الدالة اللوغاريتمية Logarithmic Function

يطلق على معكوس $f(x) = \mathrm{a}^x$ دالة لوغاريتمية بالأساس a ، ويرمز لها بـــ $\log_{\mathrm{a}} x$. هذا يعني أنه اذا كانت

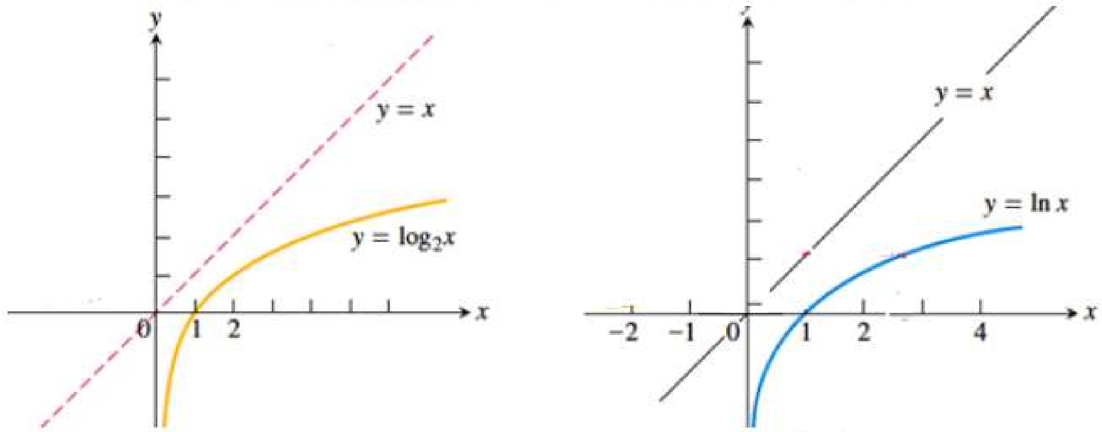
$$f(x) = \mathrm{a}^x \ , \ \mathrm{a} > 0 \, , \qquad \mathrm{a} \neq 1$$

فأن

$$f^{-1}(x) = \log_{\mathrm{a}} x$$

كما يظهر التمثيل البياني لهاتين الدالتين. لاحظ أن التمثيلات البيانية تمثل انعكاسات لبعضها البعض في المستقيم $y = x$. منطلق دالة اللوغاريتم هو الاعداد الحقيقية الموجبة.

Logarithm Function $\quad y = log_a u \ , y = \ln u$ ***الدالة اللوغاريتمية***



منطلق ومدى الدالة اللوغاريتمية :

اذا كان $y = \log_a u(x)$ فان $Domain = \{u : u > 0\}$ و $Range : -\infty < y < \infty$

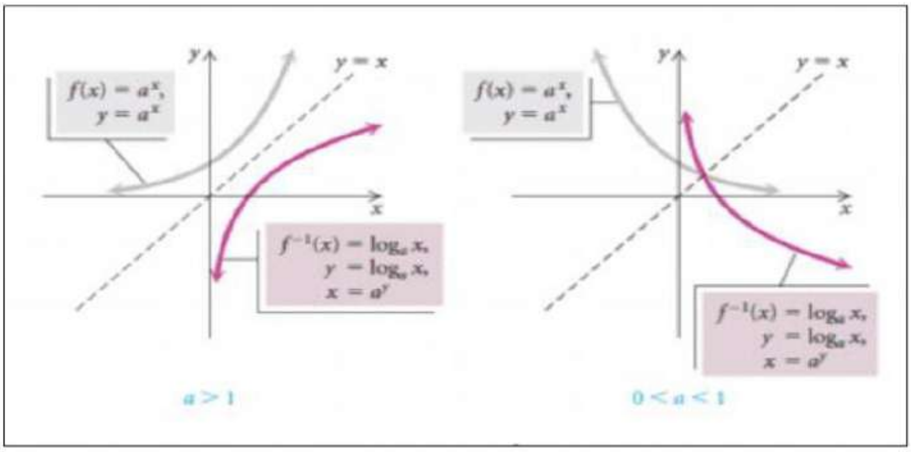
مثال (١) جد منطلق ومدى الدالة $\quad y = \ln(x^2 - 4)$

الحل: نضع $\quad x^2 - 4 > 0$

نجد النقط الحدودية $\quad (x+2)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2 \, , 2$

$$\begin{array}{ccccc} + + + + & | & - - - - - - - - - & | & + + + + \\ (-\infty, -2) & -2 & (-2,2) & 2 & (2,\infty) \end{array}$$

$$\boldsymbol{D} = (-\infty, -2) \cup (2, \infty) \qquad and \quad \boldsymbol{R} = (-\infty, \infty)$$



exponent

$\log_a x = y$ means $a^y = x$

base

$a > 0,\ a \neq 1, y \neq 0$

Example:

$\log_2 8 = 3$ means $2^3 = 8$

الخصائص الأساسية للوغاريتمات

$a > 0$ و $a \neq 1$ و x,y أعداد موجبة، فان:

1) $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$

2) $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$

3) $\log_a(1) = 0$

4) $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$

5) $\log_a(a) = 1$

6) $\log_a(x^r) = r \cdot \log_a(x)$ where $r \in \mathbb{R}$

7) $a^{\log_a(x)} = x$

8) $\log_a(b) = \frac{1}{\log_b(a)}$

9) $\log_a(a^x) = x$

مثال: أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يأتي.

$$\log_3(81) \quad , \quad \log_5(\sqrt{5}) \quad , \quad \log_7\left(\frac{1}{49}\right) \quad , \quad \log_2(2)$$

$$\log_8(512) \quad , \quad \log_4(4^{3.2}) \quad , \quad \log_2\left(\frac{1}{32}\right) \quad , \quad \log_{16}(\sqrt{2})$$

الحل: لأيجاد $\log_3(81)$ نفرض أن

$\log_3(81) = y$

$3^y = 81$ نكتب بصيغة اسية

$3^y = 3^4$

$y = 4$ خاصية المساواة في الأسس

$\log_3(81) = 4$ ولهذا فأن

لأيجاد $\log_5(\sqrt{5})$ نفرض أن

$\log_5(\sqrt{5}) = y$

$5^y = \sqrt{5}$ نكتب بصيغة اسية

$5^y = 5^{\frac{1}{2}}$

$y = \frac{1}{2}$ خاصية المساواة في الأسس

$\log_5(\sqrt{5}) = \frac{1}{2}$ ولهذا فأن

تفاضل الدالة اللوغاريتمية

أذا كانت $y = \log_a(u)$ حيث $a > 0 , a \neq 1$ و u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة الى x

فأن:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\ln a}}$$

مثال: أذا كانت $y = \log_3(3x^2 - 5)$ جد $\frac{dy}{dx}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{3x^2 - 5} \cdot \frac{1}{\ln 3}$$

مثال: أذا كانت $y = \log_8(7x^2+4)$ جد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{14x}{7x^2+4} \cdot \frac{1}{\ln 8}$$

مثال: أذا كانت $y = \log_3 \sqrt{x^2+1}$ جد $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{2}(x^2+1)^{\frac{-1}{2}}(2x)}{\sqrt{x^2+1}} \cdot \frac{1}{\ln 3} = \frac{x}{x^2+1} \cdot \frac{1}{\ln 3}$$

مثال: أذا كانت $f(x) = a^x$ و $g(x) = \log_a x$ ، اوجد $(f \circ g)_{(x)}$ ، $(g \circ f)_{(x)}$

$$(f \circ g)_{(x)} = f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$

$$(g \circ f)_{(x)} = g\big(f(x)\big) = g(a^x) = \log_a(a^x) = x \cdot \log_a(a) = x \cdot 1 = x$$

أذاً $g = f^{-1}$

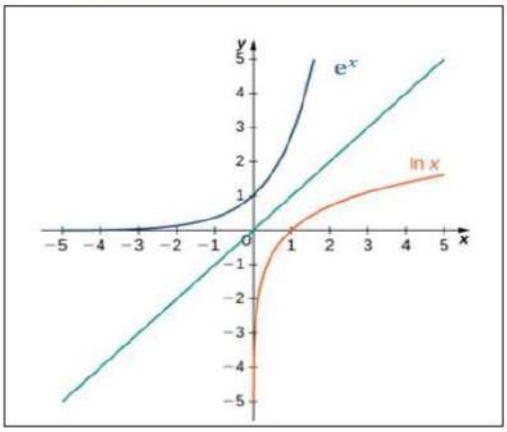
دالة اللوغاريتم الاعتيادي The Common logarithm Function

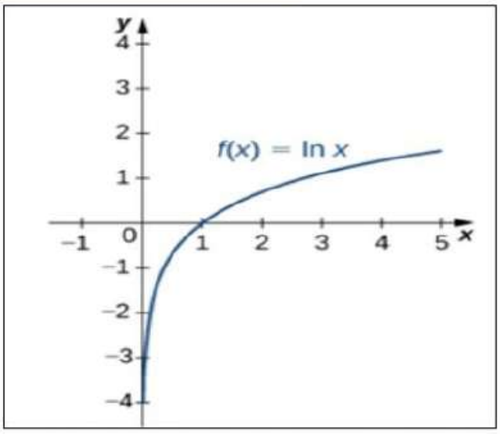
أذا كان الأساس $a = 10$ ، فأن $\log_{10}(x)$ يسمى اللوغاريتم الاعتيادي (أو الشائع) وغالباً ما يكون مكتوباً بدون الأساس $\log(x)$. أن دالة اللوغاريتم الاعتيادي $y = \log(x)$ هي معكوس الدالة الاسية $y = 10^x$ ، ولذلك $y = \log(x)$ فقط في حالة $x = 10^y$ لكل $x > 0$. تنطبق خصائص اللوغاريتمات أيضاً على اللوغاريتمات الاعتيادية.

دالة اللوغاريتم الطبيعي The Natural logarithm Function

عندما يكون أساس اللوغاريتم e ، فأن اللوغاريتم $\log_e(x)$ يسمى اللوغاريتم الطبيعي، ويكتب $\ln x$. أي أن $\ln x = \log_e(x)$.

$$\boxed{e^{\ln x} = x \text{ for } x > 0 \quad \text{and} \quad \ln(e^x) = x \text{ for all } x}$$





أن دالة اللوغاريتم الطبيعي $y = \ln x$ مستمرة ومتزايدة في الفترة المفتوحة $(0, \infty)$. وأن

$$\lim_{x\to\infty}(\ln x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 0}(\ln x) = -\infty$$

وأستناداً الى التعريف فأن $y = \ln x$ دالة متقابلة منطلقها $\mathbb{R}^+$ ومداها $\mathbb{R}$.

مثال: عبر عن $\ln 4.5$ بدلالة $a_1 = \ln 2$ و $a_2 = \ln 3$.

$$\ln 4.5 = \ln\frac{9}{2} = \ln 9 - \ln 2 = \ln 3^2 - \ln 2 = 2\ln 3 - \ln 2 = 2a_2 - a_1$$

تفاضل اللوغاريتم الطبيعي $\ln x$

أذا كانت $y = \ln u$ و u دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x ، فأن:

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \frac{1}{\ln x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x\cdot 0 - 1\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{x(\ln x)^2}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = 7\ln(4x)$

$$\frac{dy}{dx} = 7\cdot\left(\frac{1}{4x}\right)\cdot 4 = \frac{7}{x}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \ln(\tan x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\tan x}\cdot\sec^2 x = \frac{\cos x}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{1}{\cos x} = \csc x\cdot\sec x$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ اذا كانت $y = (\ln(3x+1))^{3/2}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}(\ln(3x+1))^{1/2}\left(\frac{1}{3x+1}\right)(3) = \frac{9}{2}\frac{\sqrt{\ln(3x+1)}}{3x+1}$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ للدالة $y = \ln(\sin x)$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin x}\cdot\frac{d}{dx}(\sin x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot x$$

التمارين

السؤال 1 : احسب   أ . $Log_3 9$ ب. $Log_{16} 8$

أ. $X = Log_3 9$

$3^x = 9$, $3^x = 3^2$ اذنا $x = 2$

ب. $X = Log_{16} 8$

$16^x = 8$, $16^x = 2^3$ $(2^4)^x = 2^3$

$4x = 3$ اذنا $x = \frac{3}{4}$

السؤال 2 : احسب   a) $Ln\ e$ b) $Log_3 \frac{1}{81}$

أ) $Ln\ e$

$X = Ln\ e = Log_e e$

$e^x = e$, $e^x = e^1$

$x = 1$ اذنا

$Ln\ e = 1$ اذنا

ب) $Log_3 \frac{1}{81}$

$x = Log_3 \frac{1}{81}$

$3^x = \frac{1}{81} = \frac{1}{3^4} = 3^{-4}$

$x = -4$ اذنا

$Log_3 \frac{1}{81} = -4$ اذنا

السؤال 3 : اكتب Log 30 بشكل Log 2 , Log 3 , Log 5 لأي قاعدة

$$\log 30 = \log(2 \times 15) = \log(2 \times 3 \times 5)$$
$$= \mathbf{\log 2 + \log 3 + \log 5}$$ اذنا

السؤال 4 : اكتب Log 450 بشكل Log 2 , Log 3 , Log 5 لأي قاعدة

$$\log 450 = \log(2 \times 225) = \log(2 \times 3 \times 75)$$
$$= \log(2 \times 3 \times 3 \times 25)$$
$$= \log(2 \times 3^2 \times 5^2)$$
$$= \log 2 + \log 3^2 + \log 5^2$$

$$\log 450 = \mathbf{\log 2 + 2\log 3 + 2\log 5}$$ اذنا

السؤال 5 : بسط : Log 64 – Log128 + Log 32

$$64 = 2^6,\ 128 = 2^7 \text{ and } 32 = 2^5$$

$$\log 64 - \log 128 + \log 32$$
$$= \log 2^6 - \log 2^7 + \log 2^5$$
$$= 6\log 2 - 7\log 2 + 5\log 2$$

$$= \mathbf{4\ \log\ 2}$$

السؤال 6 : احسب : $\dfrac{Log\ 25 - Log\ 125 + \frac{1}{2} Log\ 625}{3\ \text{Log}\ 5}$

$$\frac{\log 25 - \log 125 + \frac{1}{2}\log 625}{3\log 5}$$

$$= \frac{\log 5^2 - \log 5^3 + \frac{1}{2}\log 5^4}{3\log 5}$$

$$= \frac{2\log 5 - 3\log 5 + \frac{4}{2}\log 5}{3\log 5}$$

$$= \frac{1\log 5}{3\log 5} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$$

تمارين اضافية :

1- حل : $\frac{3+\log_7 x}{2-\log_7 x} = 4 \quad , \quad x > 0$

$3+\log_7 x = 8 - 4\log_7 x$

$5\log_7 x = 5$

$\log_7 x = 1$

$x = 7^1 = 7$

2- حل : $\frac{5+\log X}{3-\log X} = 3 \quad , \quad x > 0$

$$\frac{5+\log x}{3-\log x} = 3$$

$5+\log x = 9-3\log x$

$4\log x = 4$

$\log x = 1$

$x = 10^1 = 10$

3- حل : Log (x + 5) – Log (x – 1) = 1 – Log 2

$$\log(x+5) - \log(x-1) = \log 10 - \log 2$$

$$\log\frac{x+5}{x-1} = \log\frac{10}{2}$$

$$\frac{x+5}{x-1} = 5$$

$$x+5 = 5x-5$$

$$4x = 10$$

$$x = 2{,}5$$

4- حل : Log (x + 2) + Log (x – 7) = 2 Log (x – 4)

$$\log(x+2) + \log(x-7) = 2.\log(x-4)$$

$$\log(x+2)(x-7) = \log(x-4)^2$$

$$(x+2)(x-7) = (x-4)^2$$

$$x^2-5x-14 = x^2-8x+16$$

$$3x = 30$$

$$x = 10$$

-5 حل : Log 5x + Log (x + 3) = 1 + 2 Log (3 – x)

log5x +log (2x + 3) = 1 + 2.log(3-x)

