحددة
بالمنحنى $y = 4-x^2$ ومحور
السينات



الحل:
المنحنى عبارة عن قطع مكافئ يقطع السينات في النقطتين
2- , 2وذلك بجعل 0= y في معادلة المنحنى. وعلى ذلك فإذا اعتبرنا شريحة على
شكل مستطيل قاعدته Δx وارتفاعه y فإن مساحته ΔA تكون

$$\Delta A = y.\Delta x = \left(4 - x^2\right).\Delta x$$

وتكون المساحة الكلية تحت المنحنى هي:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right)\Delta x$$

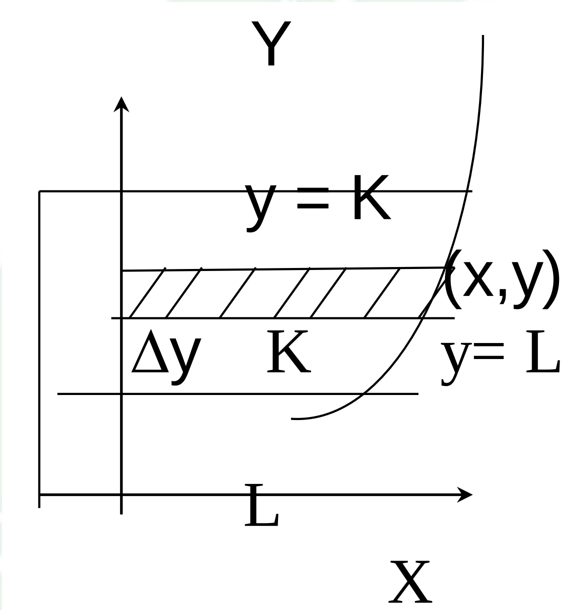
$$= \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx$$

وحيث أن الدالة زوجية فإن المساحة تحسب كما يلي:

$$A = \int_{-2}^{2} \left(4 - x^2\right) dx = 2\int_{0}^{2} \left(4 - x^2\right) dx$$

$$= 2\left[\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_0^2 = 2\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3}.$$

إيجاد مساحة المنحنى المحدد بالمنحنى ومحور الصادات



إيجاد مساحة المنحنى المحدد بالمنحنى $y = f(x)$ ومحور الصادات y ومستقيمين موازيين لمحور السينات $y = L$, $y = K$

كما سبق نجد أن $\Delta A = x . \Delta y$

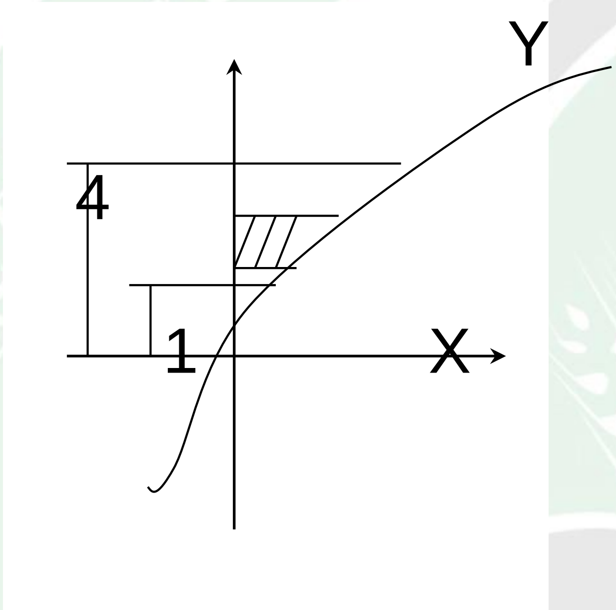
وتكون المساحة بالتقريب هي:

$$A \cong \sum_{y=L}^{y=K} x.\Delta y$$

وتكون المساحة المضبوطة هي:

$$A = \int_L^K x.dy = \int_L^K f(y)dy$$

مثال (42):



أوجد المساحة المحددة بالمنحنى $y^3 = 4x$ ومحور الصادات والمستقيمين $y = 1 , y = 4$