$\log 5x + \log(2x + 3) = \log 10 + \log(3-x)^2$

$\log(5x.(2x +3)) = \log (10.(3-x)^2)$

$5x.(2x +3) = 10.(3-x)^2$

$10x^2 +15x = 10.(9-6x + x^2)$

$10x^2 + 15x = 90-60x +10x^2$

$75x = 90$

$$x = \frac{90}{75}$$

$$x = \frac{6}{5}$$

-6 حل : Log (1 + x) – Log (1 – x) = Log (x + 3) – Log (4 –x)

$$\log \frac{1+x}{1-x} = \log \frac{x+3}{4-x}$$

$$\frac{1+x}{1-x} = \frac{x+3}{4-x}$$

$(1+x)(4-x) =(x+3)(1-x)$

$4+4x-x = -2x+3$

$5x = -1$

$$x = -\frac{1}{5}$$

7- حل : $Log_4(x^2 - 9) - Log_4(x + 3) = 3$

$$\log_4(x^2-9)-\log_4(x+3)=3$$
$$\log_4(x^2-9)-\log_4(x+3)=\log_4 64$$
$$\log_4\frac{x^2-9}{x+3}=\log_4 64$$
$$\frac{x^2-9}{x+3}=64$$
$$\frac{(x-3)(x+3)}{x+3}=64$$
$$x-3=64$$
$$x=67$$

8- حل : $Log\sqrt{x+4} - Log\sqrt{x-4} = Log\ 12 - Log\ 4$

$$\log\sqrt{x+4}-\log\sqrt{x-4}=\log 12-\log 4$$
$$\log\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}}=\log\frac{12}{4}$$
$$\frac{\sqrt{x+4}}{\sqrt{x-4}}=3/^2$$
$$\frac{x+4}{x-4}=9$$
$$x+4=9(x-4)$$
$$x+4=9x-36$$
$$8x=40$$
$$x=5x$$

9- حل : $\frac{Ln\, x^{\pi}-1}{\text{Ln x+1}} = 1$

$$\frac{\ln x^{\pi}-1}{\ln x+1}=1$$

$$\ln x^{\pi}-1=\ln x+1$$

$$\ln x^{\pi}-\ln x=2$$

$$\pi.\ln x-\ln x=2$$

$$\ln x(\pi-1)=2$$

$$\ln x=\frac{2}{\pi-1}$$

$$x=e^{\frac{2}{\pi-1}}$$

$$x=2,71828128^{0,93388557}\doteq 2,5443$$

10- حل : $Log_x 16-\frac{1}{2}= Log_x 8$

$$\log_x 16-\frac{1}{2}=\log_x 8$$

$$\log_x 16-\log_x 8=\frac{1}{2}$$

$$\log_x \frac{16}{8}=\frac{1}{2}$$

$$\log_x 2=\frac{1}{2}$$

$$x^{\frac{1}{2}}=2$$

$$\sqrt{x}=2/^{2}$$

$$x=4$$

11- حل : $Log \frac{1}{x^2} + Log \frac{1}{x} + Log\ x + Log\ x^2 + Log\ X^3 = 6$

$$\log \frac{1}{x^2} + \log \frac{1}{x} + \log x + \log x^2 + \log x^3 = 6$$

$$\log\left(\frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x} \cdot x \cdot x^2 \cdot x^3\right) = 6$$

$$\log x^3 = 6$$

$$3\log x = 6$$

$$\log x = 2$$

$$x = 10^2$$

$$x = 100$$

12- حل : $\frac{1}{2} Log \frac{x^7}{100} + Log \frac{100}{x^2} - Log\ x = 0$

$$\frac{1}{2}\log \frac{x^7}{100} + \log \frac{100}{x^2} - \log x = 0/.2$$

$$\log \frac{x^7}{100} + 2\log \frac{100}{x^2} - 2\log x = 0$$

$$\log \frac{x^7}{100} + \log\left(\frac{100}{x^2}\right)^2 - \log x^2 = 0$$

$$\log \frac{x^7}{100} + \log \frac{10000}{x^4} - \log x^2 = 0$$

$$\log\left[\frac{x^7}{100} \cdot \frac{10000}{x^4} \cdot \frac{1}{x^2}\right] = \log 1$$

$$\frac{x^7}{100} \cdot \frac{10000}{x^4} \cdot \frac{1}{x^2} = 1$$

$$100x = 1$$

$$x = \frac{1}{100}$$

13- اكتب اللوغاريتم التالي بصيغة Log 2 , Log 3 و Log 5 لأي قاعدة :

$$Log\left(\frac{8\ \times\ \sqrt[4]{5}}{81}\right)$$

$= \text{Log } 8 + \text{Log } \sqrt[4]{5} - \text{Log } 81$

$= \text{Log } 2^3 + \text{Log } 5^{\frac{1}{4}} - Log\ 3^4$

$= 3 \text{ Log } 2 + \frac{1}{4} \text{Log } 5 - 4 \text{ Log } 3$

الدالة الاسية Exponential Function

تعريف: الدالة الاسية ذات الأساس a تكتب بالصيغة

$$f(x) = \mathrm{a}^{x} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

حيث أن a عدد حقيقي اكبر من الصفر $(\mathrm{a} > 0)$.

المجال (أو المنطلق) للدالة الاسية هو جميع الاعداد الحقيقية، أي أن $D_f = (-\infty, \infty)$.

أمثلة:

$$f(x) = 4^{x} \quad , \quad f(x) = 7^{-x} \quad , \quad f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{x}$$

بعض خصائص الدالة الاسية:

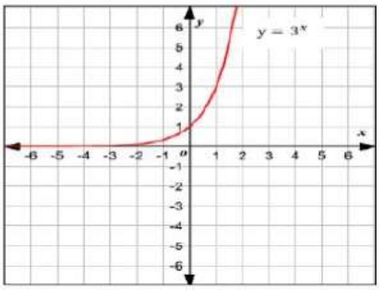
- $\mathrm{a}^{\frac{1}{\mathrm{n}}} = \sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{a}}$
- $\mathrm{a}^{\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{n}}} = \left(\mathrm{a}^{\frac{1}{\mathrm{n}}}\right)^{\mathrm{m}} = \left(\sqrt[\mathrm{n}]{\mathrm{a}}\right)^{\mathrm{m}}$
- أذا كان $\mathrm{a} > 0$ ، فان $\mathrm{a}^{x} > 0$ لأي عدد حقيقي x .
- $\mathrm{a}^{x+\mathrm{y}} = \mathrm{a}^{x} \cdot \mathrm{a}^{\mathrm{y}}$
- $\mathrm{a}^{x-\mathrm{y}} = \frac{\mathrm{a}^{x}}{\mathrm{a}^{\mathrm{y}}}$
- $\mathrm{a}^{0} = 1$
- أذا كان $\mathrm{a} > 1$ ، فان a^{x} دالة متزايدة.
- أذا كان $0 < \mathrm{a} < 1$ ، فان a^{x} دالة متناقصة.
- a^{x} دالة مستمرة لأي عدد حقيقي x .
- أذا كان $\mathrm{a} = 1$ ، فان $\mathrm{a}^{x} = 1$ لكل x .

مثال: مثّل كل دالة بيانيًا. ووضح المجال والمدى ومواضع تزايد أو تناقص الدالة.

$$f(x) = 3^{x} \quad , \quad \mathrm{g}(x) = 2^{-x} \quad , \quad \mathrm{h}(x) = 5^{-x} \quad , \quad \mathrm{u}(x) = 4^{x}$$

الحل: الدالة $f(x) = 3^{x}$

$$D_f = (-\infty, \infty) \quad , \quad R_f = (0, \infty)$$

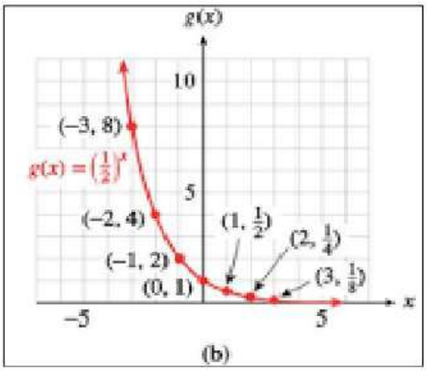


x	-4	-2	-1	0	2	4	6
$f(x)$	0.01	0.11	0.33	1	9	81	729

الدالة متزايدة في جميع الاعداد الحقيقية، أي أن فترة التزايد $(-\infty,\infty)$.

أما الدالة $g(x) = 2^{-x}$

$D_g = (-\infty,\infty) \quad , \quad R_g = (0,\infty)$



x	-6	-4	-2	0	2	4	6
$g(x)$	64	16	4	1	0.25	0.06	0.02

الدالة متناقصة في جميع الاعداد الحقيقية، أي أن فترة التناقص $(-\infty,\infty)$.

تفاضل وتكامل الدالة الاسية

لتكن u دالة قابلة للأشتقاق بالنسبة الى x ، فان:

$$\frac{d}{dx}(a^u) = a^u \cdot \ln a \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\int a^u\, du = \frac{a^u}{\ln a} + C \qquad , \quad a > 0 , a \neq 1$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ ، أذا كانت $y = 8 \times 2^{(3x^2+4x+5)}$

الحل: لاحظ أن الأساس هنا $a = 2$

$$\frac{dy}{dx} = 8 \times 2^{(3x^2+4x+5)} \cdot \ln 2 \cdot (6x+4)$$
$$= (48x+32) \cdot 2^{(3x^2+4x+5)} \cdot \ln 2$$

مثال: جد $\frac{dy}{dx}$ ، أذا كانت $y = x^2\, 3^x$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = x^2 \cdot (3^x \cdot \ln 3) + 3^x \cdot (2x) = x\, 3^x (x\ \ln 3 + 2)$$

مثال: جد $\frac{dy}{dt}$ ، أذا كانت $y = 4^{t^4}$

الحل:

$$\frac{dy}{dt} = 4^{t^4} \cdot \ln 4 \cdot (4t^3)$$

مثال: جد $\frac{dy}{dt}$ ، أذا كانت $y = 4^t \cdot\ 2^{t^2}$

الحل:

$$y = 4^t \cdot\ 2^{t^2} = 2^{2t} \cdot\ 2^{t^2} = 2^{2t+t^2}$$
$$\frac{dy}{dt} = 2^{2t+t^2} \cdot \ln 2 \cdot (2 + 2t)$$

مثال: أحسب التكامل الاتي: $\int 7^{2x+3}\, dx$

الحل: مشتقة الاس 2. أذاً بالضرب والقسمة على 2

$$\frac{1}{2} \int 2\, (7^{2x+3})\, dx = \frac{1}{2} \frac{7^{2x+3}}{\ln 7} + C = \frac{7^{2x+3}}{2 \ln 7} + C = \frac{7^{2x+3}}{\ln 7^2} + C = \frac{7^{2x+3}}{\ln 49} + C$$

مثال: جد قيمة التكامل الاتي: $\int_0^1 \frac{3^x + 4^x}{5^x}\, dx$

الحل:

$$\int_0^1 \frac{3^x + 4^x}{5^x} dx = \int_0^1 \left(\frac{3^x}{5^x} + \frac{4^x}{5^x}\right) dx = \int_0^1 \left\{\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x\right\} dx$$

$$= \left\{ \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^x}{\ln(3/5)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^x}{\ln(4/5)} \right\}\Bigg|_0^1$$

$$= \left\{ \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{(1)}}{\ln(3/5)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{(1)}}{\ln(4/5)} \right\} - \left\{ \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^{(0)}}{\ln(3/5)} + \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^{(0)}}{\ln(4/5)} \right\}$$

$$=\left\{\frac{\frac{3}{5}}{\ln(3/5)}+\frac{\frac{4}{5}}{\ln(4/5)}\right\}-\left\{\frac{1}{\ln(3/5)}+\frac{1}{\ln(4/5)}\right\}$$

$$=\frac{\frac{3}{5}-1}{\ln(3/5)}+\frac{\frac{4}{5}-1}{\ln(4/5)}$$

$$=\frac{-2/5}{\ln(3/5)}+\frac{-1/5}{\ln(4/5)}\,.$$

Natural Exponential Function $\quad y=e^{x}$ الدالة الاسية الطبيعية

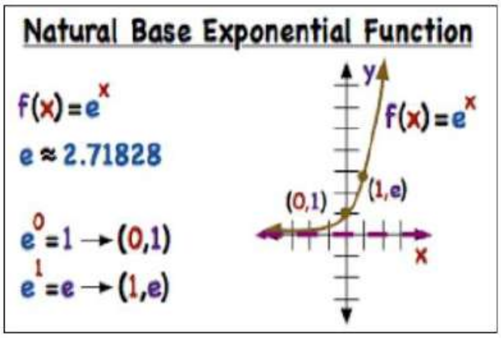
يعرف العدد e كالاتي:

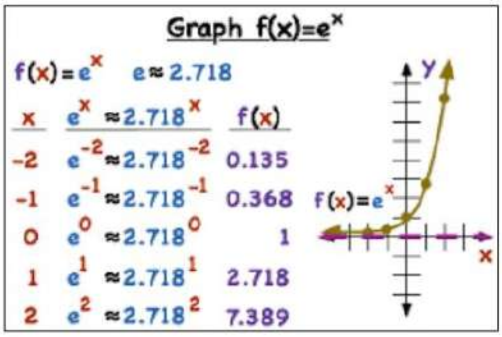
$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

فالعدد e هو أحد أهم الاعداد في الرياضيات وهو عدد غير نسبي ويمكن حساب قيمته مقربة الى أي عدد من المراتب العشرية وبأكثر من طريقة واحدة. وقيمة e التي حسبت هي

$e = 2.718281828459045\ ...$

الدالة التي تأخذ الصيغة $y=e^{x}$ تسمى بالدالة الاسية الطبيعية لأن أساسها e ولها خصائص الدوال الاسية الأخرى.





تفاضل الدالة الاسية الطبيعية

$$\frac{d}{dx}(e^{u})=e^{u}\cdot\frac{du}{dx}$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y=e^{-x^{2}}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=e^{-x^{2}}\cdot(-2x)=-2xe^{-2x}$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = e^{3x}\sin(2x)$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = e^{3x}\cdot(2\cos(2x)) + \sin(2x)\cdot(3e^{3x})$$
$$= 2e^{3x}\cos(2x) + 3e^{3x}\sin(2x)$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = -5\,e^{\sin x}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = -5\,e^{\sin x}\cdot(\cos x) = -5\cos x\cdot e^{\sin x}$$

تكامل الدالة الاسية الطبيعية

$$\int e^{u}\,du = e^{u} + C$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int x\,e^{x^2}\,dx$

الحل: بالضرب والقسمة على 2

$$\frac{1}{2}\int 2x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

مثال: جد قيمة التكامل $\int \frac{dx}{e^x+1}$

الحل: نضرب البسط والمقام بـــ e^{-x} فنحصل على

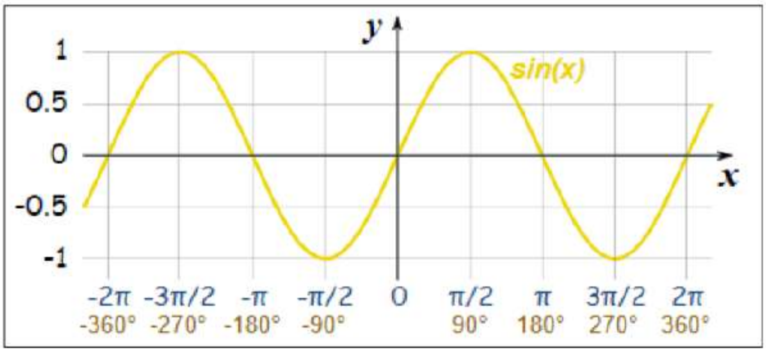
$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^{-x}dx}{1+e^{-x}} = -\ln(1+e^{-x}) + C$$

الدوال المثلثية Trigonometric Functions

دالة الجيب $y(x) = \sin x$: هي الدالة

$\sin: \mathbb{R} \to [-1, 1]$

x	$y(x) = \sin x$
$-\pi$	$\sin(-\pi) = 0$
$-\frac{\pi}{2}$	$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$
0	$\sin(0) = 0$
$\frac{\pi}{2}$	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
π	$\sin(\pi) = 0$

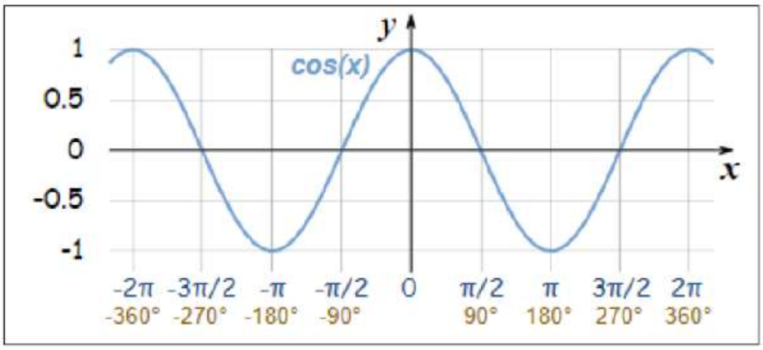


- دالة $\sin x$ هي دالة فردية، أي أن $\sin(-x) = -\sin(x)$
- دالة $\sin x$ هي دالة دورية مقدار دورتها 2π ، أي أن $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$
- المنطلق (أو المجال) هو مجموعة الاعداد الحقيقية $D_y = \mathbb{R}$ والمدى هو $R_y = [-1, 1]$.

دالة جيب تمام $y(x) = \cos x$: هي الدالة

$\cos: \mathbb{R} \to [-1, 1]$

x	$y(x) = \cos x$
$-\pi$	$\cos(-\pi) = -1$
$-\frac{\pi}{2}$	$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$
0	$\cos(0) = 1$
$\frac{\pi}{2}$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
π	$\cos(\pi) = -1$

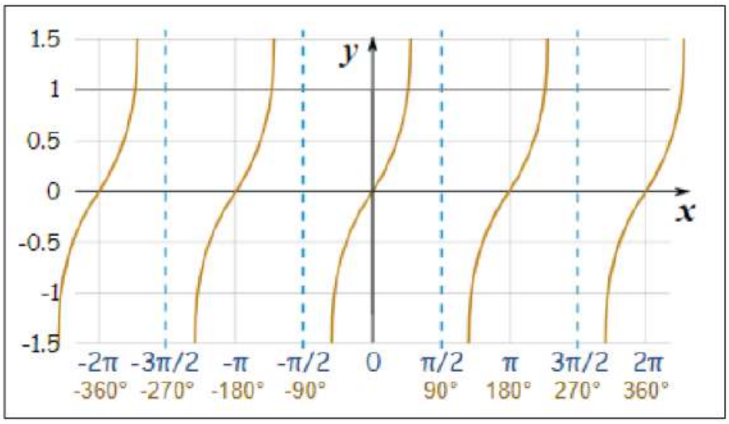


- دالة $\cos x$ هي دالة زوجية، أي أن $\cos(-x) = \cos(x)$.
- دالة $\cos x$ هي دالة دورية مقدار دورتها 2π ، أي أن $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
- المنطلق (أو المجال) هو مجموعة الاعداد الحقيقية $D_y = \mathbb{R}$ والمدى هو $R_y = [-1, 1]$

دالة الظل:

$$y(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad \cos x \neq 0$$

x	$y(x) = \tan x$
$-\pi$	$\tan(-\pi) = 0$
$-\frac{\pi}{4}$	$\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) = -1$
0	$\tan(0) = 0$
$\frac{\pi}{4}$	$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$
π	$\tan(\pi) = 0$
2π	$\tan(2\pi) = 0$



- دالة $\tan x$ هي دالة فردية، أي أن $\tan(-x) = -\tan(x)$
- دالة $\tan x$ هي دالة دورية مقدار دورتها π ، أي أن $\tan(x+\pi) = \tan(x)$
- منطلق دالة $\tan x$ هو جميع الاعداد الحقيقة ما عدا القيم التي تكون عندها $\cos x = 0$ ، أي ان $D_y = \left\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi \;;\; n = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots\right\}$

أما المدى فهو جميع الاعداد الحقيقية $R_y = \mathbb{R}$

دالة ظل التمام:

$$y(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad \sin x \neq 0$$

- دالة $\cot x$ هي دالة فردية، أي أن $\cot(-x) = -\cot(x)$
- دالة $\cot x$ هي دالة دورية مقدار دورتها π ، أي أن $\cot(x+\pi) = \cot(x)$
- منطلق دالة $\cot x$ هو جميع الاعداد الحقيقة ما عدا القيم التي تكون عندها $\sin x = 0$ ، أي ان $D_y = \{x : x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi \,,\; n = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots\}$

أما المدى فهو جميع الاعداد الحقيقية $R_y = \mathbb{R}$

دالة القاطع:

$$y(x) = \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad , \quad \cos x \neq 0$$

- دالة $\sec x$ هي دالة زوجية، أي أن $\sec(-x) = \sec(x)$
- دالة $\sec x$ هي دالة دورية مقدار دورتها 2π ، أي أن $\sec(x + 2\pi) = \sec(x)$
- منطلق دالة $\sec x$ هو جميع الاعداد الحقيقة ما عدا القيم التي تكون عندها $\cos x = 0$ ، أي ان $D_y = \left\{x : x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi ; \quad n = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots\right\}$

أما المدى فهو جميع الاعداد الحقيقية $R_y = \mathbb{R}$

دالة قاطع التمام:

$$y(x) = \csc x = \frac{1}{\sin x} \quad , \quad \sin x \neq 0$$

- دالة $\csc x$ هي دالة فردية، أي أن $\csc(-x) = -\csc(x)$
- دالة $\csc x$ هي دالة دورية مقدار دورتها 2π ، أي أن $\csc(x + 2\pi) = \csc(x)$
- منطلق دالة $\csc x$ هو جميع الاعداد الحقيقة ما عدا القيم التي تكون عندها $\sin x = 0$ ، أي ان $D_y = \{x : x \in \mathbb{R}, x \neq n\pi , \ n = 0, \mp 1, \mp 2, \mp 3, \dots\}$

أما المدى فهو جميع الاعداد الحقيقية $R_y = \mathbb{R}$.

غايات بعض الدوال المشهورة:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\ln x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x - 1}{x}\right) = 1 \quad , \quad \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e = 2.718$$

بعض القوانين (المتطابقات):

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(2\alpha)=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\sec^2\alpha=1+\tan^2\alpha$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

تفاضل الدوال المثلثية

1	$y=\sin x$	$\frac{dy}{dx}=\cos x$
2	$y=\cos x$	$\frac{dy}{dx}=-\sin x$
3	$y=\tan x$	$\frac{dy}{dx}=\sec^2 x$
4	$y=\cot x$	$\frac{dy}{dx}=-\csc^2 x$
5	$y=\sec x$	$\frac{dy}{dx}=\sec x\ \tan x$
6	$y=\csc x$	$\frac{dy}{dx}=-\csc x\ \cot x$

مثال: لتكن $y=\sin(2x^3-3)$ ، فأن

$$y'=\frac{dy}{dx}=\cos(2x^3-3)\cdot(6\,x^2)=6\,x^2\cos(2x^3-3)$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y=\cos(2\theta^3-3\theta^{-2})$.

الحل:

$$y'=\frac{dy}{d\theta}=-\sin(2\theta^3-3\theta^{-2})\cdot(6\,\theta^2+6\theta^{-3})$$
$$=-(6\,\theta^2+6\theta^{-3})\cdot\sin(2\theta^3-3\theta^{-2})$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = \tan(x^{-2})$.

الحل:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \sec^2(x^{-2}) \cdot (-2x^{-3}) = -2x^{-3} \cdot \sec^2(x^{-2})$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = \cot(3x)$.

الحل:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\csc^2(3x) \cdot (3) = -3 \cdot \csc^2(3x)$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = \sec(\theta^2)$.

الحل:

$$y' = \frac{dy}{d\theta} = \sec(\theta^2) \cdot \tan(\theta^2) \cdot (2\theta) = 2\theta \cdot \sec(\theta^2) \cdot \tan(\theta^2)$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = \csc(x^3)$.

الحل:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\csc(x^3) \cdot \cot(x^3) \cdot (3x^2) = -3x^2 \csc(x^3) \cdot \cot(x^3)$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = \csc(2x^5 - 3)$.

الحل:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\csc(2x^5 - 3) \cdot \cot(2x^5 - 3) \cdot (10x^4)$$
$$= -10\, x^4 \cdot \csc(2x^5 - 3) \cdot \cot(2x^5 - 3)$$

مثال: جد مشتقة الدالة $y = x \cdot \tan\left(\frac{1}{x}\right)$.

الحل:

$$y' = \frac{dy}{dx} = x \cdot \left(\sec^2\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right)\right) + \tan\left(\frac{1}{x}\right) \cdot 1$$
$$= \frac{-1}{x} \cdot \sec^2\left(\frac{1}{x}\right) + \tan\left(\frac{1}{x}\right)$$

الواجب: أحسب المشتقة لكل من الدوال الأتية:

$$y = \sin^5(3x^2) \quad , \quad y = \sec\left((2x+1)^{5/2}\right) \quad , \quad y = \frac{1}{x^2 \sin^3(x)}$$

$$y = (x^4 - \cot(x))^3 \quad , \quad y = \sqrt{1+\cos^2(x)} \quad , \quad y = (\sin(x) - \cos(x))^2$$

تكامل الدوال المثلثية

1	$\int \sin u \; du = -\cos u + C$
2	$\int \cos u \; du = \sin u + C$
3	$\int \tan u \; du = \ln\lvert\sec u\rvert + C$
4	$\int \cot u \; du = -\ln\lvert\csc u\rvert + C$
5	$\int \sec u \; du = \ln\lvert\sec u + \tan u\rvert + C$
6	$\int \csc u \; du = \ln\lvert\csc u - \cot u\rvert + C$
7	$\int \sec^2 u \; du = \tan u + C$
8	$\int \csc^2 u \; du = -\cot u + C$
9	$\int \sec u \cdot \tan u \; du = \sec u + C$
10	$\int \csc u \cdot \cot u \; du = -\csc u + C$

مثال: جد ناتج التكامل $\int \cos(3x)\ dx$

الحل: بالضرب والقسمة على 3 ، فأن

$$\frac{3}{3}\int \cos(3x)\ dx = \frac{1}{3}\int 3\cdot\cos(3x)\ dx = \frac{1}{3}\sin(3x) + C$$

مثال: جد ناتج التكامل $\int \tan^2(2x)\ dx$

الحل: بأستعمال المتطابقة

$$\tan^2(2x) = \sec^2(2x) - 1$$
$$\int \tan^2(2x)\ dx = \int (\sec^2(2x) - 1)dx = \int \sec^2(2x)\,dx - \int dx$$
$$\frac{2}{2}\int \sec^2(2x)\,dx - \int dx = \frac{1}{2}\int 2\cdot\sec^2(2x)\,dx - \int dx$$
$$= \tfrac{1}{2}\tan(2x) - x + C$$

مثال: جد ناتج التكامل $\int x\cdot\tan(2x^2+1)\ dx$

الحل:

$$\int x\cdot\tan(2x^2+1)\ dx = \frac{1}{4}\int 4\,x\cdot\tan(2x^2+1)\ dx$$
$$= \tfrac{1}{4}\ln|\sec(2x^2+1)| + C$$

مثال: جد ناتج التكامل $\int \cot\left(7 - \frac{x}{2}\right)\ dx$

الحل:

$$\int \cot\left(7 - \frac{x}{2}\right)\ dx = \frac{1}{(-1/2)}\int (-1/2)\cot\left(7 - \frac{x}{2}\right)\ dx$$
$$= \tfrac{1}{(-1/2)}\left(-\ln\left|\csc\left(7 - \tfrac{x}{2}\right)\right|\right) + C$$
$$= 2\ln\left|\csc\left(7 - \tfrac{x}{2}\right)\right| + C$$

مثال: جد ناتج التكامل $\int \frac{\cos(2x)}{\sin^3(2x)}\, dx$

الحل:

$$\int \frac{\cos(2x)}{\sin^3(2x)}\, dx = \int (\sin^{-3}(2x)) \cdot (\cos(2x)) \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin^{-3}(2x)) \cdot (2 \cdot \cos(2x)) \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^{-3+1}(2x)}{-3+1} + C$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^{-2}(2x)}{-2} + C = \frac{-1}{4} \frac{1}{\sin^2(2x)} + C = -\frac{1}{4}\csc^2(2x) + C$$

مثال: أحسب التكاملات الاتية:

$$\int (\sin(3x+2) + \cos(2-3x))\, dx \quad , \quad \int \sec^2(4x)\, dx$$

$$\int x^2 \csc^2\left(3 - \frac{x^3}{3}\right) dx \quad , \quad \int x^2 \csc(2x^3) \cdot \cot(2x^3)\, dx$$

$$\int \frac{3\sin(2-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\, dx \quad , \quad \int \frac{\cos(3 + 5\ln(9x))}{7x}\, dx$$

$$\int \cos(6x) \cdot \cos(9 + 4\sin(6x))\, dx \quad , \quad \int \frac{\tan\left(5 - \frac{4}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x^3}}\, dx$$

حسابات التفاضل و التكامل

مقدمة في التفاضل و التكامل :

حسابات التفاضل و التكامل هو فرع من الرياضيات يتضمن التعامل مع الدوال المتغيرة باستمرار .

حسابات التفاضل و التكامل هو موضوع ينقسم الى قسمين :

1. حساب التفاضل (المشتقة)
2. حساب التكامل (التكامل)

يتم استخدام المشتقات في الحسابات التي تتضمن تغير السرعة و التسارع و القيم القصوى و الدنيا للمنحنيات .

في معادلة مثل : $y = 3x^2 + 2x - 5$

يقال أن y هي دالة ل x و يمكن كتابتها : $y = f(x)$

1- مشتقة الثابت : تساوي صفر

$f(x) = c$, $\frac{d}{dx}(c)$ أو $y = c$

مثال 1 : $y = 5$

$$y' = 0, f(x) = 0 , \frac{dy}{dx} = 0$$

2- اذا $f(x) = x^n$ أو $y = x^n$

اذنا $f'(x) = n\,x^{n-1}$ $\quad y' = n\,x^{n-1}$

مثال 2 : $y = x^5$

$$y' = 5\,x^4$$

3- $y = ax^n$, $\frac{dy}{dx} = anx^{n-1}$ أو $f(x) = ax^n$

لذلك $f'(x) = anx^{n-1}$

مثال 3 : $y= 3x^2$

$$y = 3x^2 \text{ اذنا } \frac{dy}{dx} = 6x$$

أو $f(x) = 3x^2$

$$f(x) = 3x^2 \text{ اذنا } f'(x) = 6x$$

مثال 4 : b) $3\sqrt{x}$ a) $y = 5x^7$

(a) مقارنة $y = 5x^7$ مع $y = ax^n$
$a = 5$ $n = 7$. نجد أن

$$\frac{dy}{dx} = anx^{n-1} = (5)(7)x^{7-1} = 35x^6$$

(b) $y = 3\sqrt{x} = 3x^{\frac{1}{2}}$. $a = 3$ $n = \frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = anx^{n-1} = (3)\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{2\sqrt{x}}$$

مثال 5 : ايجاد معامل التفاضل ل $y = \frac{2}{5}x^3 - \frac{4}{x^3} + 4\sqrt{x^5} + 7$:

$$y = \frac{2}{5}x^3 - \frac{4}{x^3} + 4\sqrt{x^5} + 7$$

$$y = \frac{2}{5}x^3 - 4x^{-3} + 4x^{5/2} + 7$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{2}{5}\right)(3)x^{3-1} - (4)(-3)x^{-3-1} + (4)\left(\frac{5}{2}\right)x^{(5/2)-1} + 0$$

$$= \frac{6}{5}x^2 + 12x^{-4} + 10x^{3/2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6}{5}x^2 + \frac{12}{x^4} + 10\sqrt{x^3}$$

مثال 6 : اشتق $y = \frac{(x+2)^2}{x}$:

$$y = \frac{(x+2)^2}{x} = \frac{x^2 + 4x + 4}{x}$$

$$= \frac{x^2}{x} + \frac{4x}{x} + \frac{4}{x}$$

$$y = x + 4 + 4x^{-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + 0 + (4)(-1)x^{-1-1}$$

$$= 1 - 4x^{-2} = 1 - \frac{4}{x^2}$$

4- اذا كان f و g قابلين للاشتقاق عند x فإن f + g و f – g قابلان للاشتقاق أيضا :

$$\frac{dy}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{dy}{dx}[f(x)] + \frac{dy}{dx}[g(x)]$$

$$\frac{dy}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{dy}{dx}[f(x)] - \frac{dy}{dx}[g(x)]$$

مثال 7 :

$$\frac{dy}{dx}[x^4 + x^2] = \frac{dy}{dx}[x^4] + \frac{dy}{dx}[x^2] = 4x^3 + 2x$$

مثال 8 : $\frac{dy}{dx}[3x^8 - 2x^5 + 6x + 1]$

$$= \frac{dy}{dx}[3x^8] - \frac{dy}{dx}[2x^5] + \frac{dy}{dx}[6x] + \frac{dy}{dx}[1]$$

$$= 24x^7 - 10x^4 + 6 + 0$$
$$= 24x^7 - 10x^4 + 6$$

مثال 9 : احسب إحداثيات النقطة على المنحني $y = 3x^2 - 7x + 2$ عندما يكون الميل يساوي 1- :

$$y = 3x^2 - 7x + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 7 = -1$$ الانحدار

$x = 1$ اذا

$$y = 3(1)^2 - 7(1) + 2 = -2$$

فاذنا الميل 1- عند النقطة (2- , 1)