الحل:

$$\Theta\ \Delta A = x.\Delta y = \frac{1}{4} y^3 .\Delta x$$

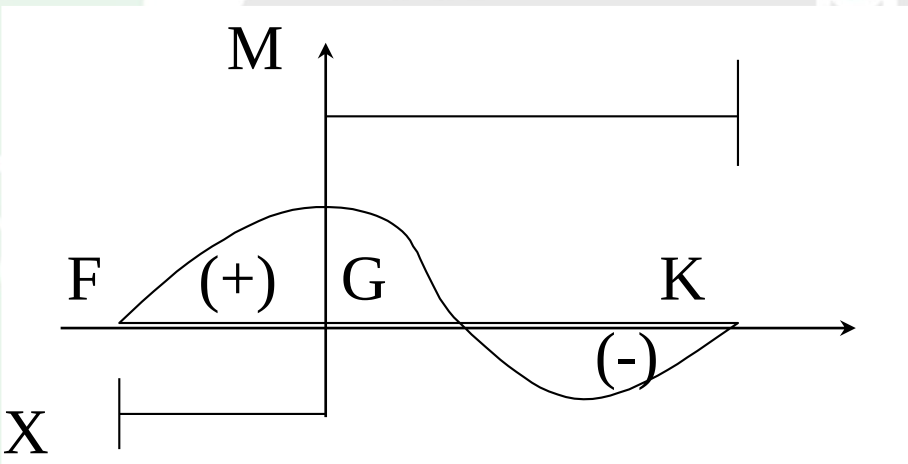
$$\therefore\ A = \lim_{\Delta y \to 0} \sum_{1}^{4} \frac{1}{4} y^3 .\Delta y$$

$$= \int_{1}^{4} \frac{1}{4} y^3 dy = \left[\frac{y^4}{16} \right]_1^4$$

$$= \left(\frac{4^4}{16} - \frac{1}{16} \right) = \frac{255}{16}$$

إشارة المساحة

إذا اعتبرنا إشارة Δx موجبة فإن حاصل ضرب $(y. \Delta x)$ يكون موجب إذا وقع المنحنى فوق محور السينات و يكون سالب إذا وقع المنحنى تحت محور السينات. وعلى ذلك يكون الجزء FMG موجبا ، GLK سالبا ويكون $\int_a^b y.dx$



هوتعيين الفرق بين المساحتين.

ولإيجاد المساحة المحددة بالمنحنى ومحور السينات يجب تحديد نقطة التقاطع G ثم نوجد المساحتين من F إلى G ومن G إلى K.

وكذلك إذا اعتبرنا إشارة Δy موجبة فإن حاصل ضرب $(\Delta y \,.\, x)$ يكون موجب

إذا وقع المنحنى على يمين محور الصادات و يكون سالب إذا وقع المنحنى

على يساره. وعلى ذلك يكون الجزء FMG موجبا ، GLK سالبا ويكون

$$\int_a^b \bar{x}.dy$$

هو تعيين الفرق بين المساحتين.

ولإيجاد المساحة المحددة بالمنحنى ومحور الصادات يجب تحديد نقطة التقاطع G ثم نوجد المساحتين

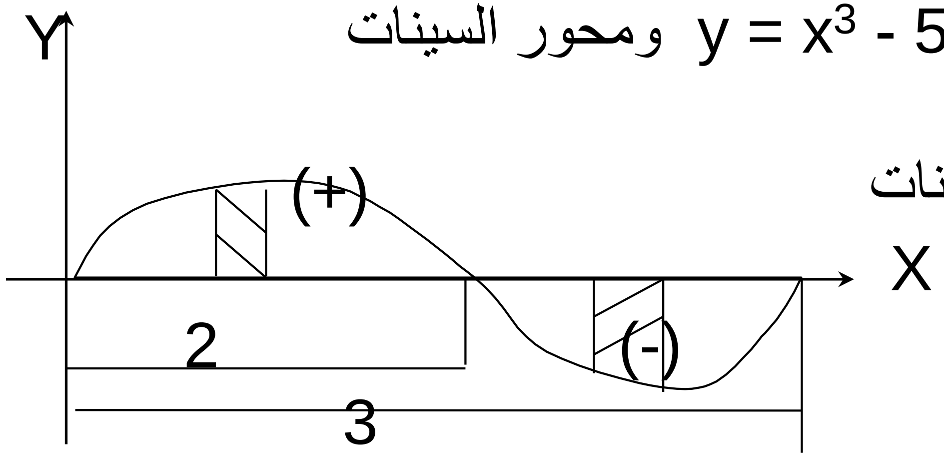
من F إلى G ومن G إلى K ونضيف الناتج حسابيا بصرف النظر عن الإشارة.