5- قاعدة الضرب : اذا كان f و g قابلان للاشتقاق عند x فإن الضرب f.g قابلان للاشتقاق أيضا عند x :

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}[f(x).g(x)] = f(x).\frac{dy}{dx}[g(x)] + g(x).\frac{dy}{dx}[f(x)]$$

قانون الضرب يمكن أن يكتب بصيغة :

$$(\mathrm{f.g})' = \mathrm{f.g}' + \mathrm{g.f}'$$

مثال 10 : $y = (2x^2 + 1)(4x^3 + x^2)$

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} = (2x^2 + 1)(12x^2 + 2x) + (4x^3 + x^2)(4x)$$

$$= 24x^2 + 12x^2 + 2x + 16x^4 + 14x^3$$

$$= 40x^4 + 8x^3 + 12x^2 + 2x$$

6- قاعدة القسمة : اذا كانت f و g قابلان للاشتقاق عند x و g(x) تكون $\frac{f}{g}$ قابلة للاشتقاق عند x :

$$\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\left[\frac{f(x)}{\mathrm{g(x)}}\right] = \frac{\mathrm{g(x)}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}[\mathrm{f(x)}] - \mathrm{f(x)}\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}[\mathrm{g(x)}]}{[\mathrm{g(x)}]^2}$$

قانون القسمة يمكن أن يكتب :

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{g.f' - f.g'}{g^2}$$

مثال 11 : $y = \frac{x-1}{x^2}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2(1) - (x-1)(2x)}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4}$$

$$\frac{-x^2 + 2x}{x^4} = \frac{x(-x+2)}{x^4} = \frac{2-x}{x^3}$$

التفاضل لمراتب عليا

عندما يكون تفاضل دالة y بالنسبة الى x يتم كتابة معامل التفاضل الأولي على النحو التالي :

$$\frac{dy}{dx} \text{ أو } f'(x)$$

اذا تم اشتقاق التعبير مرة أخرى يتم الحصول على معامل التفاضل الثاني و كتابته :

$$\frac{dy^2}{dx^2} \text{ أو } f''(x)$$

من خلال التفاضل المتتالي يتم الحصول على مشتقات أعلى مثل :

$$\frac{dy^4}{dx^4} \text{ و } \frac{dy^3}{dx^3}$$

مثال 1 : اذا $f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 3x - 5$ جد $f''(x)$:

$$f(x) = 2x^5 - 4x^3 + 3x - 5$$

$$f'(x) = 10x^4 - 12x^2 + 3$$

$$f''(x) = 40x^3 - 24x = 4x(10x^2 - 6)$$

مثال 2 : اذا $y = \cos x - \sin x$ جد y'' :

$$y = \cos x - \sin x$$

$$y' = -\sin x - \cos x$$

$$y'' = -\cos x + \sin x$$

مثال 3 : اذا $y = 3x^4 + 2x^3 - 3x + 2$ جد $\frac{dy^2}{dx^2}$ و $\frac{dy^3}{dx^3}$:

$$y = 3x^4 + 2x^3 - 3x + 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 + 6x^2 - 3$$

$$\frac{dy^2}{dx^2} = 36x^2 + 12x$$

$$\frac{dy^3}{dx^3} = 72x + 12$$

مثال 4 : اذا $y = 2x\, e^{-3x}$ أثبت أن $\frac{dy^2}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$:

$$y = 2xe^{-3x}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2x)(-3e^{-3x}) + (e^{-3x})(2)$$
$$= -6xe^{-3x} + 2e^{-3x}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [(-6x)(-3e^{-3x}) + (e^{-3x})(-6)] + (-6e^{-3x})$$
$$= 18xe^{-3x} - 6e^{-3x} - 6e^{-3x}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 18xe^{-3x} - 12e^{-3x}$$

بتعويض القيم في $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y$

$$(18xe^{-3x} - 12e^{-3x}) + 6(-6xe^{-3x} + 2e^{-3x}) + 9(2xe^{-3x})$$
$$= 18xe^{-3x} - 12e^{-3x} - 36xe^{-3x} + 12e^{-3x} + 18xe^{-3x} = 0$$
$$y = 2xe^{-3x},\ \frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0$$

معادلة المماس والعمود

المماس :

معادلة المماس للمنحني $y = f(x)$ في النقطة (x_1 , y_1) تعطى :

$$y - y_1 = m (x - x_1)$$

حيث أن ميل المنحني في النقطة (x_1 , y_1) يساوي :

$$m = \frac{dy}{dx}$$

المسألة 1 : جد معادلة المماس للمنحني $y = x^2 - x - 2$ في النقطة $(1 , -2)$:

$$m = \frac{dy}{dx} = 2x - 1$$

$(1, -2), x = 1 \Rightarrow m = 2(1) - 1 = 1$

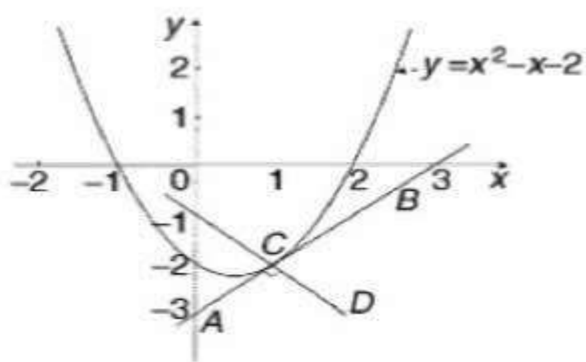
حيث أن معادلة المماس هي :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - -2 = 1(x - 1)$$

$$y + 2 = x - 1$$

$$y = x - 3$$



في مخطط الدالة $y = x^2 - x - 2$ الموضح في الشكل الخط AB هو مماس المنحني في النقطة C اذنا $(1 , -2)$ و معادلة المماس لهذا الخط هي $y = x - 3$.

العمود :

العمود عند أي نقطة على المنحنى هو الخط الذي يمر بالنقطة ويكون متعامدا مع المماس عند هذه النقطة، لذلك في المخطط السابق الخط CD هو العمودي. يوضح المخطط اذا كان خطان في زاوية قائمة يكون الميل لهما هو 1- . لذلك اذا كان m هو ميل المماس يكون ميل العمودي هو $(-\frac{1}{m})$. اذنا معادلة العمود في النقطة (x_1 , y_1) هي :

$$y - y_1 = -\frac{1}{m} (x - x_1)$$

المسألة 2 : جد معادلة العمود للمنحني $y = x^2 - x - 2$ في النقطة (1 , -2) :

من المسألة 1 : $m = 1$

معادلة العمودي : $y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$

$$y - -2 = -\frac{1}{1}(x - 1)$$

$$y + 2 = -x + 1 \quad \text{or} \quad y = -x - 1$$

معادلة الخط CD هي : $y = -x - 1$

تمارين :

بالنسبة للمنحنيات التالية عند النقاط المعطاة :

1. أوجد معادلة المماس. \ 2. أوجد معادلة العمود.

-1 $y = 3x^2 - 2x$ في النقطة (2 , 8) :

$m = \frac{dy}{dx} = 6x - 2$ عندما $x = 2$

$$m = 6(2) - 2 = 10$$

معادلة المماس :

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 8 = 10(x - 2)$$

$$y - 8 = 10x - 12$$

معادلة العمود :

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$$

$$y - 8 = -\frac{1}{10}(x - 2)$$

$$y - 8 = -\frac{1}{10}x + \frac{1}{5}$$

نضرب في 10

$$10y - 80 = -x + 2$$

$$10y + x = 82$$

-2 $y = \frac{1}{x}$ ، في النقطة $(3 , \frac{1}{3})$:

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,(x^{-1}) = -1x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$ عندما $x = 3$

$$m = -\frac{1}{9}$$

معادلة المماس :

$$y - y_1 = m\,(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}\,(x - 3)$$

$$9y - 3 = -x + 3$$

$$9y + x = 6$$

معادلة العمودي :

$$y - y_1 = -\frac{1}{m}\,(x - x_1)$$

$$y - \frac{1}{3} = -\frac{1}{-\frac{1}{9}}\,(x - 3)$$

$$y - \frac{1}{3} = 9x - 27$$ نضرب في 3

$$3y - 1 = 27x - 81$$

$$3y = 27x - 80$$

اشتقاق الدوال المثلثية

$$y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$$

$$y = \sin ax \rightarrow y' = a \cos ax$$

$y = \sin(ax + b) \rightarrow y' = a \cos(ax + b)$ حيث أن a , b ثابتان

$$y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$$

$$y = \cos ax \rightarrow y' = -a \sin ax$$

$y = \cos(ax + b) \rightarrow y' = -a \cos(ax + b)$ حيث أن a , b ثابتان

$$y = \tan x \rightarrow y' = \sec^2 x$$

$$y = \tan(ax + b) \rightarrow y' = a \sec^2(ax + b)$$

$$y = \sec x \rightarrow y' = \sec x \cdot \tan x$$

$$y = \csc x \rightarrow y' = \quad \csc x \cdot \cot x$$

$$y = \cot x \rightarrow y' = -\csc^2 x$$

$$y = \sin^{-1} x \rightarrow y' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$y = \tan^{-1} x \rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

المسألة 1 : جد $f'(x)$ اذا $f = x^2.\tan x$:

$$f'(x) = x^2.\frac{dy}{dx}[\tan x] + \tan x.\frac{dy}{dx}[x^2]$$

$$= x^2.\sec^2 x + 2x.\tan x$$

المسألة 2 : جد $\frac{dy}{dx}$ اذا $y = \frac{\sin x}{1+\cos x}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\cos x)\frac{dy}{dx}[\sin x] - \sin x\,\frac{dy}{dx}[1+\cos x]}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{(1+\cos x)(\cos x) - \sin x(-\sin x)}{(1+\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{(1+\cos x)^2} = \frac{\cos x + 1}{(1+\cos x)^2} = \frac{1}{1+\cos x}$$

المسألة 3 : جد $\frac{dy}{d\theta}$ و $\frac{dy}{dt}$:

-1 $y = 2\sin 5\theta$

-2 $f(t) = 3\cos 2t$

1. $\frac{dy}{d\theta}$ = (2)(5) cos(5) = 10 cos(5θ)

2. f(t) = 3 cos 2t

   f'(t) = (3)(2) sin 2t = -6 sin 2t

المسألة 4 : أوجد معامل الاشتقاق للدالة $y = 7 \sin 2x - 3 \cos 4x$:

$$\frac{dy}{dx} = (7)(2)\cos 2x - (3)(-4)\sin 4x$$
$$\frac{dy}{dx} = 14\cos 2x + 12\sin 4x$$

المسألة 5 : قم باشتقاق الدوال التالية بالنسبة للمتغير :

-1 $f(\theta) = 5\sin(100\pi\theta - 0.40)$

$$f'(\Theta) = 5\cos(100\pi\Theta - 0.40) \cdot 100\pi$$

-2 $f(t) = 2\cos(5t + 0.20)\ 5$

$$f'(t) = -2\sin(5t + 0.20) \cdot 5$$
$$f'(t) = -10\sin(5t + 0.20)$$

اشتقاق الدوال اللوغاريتمية

$$1)\ \frac{d}{dx}[Log_b u] = \frac{1}{u\ Lnb} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$2)\ \frac{d}{dx}[Ln\ u] = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$$

مثال 1 : جد $\frac{d}{dx}[Ln(x^2+1)]$:

$$= \frac{1}{x^2+1} \cdot \frac{d}{dx}[x^2+1] = \frac{1}{x^2+1} .2x = \frac{2x}{x^2+1}$$

مثال 2 : جد $\frac{dy}{dx}$ اذا $y = Ln\ x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[Ln\ x] = \frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx}[x] = \frac{1}{x}$$

مثال 3 : جد y' اذا $y = Ln\ x^2$:

$$Y = 2\ Ln\ x$$

$$y' = 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$$

مثال 4 : جد $\frac{dy}{dx}$ اذا $y = Ln\ (x^2 - 2x + 3)$:

$$y' = \frac{dy}{dx}[Ln\ (x^2 - 2x + 3)]$$

$$= \frac{1}{x^2 - 2x + 3} \cdot \frac{d}{dx}[x^2 - 2x + 3]$$

$$= \frac{1}{x^2 - 2x + 3} \cdot (2x - 2)$$

$$= \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 3}$$

مثال 5 : $y = Ln(x-1)(x+1)$:

$$= Ln(x-1) + Ln(x+1)$$

$$y' = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{x+1+x-1}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)}$$

ملاحظة : $Ln\,AB = Ln\,A + Ln\,B$

مثال 6 : $y = \frac{x^2-1}{x^3+3}$:

$$Y = Ln(x^2-1) - Ln(x^3+3)$$

$$y' = \frac{2x}{x^2-1} - \frac{3x^3}{x^3+3}$$

ملاحظة : $Ln(\frac{A}{B}) = Ln\,A - Ln\,B$

مثال 7 : $y = Ln(5x+4)^{-3}$:

$$Y = -3\,Ln(5x+4)$$

$$y' = \frac{-3}{5x+4} .5 = \frac{-15}{5x+4}$$

مثال 8 : $y = Log_8(x^2+2x+3)$:

$$y' = \frac{1}{(x2 + 2x + 3)Ln8} .(2x+2)$$

$$y' = \frac{2(x+1)}{(x+1)(x+2)Ln\,2^3} = \frac{2}{3\,Ln\,2\,(x+2)}$$

مثال 9 : $y = \text{Ln} \sin(2x^2)$:

$$y' = \frac{1}{\sin(2x^2)} \cdot \cos(2x^2) \cdot 4x = 4x \cot(2x^2)$$

ملاحظة : قانون لتحويل $Log_a u$ الى لوغاريتم طبيعي :

$$\text{Log}_a u = \frac{Ln\, u}{Ln\, a}$$

1- جد $\text{Log}_5 25$:

$$\text{Log}_5 25 = \frac{\text{Ln } 25}{\text{Ln } 5} = \frac{\text{Ln } 5^2}{\text{Ln } 5} = \frac{2 \text{ Ln } 5}{\text{Ln } 5} = 2$$

2- جد $\text{Log}_2 8$:

$$\text{Log}_2 8 = \frac{\text{Ln } 8}{\text{Ln } 2} = \frac{\text{Ln } 2^3}{\text{Ln } 2} = \frac{3 \text{ Ln } 2}{\text{Ln } 2} = 3$$

3- أثبت $\text{Log}_5 25 + \text{Log}_2 32 = 7$:

$$\frac{\text{Ln } 25}{\text{Ln } 5} + \frac{\text{Ln } 32}{\text{Ln } 2} = 7$$

$$\frac{\text{Ln } 5^2}{\text{Ln } 5} + \frac{\text{Ln } 2^5}{\text{Ln } 2} = 7$$

$$\frac{2 \text{ Ln } 5}{\text{Ln } 5} + \frac{5 \text{ Ln } 2}{\text{Ln } 2} = 7$$

$$2 + 5 = 7$$

اشتقاق الدوال الأسية

المقلوب (الدالة العكسية) للدالة اللوغاريتمية الطبيعية Ln x يشار إليها ب e^x و تعرف بالدالة الأسية الطبيعية :

- $\text{Ln } e = 1$
- $\text{Ln } e^x = x \text{ Ln } e = x$

الدالة الاسية الطبيعية e^x قابلة للاشتقاق على (∞- , ∞+) و مشتقتها هي :

- $\frac{d}{dx} = [e^x] = e^x$
- $\frac{d}{dx} = [Lnx] = \frac{1}{x}$
- $\frac{d}{dx} = \left[\frac{1}{\frac{1}{e^x}}\right] = e^x$

القوانين :

- $\frac{d}{dx}[b^u] = b^u \, Ln \, b \, \frac{du}{dx}$
- $\frac{d}{dx}[e^u] = e^u . \frac{du}{dx}$

ملاحظة : في حالة خاصة عندما b = e يكون Ln e = 1 لذلك :

$$\frac{d}{dx} = [e^x] = e^x$$

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x \, Ln \, e = e^x . 1 = e^x$$

مثال 1 : $\frac{d}{dx}[\pi^x] = \pi^x \operatorname{Ln} \pi$

مثال 2 : $\frac{d}{dx}[2^{\sin x}] = 2^{\sin x}. \operatorname{Ln} 2 . \frac{d}{dx}(\sin x)$

$$= 2^{\sin x} . \ln 2 (\cos x)$$

مثال 3 : $\frac{d}{dx}[e^{-2x}] = e^{-2x}. \frac{d}{dx}(-2x) = -2e^{-2x}$

مثال 4 : $\frac{d}{dx}[e^{x^3}] = e^{x^3}. \frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2 e^{x^3}$

مثال 5 : جد $\frac{d}{dx}$ ، $y = x^3 . e^x$:

$$\frac{d}{dx} = x^3 . e^x + 3x^2 . e^x = e^x (x^3 + 3x^2) = x^2 e^x (x + 3)$$

مثال 6 : جد $\frac{dy}{dx}$ ، $y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(e^x + e^{-x})(e^x + e^{-x}) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x} + 1 + 1 + e^{-2x} - [e^{2x} - 1 - 1 + e^{-2x}]}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x} - e^{2x} + 2 - e^{-2x}}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

مثال 7 : $y = e^{x\tan x}$:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x\tan x}.\frac{d}{dx}(x\tan x)$$

$$= e^{x\tan x}.[x.sec^2x + tanx]$$

مثال 8 : $y = Ln(1 - xe^{-x})$:

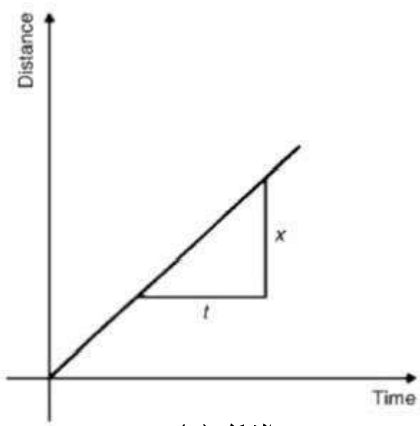
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(1 - xe^{-x})}.\frac{d}{dx}(1 - xe^{-x})$$

تفاضل السرعة و التعجيل

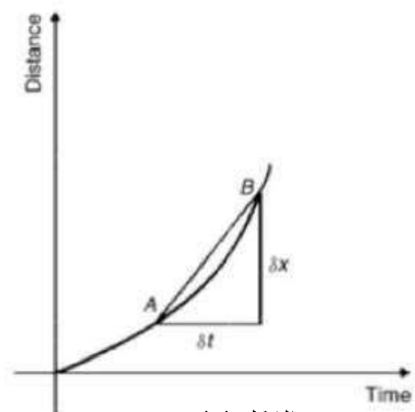
السرعة و التعجيل :

عندما تتحرك سيارة مسافة x مترًا في زمن t ثانية على خط مستقيم، إذا كانت السرعة $v = \frac{x}{t} \; m/_{s}$، فإن ميل منحنى المسافة/الزمن كما هو موضح في الشكل (1).

إذا كانت سرعة السيارة غير ثابتة، فإن منحنى المسافة/الزمن لن يكون خطًا مستقيمًا، وقد يظهر كما هو موضح في الشكل (2).



الشكل (1)



الشكل (2)

- **السرعة المتوسطة :**

تُحسب السرعة المتوسطة على مدى صغير من الزمن δt والمسافة δx تعطى بميل الوتر AB في الشكل، أي أن السرعة المتوسطة على الزمن تساوي:

$$v = \frac{\delta x}{\delta t}$$

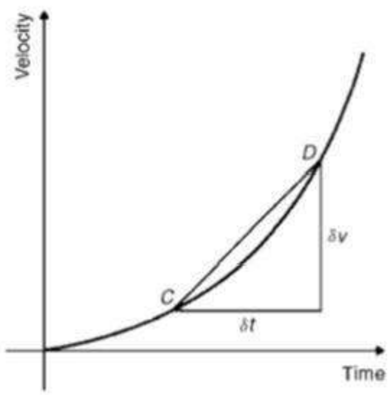
عندما δt تساوي 0، يصبح الوتر AB مماسًا للمنحنى عند النقطة A، وبالتالي تُعطى السرعة بالعلاقة :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

- التعجيل :

يُعرَّف تسارع "a " السيارة على أنه معدل تغيّر السرعة، أي منحنى السرعة/الزمن كما هو موضح في الشكل (3). إذا كانت δv هي التغير في v و δt التغير المقابل في الزمن، فإن: $a = \frac{\delta v}{\delta t}$

عندما δt تساوي 0، يصبح الوتر CD مماسًا للمنحنى عند النقطة c، وبالتالي يُعطى التسارع بالعلاقة: $a = \frac{dv}{dt}$



الشكل (3)

$$a = \frac{dv}{dt} \Leftarrow \text{التسارع}$$

لكن $$v = \frac{dx}{dt}$$

فإن $$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dx^2}$$

ملخص :

إذا تحرك جسم مسافة x مترًا خلال زمن t ثانية، فإن :

1. المسافة : x = f(t)
2. السرعة : v = f'(t) أو $v = \frac{dx}{dt}$
3. التسارع : a = f''(t) أو $a = \frac{d^2x}{dt^2}$

المسألة 1 :المسافة x بالأمتار التي تتحركها سيارة خلال t ثانية معطاة بالمعادلة:

$$X = 3t^2 - 2t^2 + 4t - 1$$

احسب السرعة والتسارع خلال:

أ) $t = 0$ ب) $t = 1.5s$

الحل:

- المسافة : $x = 3t^3 - 2t^2 + 4t - 1 \quad (m)$
- السرعة : $v = \frac{dx}{dt} = 9t^2 - 4t + 4 \quad (m/s)$
- التسارع : $a = \frac{d^2x}{dt^2} = 18t - 4 \quad (m/s^2)$

أ) عندما : $t = 0$

$$v = 9(0)^2 - 4(0) + 4 = 4 \text{ m/s}$$

$$a = 18(0) - 4 = -4 \text{ m/s}^2$$

ب) عندما : $t = 1.5$

$$v = 9(1.5)^2 - 4(1.5) + 4 = 18.25 \text{ m\textbackslash s}$$

$$a = 18(1.5) - 4 = 23 \text{ m/s}^2$$

المسألة 2 :المسافة x بالأمتار التي تقطعها مركبة خلال t ثانية بعد ضغط المكابح معطاة بالمعادلة :

$$X = 20t - \frac{5}{3}\, t^2$$

احسب :

أ) سرعة المركبة (Km/h) عند لحظة ضغط المكابح.

ب) المسافة التي تقطعها المركبة قبل أن تتوقف.

الحل :

- المسافة : $X = 20t - \frac{5}{3}\, t^2$
- السرعة : $v = \frac{dt}{dt} = 20 - \frac{10}{3}\, t$

أ) عندما $t = 0$ (لحظة ضغط المكابح):

$$v = 20 - \frac{10}{3}\,(0) = 20 \text{ m/s}$$

بتحويل الوحدة:

$$\frac{20 \times 60 \times 60}{1000} = 72\, Km/h$$

ب) عندما تتوقف السيارة، تكون السرعة صفرًا :

$$v = 20 - \frac{10}{3} t = 0$$

$$20 = \frac{10}{3} t \quad , \quad t = 6 \text{ sec}$$

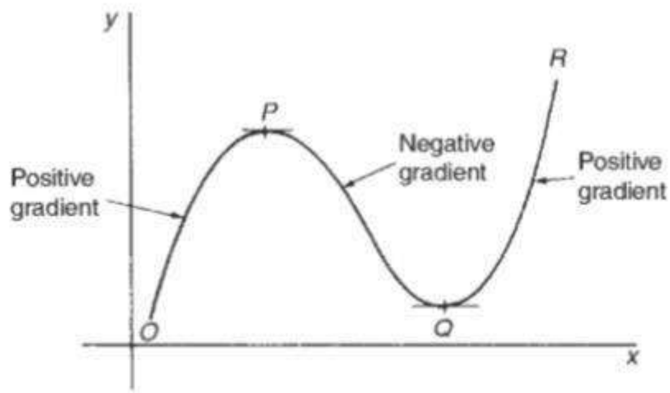
المسافة التي تقطعها المركبة قبل التوقف:

$$x = 20t - \frac{5}{3}\, t^2 = 20(6) - \frac{5}{3}\,(6)^2$$

$$= 120 - 60 = 60 \text{ m}$$

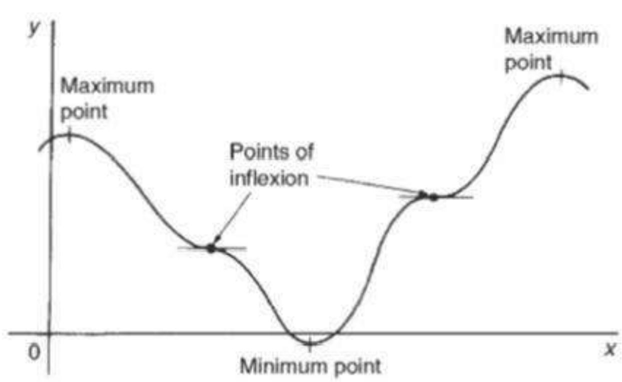
نقاط الانقلاب

في الشكل (1)، يتغير ميل المنحنى من موجب بين O و P و إلى سالب بين P و Q، ثم يعود إلى موجب بين Q و R .



الشكل (1)

عند النقطة P ، يكون الميل صفرًا، ومع زيادة X ، يتغير ميل المنحنى من موجب قبل النقطة P إلى سالب بعدها. تُعرف هذه النقطة بنقطة الحد العليا.
عند النقطة Q ، يكون الميل أيضًا صفرًا، ومع زيادة X ، يتغير ميل المنحنى من سالب قبل النقطة Q إلى موجب بعدها. تُعرف هذه النقطة بنقطة الحد الادنى.
النقاط مثل P و Q يمكن أن تكون نقاط انقلاب .
يمكن وجود نقطة تحول لمنحنى لا يحتوي على حد أقصى أو أدنى واضح حيث الميل في الجهتين يساوي نفس القيمة وتعرف باسم هذه النقطة المميزة ب نقطة انعطاف كما في الشكل (2) .



الشكل(2)

ملحوظة: نقاط الحد الأقصى والحد الأدنى تُعرف أيضًا بالنقاط الثابتة.

إجراءات إيجاد وتمييز النقاط الثابتة:

1. بالنظر إلى الدالة $y = f(x)$، حدد $\frac{dy}{dx}$
2. اجعل $\frac{dy}{dx} = 0$ واحسب قيم x .
3. عوّض بقيم x في المعادلة الأصلية $y = f(x)$ لإيجاد قيم -y وهذا يحدد إحداثيات النقاط الثابتة.
4. احسب المشتقة الثانية $\frac{d^2y}{dx^2}$ وعوض بقيم x التي تم العثور عليها في الخطوة الثانية.
   - إذا كانت النتيجة موجبة: النقطة حد أدنى.
   - إذا كانت النتيجة سالبة: النقطة حد أعلى.
   - إذا كانت النتيجة صفرًا: النقطة هي نقطة انعطاف.

5. حدد إشارة الميل (المشتقة الأولى) قبل وبعد النقاط الثابتة. إذا تغيّرت الإشارة كما يلي:
   - من موجب إلى سالب: النقطة حد أقصى.
   - من سالب إلى موجب: النقطة حد أدنى.
   - من موجب إلى موجب أو من سالب إلى سالب: النقطة نقطة انعطاف.

مثال 1 : جد نقط تحول لمنحنى الدالة $y = 3x^2 - 6x$ و فحص اشارة ميل المنحى للطرفين :

$$y = 3x^2 - 6x$$

$$\frac{dy}{dx} = 6x - 6$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$6x - 6 = 0$$

$$x = 1$$

□ نقطة الانقلاب هي (1 , -3)

اذا كان $x = 0.9$

$$\frac{dy}{dx} = 6(0.9) - 6 = -0.6$$ سالب

اذا كان $x = 1.1$

$$\frac{dy}{dx} = 6(1.1) - 6 = 0.6$$ موجب

□ النقطة (1 , -3) هي نقطة الحد الأدنى

مثال 2 : جد نقطة الحد الأعلى و نقطة الحد الأدني لمنحي الدالة $y = x^3 - 3x + 5$

أ) فحص اشارة الميل على جانبي نقاط الانقلاب .

ب) تحديد اشارة المشتقة الثانية .

$$y = x^3 - 3x + 5$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$X = \pm 1$$

$$X = 1 \quad , \quad y = 1^3 - 3(1) + 5 = 3$$

$$X = -1 \quad , \quad y = (-1)^3 - 3(-1) + 5 = 7$$

□ (1 , 3) و (7 , 1-) هي احداثيات لنقطة الانقلاب .

أ) اذا $x = 0.9$

$$\frac{dy}{dx} = 3(0.9)^2 - 3$$ سالب

اذا $x = 1.1$

$$\frac{dy}{dx} = 3(1.1)^2 - 3$$ موجب

□ النقطة (3- , 1) هي نقطة الحد الادنى لنقطة (7 , 1-)

اذا $x = -1.1$

$$\frac{dy}{dx} = 3(-1.1)^2 - 3$$ موجب

اذا $x = -0.9$

$$\frac{dy}{dx} = 3(-0.9)^2 - 3$$ سالب

□ الاشارة تغيرت من موجب الى السالب فان النقطة (7 , 1-) هي نقطة الحد الأقصى .

ب) $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

$$x = 1$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ موجب

□ (3 , 1) هي الحد الأدنى

$$x = -1$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ سالب

□ (7 , 1-) هي الحد الأقصى

مثال 3 حدد نفطة الانقلاب لدالة المنحني التالي و حدد ما اذا كانت نقطة الحد الأعلى أو الحد الأدنى $y = 4\theta + e^{-\theta}$:

$$y = 4\theta + e^{-\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4 - e^{-\theta} = 0$$

$$4 = e^{-\theta}$$

$$e^{\theta} = \frac{1}{4}$$

$$\theta = Ln\,\frac{1}{4} = -\,1.3863$$

$$y = 4(-1.3863) - e^{-1.3863} = -5.5452 + 4.0000$$

$$= -1.5452$$

(-1.3863 , -1.5452) هي نقطة الانقلاب

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{-\theta}$$

عندما $\theta = -1.3863$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = e^{1.3863} = 4.0$$ موجب

(-1.3863 , -1.5452) هي نقطة حد الأدنى

مثال 4 : حدد نقطة التحول لدالة المنحني $y = 4 \sin x - 3 \cos x$ في مدى $x = 0$ الى $x = 2\pi$ (بالتقدير الدائري) و ميز بين هذه النقاط .

اجعل $\frac{dy}{dx} = 0$:

$$\frac{dy}{dx} = 4\cos x + 3\sin x$$

$$4\cos x + 3\sin x = 0$$

$$4\cos x = -3\sin x$$

$$4 = -\frac{3\sin x}{\cos x}$$

$$4 = -3 \tan x$$

$$4 = -3\tan x$$

$$\tan x = -\frac{4}{3}$$

$$x = \tan^{-1}\left(-\frac{4}{3}\right) = -53^\circ$$

عوّض في المعادلة الأصلية $y = 4\sin x - 3\cos x$:

$$y = 4\sin(-53^\circ) - 3\cos(-53^\circ) = -5$$

إذن: نقطة التحول هي $(-53\ ,-5)$.

إذا كانت $x = -53$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -4\sin x + 3\cos x$$

$$= -4\sin(-53\ ) + 3\cos(-53\ )$$

$$= 3.2 + 1.8 = 5$$

إذن: النقطة $(-53^\circ, -5)$ هي **نقطة حد أدنى** عند هذه الإحداثيات.

مثال 5 : جد نقاط الانقلاب و ميز بينهم للدالة $y = 2x - e^x$:

$$\frac{dy}{dx} = 2 - e^x$$

$$2 - e^x = 0$$

$$2 = e^x$$

$$\text{Ln } 2 = \text{Ln } e^x$$

$$\text{Ln } 2 = x \text{ Ln } e$$

$$\text{Ln } 2 = x$$

□ $x = 0.693$

$$y = 2x - e^x$$

$$y = 2(0.693) - e^{0.693}$$

$$= 1.386 - 2$$

$$= -0.614$$

□ نقطة الانقلاب هي (0.693 , - 0.614)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -e^x$$

$= -e^{0.693} = -2$ سالب

النقطة (0.693 , -0.614) هي حد الاعلى .