مثال (43):

أوجد المساحة المحددة بالمنحنى $y = x^3 - 5x^2 + 6x$ ومحور السينات

الحـل:

نوجد أولا نقط تقاطع المنحنى مع محور السينات



$$\Theta\ 0 = x^3 - 5x^2 + 6x$$
$$= x(x^2 - 5x + 6)$$
$$= x(x-2)(x-3)$$
$$\therefore\ x = 0 \text{ OR } x = 2 \text{ OR } x = 3$$

نوجد المساحة من 0 إلى 2 ومن 2 إلى 4 كل على حدة ثم نجمع المساحتين عدديا.

$$[A]_0^2 = \int_0^2 (x^3 - 5x^2 + 6x)dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= 4 - \frac{40}{3} + 12 = \frac{8}{3}$$

$$[A]_2^3 = \int_2^3 (x^3 - 5x^2 + 6x)dx$$

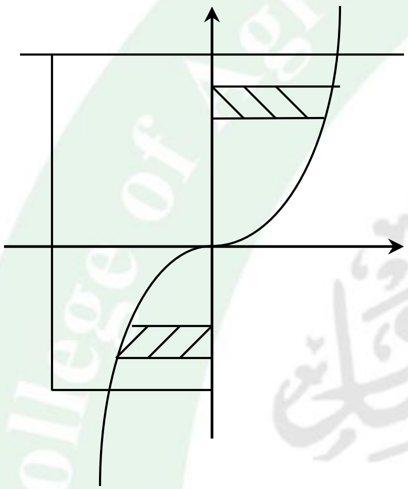
$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_2^3$$

$$= (\frac{81}{4} - \frac{135}{3} + 27) - \frac{8}{3} = -\frac{5}{12}$$

$\therefore$ المساحة الكلية المحددة بالمنحنى A_T تساوى المجموع العددي للمساحتين بغض النظر عن الإشارة.

$$A_T = [A]_0^2 + [A]_2^3 = \frac{8}{3} + \frac{5}{12} = 3.083$$

مثال (44):



أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى $y^3 = 5x$ ومحور الصادات

والمستقيمين $y = 4$, $y = -3$

الحل:

نوجد نقط تقاطع المنحنى مع محور الصادات بوضع $x = 0$

$$\therefore y^3 = 0 , y = 0$$

نوجد المساحة المحددة بالمنحنى $y = -3$, $y = 0$
وكذلك المساحة من $y = 0$, $y = 4$ ثم نجمعهما عدديا كما يلي:

$$[A]_{-3}^{0} = \int_{-3}^{0} \frac{y^3}{5} dy = \left[\frac{y^4}{20} \right]_{-3}^{0}$$

$$= 0 - \left(\frac{-3}{20} \right)^4 = -\frac{81}{20}$$

$$[A]_{0}^{4} = \int_{0}^{4} \frac{y^3}{5} dy = \left[\frac{y^4}{20} \right]_{0}^{4}$$

$$= 0 - \left(\frac{-3}{20} \right)^4 = -\frac{81}{20} = \frac{64}{5}$$

$$\therefore A_T = [A]_{-3}^{0} + [A]_{0}^{4} = \frac{81}{20} + \frac{64}{5} = 16.25$$