مثال 6 : جد نقاط التحول و ميز بينهم للدالة $y = 5x - 2 \ln x$:

$$\frac{dy}{dx} = 5 - \frac{2}{x} = 0$$

$$5 = \frac{2}{x}$$

$$x = \frac{2}{5} = 0.4$$

$$y = 5(0.4) - 2 \ln(0.4)$$

$$= 2 + 1.83 = 3.83$$

□ (0.4 , 3.83) هي نقطة الانقلاب

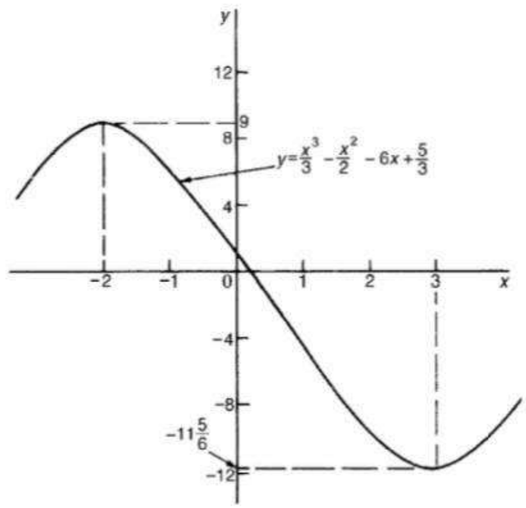
$$\frac{d^2y}{dx^2} = 5 - 2x^{-1} = 2x^{-1-1} = 2x^{-2} = \frac{2}{x^2}$$

اذا كان $x = 0.4$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2}{(0.4)^2} = \text{موجب}$$

□ النقطة (0.4 , 3.83) هي نقطة الحد الأدنى .

مثال 7 : حدد احداثيات كل من نقطة الحد الأدنى و الحد الأعلى من المخطط التالي للدالة $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{5}{3}$ و ميز بينهم ثم ارسم المخطط :



$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 6x + \frac{5}{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 6$$

$$\frac{dy}{dx} = 0.$$

$$x^2 - x - 6 = 0,$$

$$(x+2)(x-3) = 0,$$

$$x = -2 \text{ or } x = 3$$

$$x = -2,$$

$$y = \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 6(-2) + \frac{5}{3} = 9$$

$$x = 3,\ y = \frac{(3)^3}{3} - \frac{(3)^2}{2} - 6(3) + \frac{5}{3}$$

$$= -11\frac{5}{6}$$

- احداثيات نقاط التحول هم (9 , -2) و (3 , -11.83)

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - x - 6 \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 1$$

$$x = -2,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 2(-2) - 1 = -5 \quad \text{سالب}$$

- النقطة (9 , -2) هي نقطة الحد الاعلى .

$$x = 3,\ \frac{d^2y}{dx^2} = 2(3) - 1 = 5 \quad \text{موجب}$$

- النقطة (3 , -11.83) هي نقطة الحد الأدنى .

حسابات التكامل

التكاملات القياسية :

عملية التكامل :

عملية التكامل تعكس عملية التفاضل. في التفاضل اذا كانت $f(x) = 2x^2$ فإن $f'(x) = 4x$ و بالتالي، فإن تكامل $4x$ هو $2x^2$.

وبالتالي فإن $\int 4x\,.\,dx$ يعني تكامل $4x$ بالنسبة إلى x ، و $\int 2t\,.\,dt$ يعني تكامل بالنسبة الى t .

عند تنفيذ عملية التكامل يتم اضافة ثابت c الى النتيجة، وبالتالي :

$$\int 4x\,.\,dx = 2x^2 + c \quad \text{و} \quad \int 2t\,.\,dt = t^2 + c$$

حيث يطلق على c اسم الثابت العشوائي للتكامل.

الحل العام للتكاملات من الشكل ax^n هو :

$$\int ax^n\,.\,dx$$

حيث أن a و n ثابتان و صيغة التكامل لهذا الشكل :

$$\int ax^n\,.\,dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c$$

التكاملات القياسية :

1. $\int ax^n\,dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + c$ حيث $n \neq -1$.

2. $\int dx = x + c$.

3. $\int a\,dx = ax + c$.

4. $\int \cos(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sin(ax) + c$.

5. $\int \sin(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax) + c$.

6. $\int \sec^2(ax)\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax) + c$.

7. $\int \csc^2(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\cot(ax) + c$.

8. $\int \csc(ax)\cot(ax)\,dx = -\frac{1}{a}\csc(ax) + c$.

9. $\int \sec(ax)\tan(ax)\,dx = \frac{1}{a}\sec(ax) + c$.

10. $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$.

11. $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax} + c$

المسألة 1 : جد $\int 5x^2 . dx$:

$$\int 5x^2\,dx = \frac{5x^{2+1}}{2+1} + c = \frac{5x^3}{3} + c$$

المسألة 2 : باستخدام القوانين المعطاة أجد :

$$1)\ \int \frac{2}{x^2}\,.dx = \int 2x^{-2}\,dx = \frac{2x^{-2+1}}{-2+1} + c$$
$$= \frac{2x^{-1}}{-1} + c = \frac{-2}{x} + c$$

$$2)\ \int \sqrt{x}\,.dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$
$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$$

تكامل الثابت k هو kx +c على سبيل المثال :

$$\int 8x\,dx = 8x + C$$

عند تكامل مجموع عدة حدود، تكون النتيجة هي مجموع تكامل الحدود الفردية.
على سبيل المثال:

$$\int (3x + 2x^2 - 5)\,dx = \int 3x\,dx + \int 2x^2\,dx - \int 5\,dx$$
$$= \frac{3x^2}{2} + \frac{2}{3}x^3 - 5x - C$$

المسألة 3 : جد :

1. $\int \frac{2x^3-3x}{4x}.dx$

$$\int \frac{2x^3-3x}{4x}dx = \int \frac{2x^3}{4x} - \frac{3x}{4x}dx$$
$$= \int \frac{x^2}{2} - \frac{3}{4}dx = \left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^{2+1}}{2+1} - \frac{3}{4}x + c$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)\frac{x^3}{3} - \frac{3}{4}x + c = \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x + c$$

2. $\int (1-t)^2.dx$

$$\int (1-2t+t^2)dt = t - \frac{2t^{1+1}}{1+1} + \frac{t^{2+1}}{2+1} + c$$
$$= t - \frac{2t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + c$$
$$= t - t^2 + \frac{1}{3}t^3 + c$$

المسألة 4 : جد $\int 3\sqrt{x}\,.dx$

$$\int 3\sqrt{x}\,dx = \int 3x^{1/2}dx = \frac{3x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$
$$= \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = 2x^{\frac{3}{2}} + c = 2\sqrt{x^3} + c$$

المسألة 5 : جد $\int \frac{-5}{9\sqrt[4]{t^3}}$. dx :

$$\int \frac{-5}{9\sqrt[4]{t^3}}\,dt = \int \frac{-5}{9t^{\frac{3}{4}}}\,dt = \int \left(-\frac{5}{9}\right) t^{-\frac{3}{4}}\,dt$$

$$= \left(-\frac{5}{9}\right) \frac{t^{-\frac{3}{4}+1}}{-\frac{3}{4}+1} + c$$

$$= \left(-\frac{5}{9}\right) \frac{t^{\frac{1}{4}}}{\frac{1}{4}} + c = \left(-\frac{5}{9}\right)\left(\frac{4}{1}\right) t^{1/4} + c$$

$$= -\frac{20}{9}\sqrt[4]{t} + c$$

المسألة 6 : جد :

-1 $\int 4\cos 3x\,dx$:

$$\int 4\cos 3x\,dx = (4)\left(\frac{1}{3}\right)\sin 3x + c$$

$$= \frac{4}{3}\sin 3x + c$$

-2 $\int 5\sin 2\theta\,d\theta$

$$\int 5\sin 2\theta\,d\theta = (5)\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2\theta + c$$

$$= -\frac{5}{2}\cos 2\theta + c$$

المسألة 7 : $\int 7\, sec^2 4t\, dt$:

$$\int 7\sec^2 4t\, dt = (7)\left(\frac{1}{4}\right)\tan 4t + c$$
$$= \frac{7}{4}\tan 4t + c$$

المسألة 8 : أجد :

1- $\int 5e^{3x} . dx$:

$$\int 5e^{3x}\, dx = (5)\left(\frac{1}{3}\right)e^{3x} + c = \frac{5}{3}e^{3x} + c$$

2- $\int \frac{2}{3e^{4t}} . dt$:

$$\int \frac{2}{3e^{4t}}\, dt = \int \frac{2}{3}e^{-4t}\, dt$$
$$= \left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)e^{-4t} + c$$
$$= -\frac{1}{6}e^{-4t} + c = -\frac{1}{6e^{4t}} + c$$

المسألة 9 : جد:

1- $\int \frac{3}{5x} . dx$

$$\int \frac{3}{5x}\, dx = \int \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{x}\right) dx = \frac{3}{5}\ln x + c$$

-2 $\int \frac{2m^2+1}{m} . dx$

$$\int \left(\frac{2m^2+1}{m}\right) dm = \int \left(\frac{2m^2}{m} + \frac{1}{m}\right) dm$$
$$= \int \left(2m + \frac{1}{m}\right) dm$$
$$= \frac{2m^2}{2} + \ln m + c$$
$$= \boldsymbol{m^2 + \ln m + c}$$

التكاملات المحددة

التكاملات المحددة هي تلك التي يتم تطبيق حدود عليها.

إذا تم كتابة تعبير على النحو التالي : $[x]_a^b$

b = يُسمى الحد العلوي.

a = يُسمى الحد السفلي.

يتم تعريف عملية تطبيق الحدود :

$$[\mathrm{x}]_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} = \mathrm{b} - \mathrm{a}$$

المسألة 1 : جد $\int_{-2}^{3}(4 - x^2). dx$

$$\int_{-2}^{3}(4-x^2)\,dx = \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3}$$
$$= \left\{4(3) - \frac{(3)^3}{3}\right\} - \left\{4(-2) - \frac{(-2)^3}{3}\right\}$$
$$= \{12-9\} - \left\{-8 - \frac{-8}{3}\right\}$$
$$= \{3\} - \left\{-5\frac{1}{3}\right\} = \boldsymbol{8\frac{1}{3}}$$

المسألة 2 :جد: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin 2x\,.dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin 2x\,dx$$

$$=\left[(3)\left(-\frac{1}{2}\right)\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\left[-\frac{3}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\left\{-\frac{3}{2}\cos 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}-\left\{-\frac{3}{2}\cos 2(0)\right\}$$

$$=\left\{-\frac{3}{2}\cos\pi\right\}-\left\{-\frac{3}{2}\cos 0\right\}$$

$$=\left\{-\frac{3}{2}(-1)\right\}-\left\{-\frac{3}{2}(1)\right\}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=\mathbf{3}$$

المسألة 3 : جد قيمة التالي :

-1 $\int_1^4\left(\frac{\theta+2}{\sqrt{\theta}}\right).d\theta$:

$$\int_1^4\left(\frac{\theta+2}{\sqrt{\theta}}\right)d\theta=\int_1^4\left(\frac{\theta}{\theta^{\frac{1}{2}}}+\frac{2}{\theta^{\frac{1}{2}}}\right)d\theta$$

$$=\int_1^4\left(\theta^{\frac{1}{2}}+2\theta^{\frac{-1}{2}}\right)d\theta$$

$$=\left[\frac{\theta^{\left(\frac{1}{2}\right)+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{2\theta^{\left(\frac{-1}{2}\right)+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right]_1^4$$

$$=\left[\frac{\theta^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+\frac{2\theta^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_1^4=\left[\frac{2}{3}\sqrt{\theta^3}+4\sqrt{\theta}\right]_1^4$$

$$=\left\{\frac{2}{3}\sqrt{(4)^3}+4\sqrt{4}\right\}-\left\{\frac{2}{3}\sqrt{(1)^3}+4\sqrt{1}\right\}$$

$$=\left\{\frac{16}{3}+8\right\}-\left\{\frac{2}{3}+4\right\}$$

$$=5\frac{1}{3}+8-\frac{2}{3}-4=\mathbf{8\frac{2}{3}}$$

-2 $\int_{2}^{1} \frac{2}{x^2} \,.dx$:

$$\int_{2}^{1} \frac{2}{x^2} \,.dx = \int_{2}^{1} 2x^{-2} \,.dx = \left[2\left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right)\right]_{2}^{1}$$

$$\left[\frac{2x^{-1}}{-1}\right]_{2}^{1} = \left[\frac{-2}{x}\right]_{2}^{1} = [-2+1] = -1$$

-3 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1+\cos 2t}{2} \,.dt$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \frac{1+\cos 2t}{2} \,.dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) .dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$\left[\frac{1}{2}(0) + \frac{1}{4}\sin 2(0)\right] - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{4}\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\frac{\pi}{4}$$

المسألة 4 : تكامل التالي : $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (3\sin 2x - 2\cos 3x).\,dx$

$$\left[-\frac{3}{2}\cos 2x - \frac{2}{3}\sin 3x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \left[-\frac{3}{2}\cos 2\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\sin 3\frac{\pi}{4}\right] - \left[-\frac{3}{2}\cos 2\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\sin 3\frac{\pi}{4}\right]$$

$$= -\frac{3}{2}\cos\pi - \frac{2}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}\sin\frac{3\pi}{4}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 0.707 = 2.638$$

المسألة 5 جد :

-1 $\int_1^2 4e^{2x}.\,dx$

$$\int_1^2 4e^{2x}.\,dx = \left[4.\frac{1}{2}e^{2x}\right]_1^2 = 2[e^{2x}]_1^2$$

$$2[e^4 - e^2] = 2[54.5982 - 7.3891] = 94.42$$

-2 $\int_3^4 \frac{3}{4x}.\,dx$

$$\int_3^4 \frac{3}{4x}.\,dx = \left[\frac{3}{4}\ln x\right]_1^4 = \frac{3}{4}[\ln 4 - \ln 1]$$

$$= \frac{3}{4}[1.3863 - 0] = 1.040$$

طرق التكامل

التكامل باستخدام التعويض الجبري :

مثال 1 : ايجاد $\int \cos(3x+7)dx$:

نفرض : u = 3x + 7 \ اذن : $\frac{du}{dx} = 3$ ، $dx = \frac{du}{3}$

نستبدل في التكامل:

$$\int \cos(3x+7)\,dx = \int \cos(u)\cdot\frac{1}{3}du = \frac{1}{3}\int \cos(u)du$$

$$= \frac{1}{3}\sin(u) + C$$

بإعادة كتابة u كـ $3x+7$:

$$\int \cos(3x+7)\,dx = \frac{1}{3}\sin(3x+7) + C$$

مثال 2 : ايجاد $\int (2x-5)^7 . dx$:

نفرض : u = 2x - 5 \ اذن : $\frac{du}{dx} = 2$ ، $dx = \frac{du}{2}$

$$\int (2x-5)^7\,dx = \int u^7\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^7\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^8}{8}\right) + c = \frac{1}{16}u^8 + c$$

نستبدل u ب 2x - 5 :

$$\int (2x-5)^7\,dx = \frac{1}{16}(2x-5)^8 + c$$

مثال 3 : ايجاد : $\int \frac{4}{(5x-3)} . dx$:

نفرض : u = 5x - 3 \ اذن : $\frac{du}{dx} = 5$ ، $dx = \frac{du}{5}$

$$\int \frac{4}{(5x-3)} dx = \int \frac{4}{u}\frac{du}{5} = \frac{4}{5}\int \frac{1}{u} du$$
$$= \frac{4}{5} \ln u + c$$
$$= \frac{4}{5} \ln(5x-3) + c$$

مثال 4 : قيم : $\int_0^1 2e^{6x-1} . dx$:

نفرض : u = 6x - 1 \ اذن : $\frac{du}{dx} = 6$ ، $dx = \frac{du}{6}$

$$\int 2e^{6x-1} dx = \int 2e^{u}\frac{du}{6} = \frac{1}{3}\int e^{u} du$$
$$= \frac{1}{3}e^{u} + c = \frac{1}{3}e^{6x-1} + c$$
$$\int_0^1 2e^{6x-1} dx = \frac{1}{3}[e^{6x-1}]_0^1$$
$$= \frac{1}{3}[e^{5} - e^{-1}] = 49.35.$$

مثال 5 : ايجاد : $\int 3x(4x^2+3)^5 . dx$:

نفرض : $u = (4x^2 + 3)$ \ اذن : $\frac{du}{dx} = 8x$ ، $dx = \frac{du}{8x}$

$$\int 3x(4x^2+3)^5\,dx = \int 3x(u)^5 \frac{du}{8x}$$
$$= \frac{3}{8}\int u^5\,du$$

$$\frac{3}{8}\int u^5\,du = \frac{3}{8}\left(\frac{u^6}{6}\right) + c = \frac{1}{16}u^6 + c$$
$$= \frac{1}{16}(4x^2+3)^6 + c$$

مثال 6 : قيم : $\int_0^{\frac{\pi}{6}} 24\,sin^5\theta\,.\cos\theta\,.\,d\theta$:

نفرض : $u = \sin \theta$ \ اذن : $\frac{du}{d\theta} = \cos\theta$ ، $d\theta = \frac{du}{\cos\theta}$

$$\int 24\sin^5\theta\cos\theta\,d\theta$$
$$= \int 24u^5\cos\theta\frac{du}{\cos\theta}$$
$$= 24\int u^5\,du$$
$$= 24\frac{u^6}{6} + c = 4u^6 + c = 4(\sin\theta)^6 + c$$
$$= 4\sin^6\theta + c$$

$$\int_0^{\pi/6} 24\sin^5\theta\cos\theta\,d\theta$$
$$= [4\sin^6\theta]_0^{\pi/6} = 4\left[\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^6 - (\sin 0)^6\right]$$
$$= 4\left[\left(\frac{1}{2}\right)^6 - 0\right] = \frac{1}{16} \text{ or } \mathbf{0.0625}$$

التكامل بالتجزئة

مقدمة:

نبدأ من ضرب المشتقات:

$$\frac{d}{dx}(uv) = v \cdot \frac{du}{dx} + u \cdot \frac{dv}{dx}$$

حيث u وv هما دالتان في x.

بإعادة الترتيب نحصل على:

$$u\frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx}(uv) - v\frac{du}{dx}$$

بأخذ التكامل للطرفين بالنسبة إلى x:

$$\int u\frac{dv}{dx}dx = \int \frac{d}{dx}(uv)dx - \int v\frac{du}{dx}dx$$

أي:

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

هذه هي صيغة التكامل بالتجزئة.

مثال 1 : ايجاد : $\int x \cos x \,.\, dx$:

نفرض : $u = x \,,\, \frac{du}{dx} = 1 \;\rightarrow\; du = dx$

$$dv = \cos x \,.\, dx \;\rightarrow\; v = \int \cos x \,.\, dx = \sin x$$

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - (-\cos x) + c$$
$$= \mathbf{x \sin x + \cos x + c}$$

مثال 2 : جد : $\int 3te^{2t} . dt$:

نفرض : $u = 3t \,,\, \frac{du}{dt} = 3 \;\rightarrow\; du = 3dt$

$$dv = e^{2t} \,.\, dt \;\rightarrow\; v = \int e^{2t} \,.\, dt = \frac{1}{2} e^{2t}$$

$$\int 3te^{2t} \, dt = (3t)\left(\frac{1}{2}e^{2t}\right) - \int \left(\frac{1}{2}e^{2t}\right)(3\,dt)$$
$$= \frac{3}{2}te^{2t} - \frac{3}{2}\int e^{2t}\, dt$$
$$= \frac{3}{2}te^{2t} - \frac{3}{2}\left(\frac{e^{2t}}{2}\right) + c$$

$$\int 3t\, e^{2t}\, dt = \frac{3}{2}e^{2t}\left(t - \frac{1}{2}\right) + c,$$

مثال 3 : قيم : $\int_0^1 5xe^{4x}.dx$:

نفرض : $u = 5x\ , \frac{du}{dx} = 5 \ \rightarrow \ du = 3dx$

$$dv = e^{4x}\ .dx \ \rightarrow \ v = \int e^{4x}\ .dx = \frac{1}{4}\ e^{4x}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int 5xe^{4x}\,dx = (5x)\left(\frac{e^{4x}}{4}\right) - \int \left(\frac{e^{4x}}{4}\right)(5\,dx)$$
$$= \frac{5}{4}xe^{4x} - \frac{5}{4}\int e^{4x}\,dx$$
$$= \frac{5}{4}xe^{4x} - \frac{5}{4}\left(\frac{e^{4x}}{4}\right) + c$$
$$= \frac{5}{4}e^{4x}\left(x - \frac{1}{4}\right) + c$$

$$\int_0^1 5xe^{4x}\,dx$$
$$= \left[\frac{5}{4}e^{4x}\left(x - \frac{1}{4}\right)\right]_0^1$$
$$= \left[\frac{5}{4}e^{4}\left(1 - \frac{1}{4}\right)\right] - \left[\frac{5}{4}e^{0}\left(0 - \frac{1}{4}\right)\right]$$
$$= \left(\frac{15}{16}e^{4}\right) - \left(-\frac{5}{16}\right)$$
$$= 51.186 + 0.313 = 51.499 = \mathbf{51.5}.$$

مثال 4 : ايجاد : $\int x^2 \sin x \, . dx$:

نفرض : $u = x^2 \, , \frac{du}{dx} = 2x \quad \rightarrow \quad du = 2x \, . dx$

$$dv = \sin x \, . dx \quad \rightarrow \quad v = \int \sin x \, . dx = -\cos x$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$\int x^2 \sin x \, dx = (x^2)(-\cos x) - \int (-\cos x)(2x\,dx)$$

$$= -x^2 \cos x + 2\left[\int x \cos x \, dx\right]$$

من مثال 1 : $\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x$

$$\int x^2 \sin x \, dx$$

$$= -x^2 \cos x + 2\{x \sin x + \cos x\} + c$$

$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + c$$

$$= \mathbf{(2 - x^2)\cos x + 2x \sin x + c}$$

واجب منزلي :

السؤال الأول:

باستخدام التعويض الجبري، احسب:

$$\int \frac{1}{2}(5x-3)^6 \, dx$$

السؤال الثاني:

باستخدام التكامل بالتجزئة، احسب:

$$\int 2 \ln(3x) \, dx$$

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

مقدمة الى الكسور الجزئية :

عن طريق الجمع الجبري :

$$\frac{1}{x-2}+\frac{3}{x+1}=\frac{(x+1)+\ 3(x-2)}{(x-2)(x+1)}=\frac{4x-5}{x^2-x-2}$$

العملية العكسية للتحرك من $\frac{4x-5}{(x-2)(x+1)}$ الى $\frac{3}{x+1}+\frac{1}{x-2}$ تسمى تحليل الكسر الى كسور جزئية .

مثال 1 : حلل $\frac{11-3x}{x^2+2x-3}$ الى كسور جزئية، ثم قم بالتكامل :

* في البداية نحول الى الكسور الجزئية بعد ذلك نجري عملية التكامل

$$\frac{11-3x}{x^2+2x-3}=\frac{11-3x}{(x-1)(x+3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+3}$$

$$=\frac{A(x+3)+B(x-1)}{(x-1)(x+3)}$$

* اذا تساوت المقامات تساوت البسوط :

$$11-3x = A(x+3) + B(x-1)$$

عندما $x=1$

اذن $11-3(1) = A(1+3) + B(1-1)$

$8 = 4A \quad \backslash \quad A = 2$

عندما $x = -3$

اذن $11-3(-3) = A(-3+3) + B(-3-1)$

$20 = -4B \quad \backslash \quad B= -5$

$$\square \quad \frac{11-3x}{x^2+2x-3} = \frac{2}{x-1} + \frac{-5}{x+3}$$

التكامل :

$$\frac{11-3x}{x^2+2x-3} \equiv \frac{2}{(x-1)} - \frac{5}{(x+3)}$$

$$\int \frac{11-3x}{x^2+2x-3}\,dx$$

$$= \int \left\{ \frac{2}{(x-1)} - \frac{5}{(x+3)} \right\} dx$$

$$= 2\ln(x-1) - 5\ln(x+3) + c$$

أو $\ln\left\{\frac{(x-1)^2}{(x+3)^5}\right\} + c$

مثال 2 : حول $\frac{2x^2-9x-35}{(x+1)(x-2)(x+3)}$ الى جمع من ثلاثة كسور جزئية ثم قم بالتكامل :

$$\frac{2x^2-9x-35}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

$$= \frac{A(x-2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x-2)}{(x+1)(x-2)(x+3)}$$

$$2x^2 - 9x - 35 = A(x-2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x-2)$$

عندما $x = -1$

$$\square \quad 2(-1)^2 - 9(-1) - 35 = A(-3)(2) + B(0)(2) + C(0)(-3)$$

$$-24 = -6A \quad \backslash \quad A = \frac{-24}{-6} = 4$$

عندما $x = 2$

 $2(2)^2 - 9(2) - 35 = A(0)(5) + B(3)(5) + C(3)(0)$

$-45 = 15B \quad \backslash \quad B = \frac{-45}{15} = -3$

عندما $x = -3$

 $2(-3)^2 - 9(-3) - 35 = A(-5)(0) + B(-2)(0) + C(-2)(-5)$

$10 = 10C \quad \backslash \quad C = 1$

بالتعويض :

$$\frac{2x^2 - 9x - 35}{(x+1)(x-2)(x+3)} = \frac{4}{x+1} - \frac{3}{x-2} + \frac{1}{x+3}$$

$$\int \frac{2x^2 - 9x - 35}{(x+1)(x-2)(x+3)}\,dx$$

$$\equiv \int \left\{ \frac{4}{(x+1)} - \frac{3}{(x-2)} + \frac{1}{(x+3)} \right\} dx$$

$$= 4\ln(x+1) - 3\ln(x-2) + \ln(x+3) + c$$

$$\text{or} \quad \ln\left\{ \frac{(x+1)^4(x+3)}{(x-2)^3} \right\} + c$$

مثال 3 : حل $\frac{x^2+1}{x^2-3x+2}$ الى كسور جزئية و ثم قم بتكامل :

في هذه الحالة أعلى أس للبسط يساوي أعلى أس في المقام نستخدم القسمة المطولة :

$$\begin{array}{r|l} & 1 \\ \hline X^2-3x+2 & X^2+1 \\ & X^2-3x+2 \quad (-) \\ \hline & 3x-1 \end{array}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2-3x+2} = 1 + \frac{3x-1}{x^2-3x+2}$$

هنا فقط الحد الثاني نحوله الى كسور جزئية :

$$\frac{3x-1}{x^2-3x+2} = \frac{3x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$= \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$

$$3x - 1 = A(x-2) + B(x-1)$$

عندما $x = 1$

$$3(1) - 1 = -A$$

$$2 = -A \quad \backslash \quad A = -2$$

عندما $x = 2$

$$3(2) - 1 = B$$

$$B = 5$$

نعوض عن قيم A و B في :

$$\frac{3x-1}{(x-1)(x-2)} = \frac{-2}{x-1} + \frac{5}{x-2}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2-3x+2} = 1 - \frac{2}{x-1} + \frac{5}{x-2}$$

$$\frac{x^2+1}{x^2-3x+2} \equiv 1 - \frac{2}{(x-1)} + \frac{5}{(x-2)}$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-3x+2}\,dx$$

$$\equiv \int \left\{1 - \frac{2}{(x-1)} + \frac{5}{(x-2)}\right\} dx$$

$$= x - 2\ln(x-1) + 5\ln(x-2) + c$$

أو $x + \ln\left\{\frac{(x-2)^5}{(x-1)^2}\right\} + c$

مثال 4 : حلل $\frac{x^3-2x^2-4x-4}{x^2+x-2}$ الى كسور جزئية و ثم قم بالتكامل :

في هذه الحالة عندما يكون أس البسط أكبر من أعلى أس للمقام نحتاج الى القسمة المطولة:

$$\begin{array}{r|l}
 & x - 3 \\
\hline
x^2 + x - 2 & x^3 - 2x^2 - 4x - 4 \\
 & x^3 + x^2 - 2x \quad (-) \\
\cline{2-2}
 & -3x^2 - 2x - 4 \\
 & -3x^2 - 3x + 6 \quad (-) \\
\cline{2-2}
 & x - 10
\end{array}$$

$$\frac{x^3-2x^2-4x-4}{x^2+x-2} = x-3+\frac{x-10}{x^2+x-2}$$

$$= x-3+\frac{x-10}{(x+2)(x-1)}$$

هنا فقط الحد الثاني نحوله الى كسور جزئية :

$$\frac{x-10}{(x+2)(x-1)} = \frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$

$$= \frac{A(x-1)+B(x+2)}{(x+2)(x-1)}$$

$$X - 10 = A(x-1) + B(x+2)$$

عندما $x = 1$

$$(1) - 10 = A(0) + 3B$$

$$-9 = 3B \quad \backslash \quad B = -3$$

عندما $x = -2$

$$(-2) - 10 = (-3)A + B(0)$$

$$-12 = -3A \quad \backslash \quad A = 4$$

نعوض قيم A و B :

$$\frac{x-10}{(x+2)(x-1)} = \frac{4}{x+2}-\frac{3}{x-1}$$

$$\frac{x^3-2x^2-4x-4}{x^2+x-2} = x-3+\frac{4}{x+2}-\frac{3}{x-1}$$

$$\int \frac{x^3-2x^2-4x-4}{x^2+x-2}\,dx$$

$$\equiv \int \left\{x-3+\frac{4}{(x+2)}-\frac{3}{(x-1)}\right\}dx$$

$$= \frac{x^2}{2}-3x+4\ln(x+2)-3\ln(x-1)$$

$$= \frac{x^2}{2}- 3x + \frac{Ln(x+2)^4}{Ln(x-1)^3}$$

واجب منزلي :

السؤال : حلل $\frac{x-9}{x^3+3x-10}$ الى كسور جزئية و ثم قم بالتكامل .

الطريقة التقريبية لإيجاد المساحة تحت المنحنى :

نفرض أن الدالة $y = f(x)$ مستمرة على الفترة المغلقة [a , b] و للسهولة نفرض أن $f(x)$ غير سالبة لكل x في الفترة [a , b] و ليكن حساب المساحة A للمنطقة R المحدودة بمنحني هذه الدالة و محور السينات و المستقيمين $x = a$ ، $x = b$. تجزأ المنقطة R الى n من المناطق الصغيرة شقق متساوية العرض و عرض كل منها Δx حيث :

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

و ذلك برسم مستقيمات عمودية على محور السينات من نقط التقسيم :

$$X_1 , X_2 , \ldots\ldots X_{n-1}$$

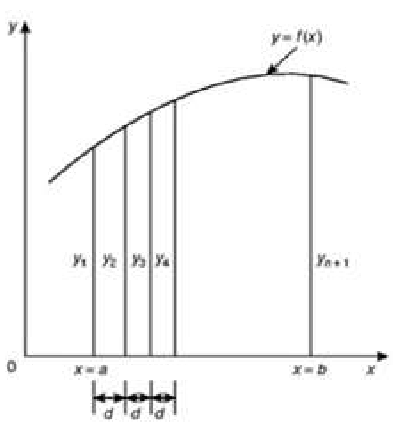
$$X_1 = a + \Delta x$$

$$X_2 = X_1 + \Delta x$$

$$X_{n-1} = x_{n-2} + \Delta x$$

بعد ذلك نرسم مستطيل داخل كل شقة كما في الشكل :

لو أخذنا المستطيل الأول نجد أن ارتفاعه $f(x)$ و طول قاعدته Δx :



مساحة المستطيل الأول $\Delta x. f(a)$

مساحة المستطيل الثاني $\Delta x. f(x_1)$

مساحة المستطيل الثالث $\Delta x. f(x_2)$

مساحة المستطيل الاخير $\Delta x. f(x_{n-1})$

مجموع مساحات المستطيلات يكون أقل من مساحة للمنطقة R و لكن كلما زاد عدد المستطيلات n كلما كان الفرق بين مجموع مساحاتها و المساحة A قليلا بمعنى آخر يمكننا حساب المساحة التقريبية للمنطقة R بشرط كون الدالة مستمرة على $[\,a\,,\,b\,]$ بواسطة المستطيلات الداخلية .

مثال : قسم الفترة $[\,a\,,\,b\,]$ الى $n = 4$ أجزاء متساوية الطول ثم احسب مجموع مساحات المستطيلات المحصورة :

-1 $\quad b = 1\,,\, a = 0 \quad F(x) = x^2$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{4} = \frac{1}{4}$$

$$a = 0$$

$$x_1 = a + \Delta x = 0 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$X_2 = x_1 + \Delta x = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4}$$

$$X_3 = x_2 + \Delta x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$F(a) = (0)^2 + 1 = 1$$

$$F(x_1) = (\frac{1}{4})^2 + 1 = \frac{1}{16} + 1 = \frac{17}{16}$$

$$F(x_2) = (\frac{1}{2})^2 + 1 = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

$$F(x_3) = (\frac{3}{4})^2 + 1 = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16}$$

$$F(a).\ \Delta x = 1\ .\ \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$F(x_1).\ \Delta x = \frac{17}{16}\ .\ \frac{1}{4} = \frac{17}{64}$$

$$F(x_2).\ \Delta x = \frac{5}{4}\ .\ \frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

$$F(x_3).\ \Delta x = \frac{25}{16}\ .\ \frac{1}{4} = \frac{25}{64}$$

المساحة الكلية : $\frac{1}{4} + \frac{17}{64} + \frac{5}{16} + \frac{25}{64} = \frac{48}{64}$

$y = \cos x \qquad a = -\frac{\pi}{2} \quad , \quad b = \frac{\pi}{2} \qquad$ -2

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$a = \frac{\pi}{2}$$

$$x_1 = a + \Delta x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4}$$

$$X_2 = x_1 + \Delta x = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 0$$

$$X_3 = x_2 + \Delta x = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$F(a) = \cos(-\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$F(x_1) = \cos(-\frac{\pi}{4}) = 0.707$$

$$F(x_2) = \cos(0) = 1$$

$$F(x_3) = \cos(\frac{\pi}{4}) = 0.707$$

$$F(a).\ \Delta x = 0\ .\ \frac{\pi}{4} = 0$$

$$F(x_1).\ \Delta x = 0.707\ .\ \frac{\pi}{4}$$

$$F(x_2).\ \Delta x = 1\ .\ \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$$F(x_3).\ \Delta x = 0.707\ .\ \frac{\pi}{4}$$

المساحة الكلية : $0.707.\frac{\pi}{4} + 1.\frac{\pi}{4} + 0.707\ .\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\ .2.414$

-3 $\quad y = \frac{1}{x} \qquad a = 1 \quad , \quad b = 9$

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{9-1}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$a = 1$$

$$x_1 = a + \Delta x = 1 + 2 = 3$$

$$X_2 = x_1 + \Delta x = 3 + 2 = 5$$

$$X_3 = x_2 + \Delta x = 5 + 2 = 7$$

$$F(a) = 1$$

$$F(x_1) = \frac{1}{3}$$

$$F(x_2) = \frac{1}{5}$$

$$F(x_3) = \frac{1}{7}$$

$$F(a).\ \Delta x = 1\ .\ 2 = 2$$

$$F(x_1).\ \Delta x = \frac{1}{3}\ .\ 2 = \frac{2}{3}$$

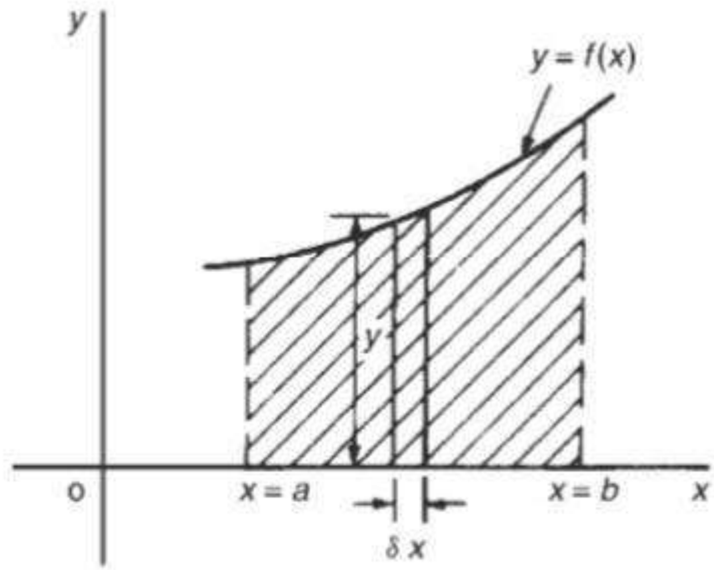
$$F(x_2).\ \Delta x = \frac{1}{5}\ .\ 2 = \frac{2}{5}$$

$$F(x_3).\ \Delta x = \frac{1}{7}\ .\ 2 = \frac{2}{7}$$

المساحة الكلية : $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} = \frac{210+70+42+30}{105} = \frac{352}{105} = 3.35$

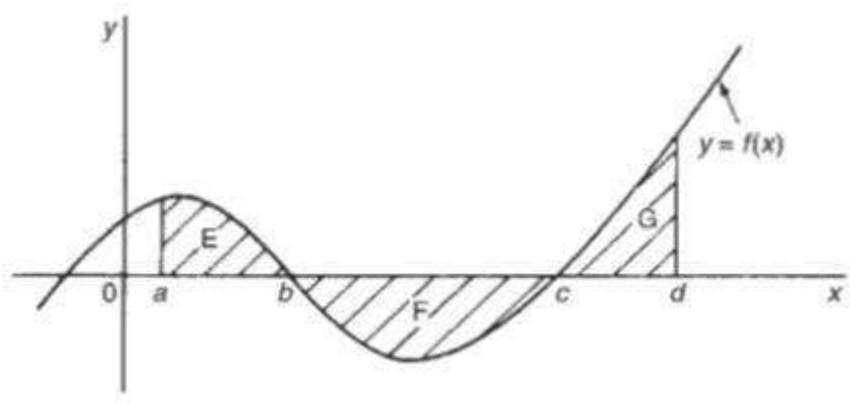
المساحة بواسطة حسابات التفاضل و التكامل :

$$A = \int_{a}^{b} y \, . dx$$



من المنحنى في الشكل نجد أن مجموع المساحة المظللة معطى ب

(منطقة A + منطقة F + منطقة G)



بالتكامل، مجموع مساحة المنطقة المظللة :

$$A = \int_{a}^{b} f(x)\,dx - \int_{b}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{d} f(x)\,dx$$

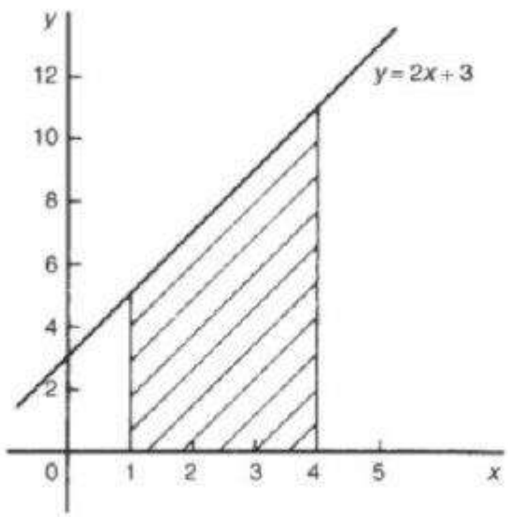
العلامة (-) في التكامل للمنطقة (F) تدل على أنها في منطقة السالبة x – axis

مسألة 1 : قيم المساحة المظللة بالدالة $y = 2x + 3$ و المحور السيني و الخطين العموديين

: $x = 1$ و $x = 4$

X	1	2	3	4
2x	2	4	6	8
3	3	3	3	3
y	5	7	9	11

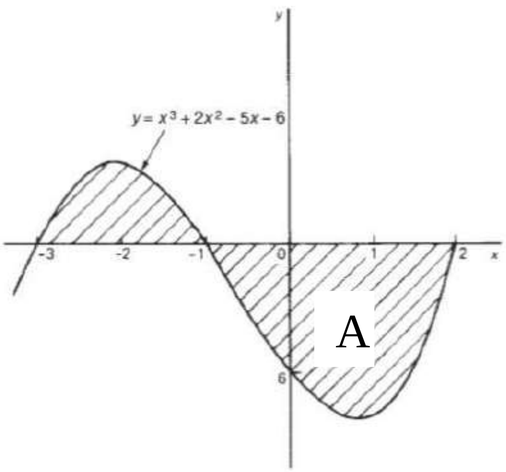
تكامل المساحة المظللة :



$$A = \int_1^4 y\,dx$$
$$= \int_1^4 (2x+3)\,dx$$
$$= \left[\frac{2x^2}{2} + 3x\right]_1^4$$
$$= [(16+12) - (1+3)]$$
$$= 24$$

مسألة 2 : ارسم مخطط $y = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ بين $x = -3$ و $x = 2$ و قيم المنطقة المظللة بين المنحنى و المحور السيني :

X	-3	-2	-1	0	1	2
X^3	-27	-8	-1	0	1	8
$2x^2$	18	8	2	0	2	8
-5x	15	10	5	0	-5	-10
-6	-6	-6	-6	-6	-6	-6
y	0	4	0	-6	-8	0



المنطقة المظللة :

ملاحظة : اشارة (-) قبل تكامل الثاني مهمة لأن المنطقة المضللة تحت محور السينات .

$$= \int_{-3}^{-1} (x^3 + 2x^2 - 5x - 6)\,dx - \int_{-1}^{2} (x^3 + 2x^2 - 5x - 6)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 6x\right]_{-3}^{-1} - \left[\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - 6x\right]_{-1}^{2}$$

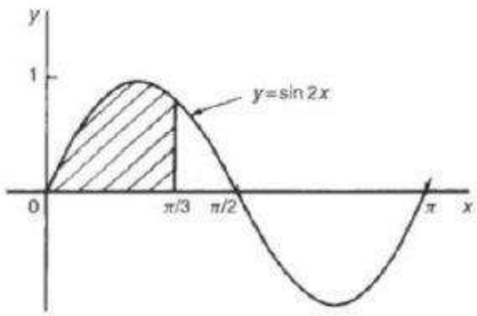
$$= \left[\left\{\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 6\right\} - \left\{\frac{81}{4} - 18 - \frac{45}{2} + 18\right\}\right] - \left[\left\{4 + \frac{16}{3} - 10 - 12\right\} - \left\{\frac{1}{4} - \frac{2}{3} - \frac{5}{2} + 6\right\}\right]$$

$$= \left[\left\{3\tfrac{1}{12}\right\} - \left\{-2\tfrac{1}{4}\right\}\right] - \left[\left\{-12\tfrac{2}{3}\right\} - \left\{3\tfrac{1}{12}\right\}\right]$$

$$= \left[5\tfrac{1}{3}\right] - \left[-15\tfrac{3}{4}\right]$$

$$= 21\frac{1}{12} \text{ or } 21.08$$

مسألة 3 : جد مساحة المنطقة المظللة لمنحنى الدالة $y = \sin 2x$ و المحور السيني و الخطين العموديين $x = 0$ و $x = \frac{\pi}{3}$:



$$\text{مساحة مظللة} = \int_0^{\pi/3} y\,dx$$
$$= \int_0^{\pi/3} \sin 2x\,dx$$
$$= \left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi/3}$$
$$= \left\{-\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi}{3}\right\} - \left\{-\frac{1}{2}\cos 0\right\}$$
$$= \left\{-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} - \left\{-\frac{1}{2}(1)\right\}$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

مسألة 4 : جد المساحة المحصورة بين المنحنى المعطى و المحور الأفقي (المحور السيني) و الخطين العموديين المعطاة :

$\Theta = t + e^t$, حيث $t = 0$، و$t = 2$.

$$A = \int_0^2 \Theta\,dt = \int_0^2 (t + e^t)\,dt$$
$$= \left[\frac{t^2}{2} + e^t\right]_0^2$$
$$= \left\{\frac{2^2}{2} + e^2\right\} - \left\{\frac{0^2}{2} + e^0\right\}$$
$$= \{2 + 7.39\} - 1 = 8.39$$

مسألة 5 : جد المساحة المحصورة بين المحنى المعطى و محور السينات للدالة $y = 4 - x^2$:

ملاحظة : في هذه المسألة ستقوم باستخراج حدود التكامل من خلال المعادلة المعطاة ومن ثم نعوض بالمعادلة لرسم الشكل الدالة المراد حساب مساحتها بينها و بين محور x .

$$4 - x^2 = 0$$
$$x = 4$$
$$x = \pm 2$$

X	-2	0	2
y	0	4	0

المساحة المحصورة:

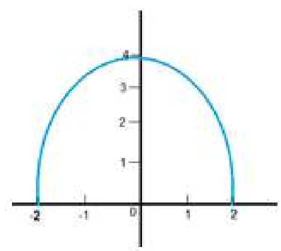
$$A = \int_{-2}^{2} (4 - x^2)\, dx$$

$$= \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[(4(2) - \frac{2^3}{3})\right] - \left[(4(-2) - \frac{(-2)^3}{3})\right]$$

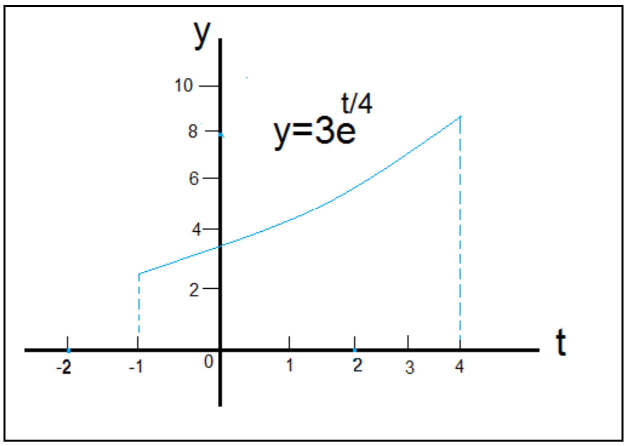
$$= \left(8 - \frac{8}{3}\right) - \left(-8 + \frac{-8}{3}\right)$$

$$= \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$



مسألة 6 : قيم المساحة المحصورة للمنحني لدالة $y = 3e^{\frac{t}{4}}$ و المحور x و الخطين العمودين : t = 4 و t = 1

t	-1	0	1	2	3	4
$y = 3e^{t/4}$	2.34	3.0	3.85	4.95	6.35	8.15



$$A = \int_1^4 y\,dt$$
$$= \int_1^4 3e^{t/4}\,dt = \left[\frac{3}{\left(\frac{1}{4}\right)}e^{t/4}\right]_{-1}^{4}$$
$$= 12[e^{t/4}]_{-1}^{4} = 12(e^1 - e^{-1/4})$$
$$= 12(2.7183 - 0.7788)$$
$$= 12(1.9395) = 23.27$$

مسألة 7 : جد مساحة المحصورة بين المنحنى المعطى لدالة xy = 4 و المحور الأفقي (المحور السني) و الخطين العموديين x = 1 و x = 4 :

ملاحظة : من الممكن تعطى الحدود بدلالة y عندئذ نعوضها بالمعادلة و نجد الحدود بدلالة x و نغير حدود التكامل .

$$y = \frac{4}{x}$$

$$A = \int_1^4 y.dx = \int_1^4 \frac{4}{x}.dx = [4\,Ln\,x]_1^4$$

$$= [\,4\,\text{Ln}\,4 - 4\,\text{Ln}\,1\,]$$

$$= 5.54 - 0 = 5.54$$

مسألة 8 : قيم مساحة المحصورة بين المنحنى لدالة $y = x^3 - 2x^2 - 8x$ و المحور x :

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y = x^3 - 2x^2 - 8x$	0	5	0	-9	-16		0

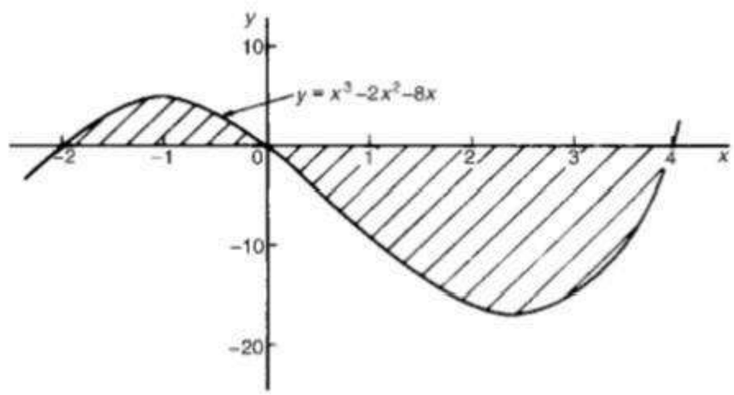
$= x (x^2 - 2x - 8)$

$= x (x + 2) (x - 4)$

□ $x = 0$

$x = -2$

$x = 4$



$$\text{مساحة المظللة} = \int_{-2}^{0} (x^3 - 2x^2 - 8x)\,dx$$

$$- \int_{0}^{4} (x^3 - 2x^2 - 8x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{8x^2}{2}\right]_{-2}^{0}$$

$$- \left[\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} - \frac{8x^2}{2}\right]_{0}^{4}$$

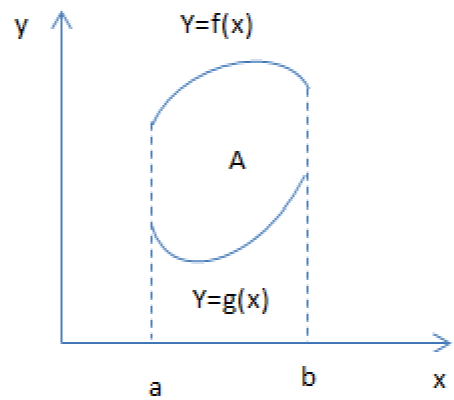
$$= \left(6\frac{2}{3}\right) - \left(-42\frac{2}{3}\right)$$

$$= \mathbf{49\frac{1}{3}}$$

المساحة بين منحنيين

المنطقة بين $y = f(x)$ و $y = g(x)$

$F(x) \geq g(x)$ لـ $a \leq x \leq b$



صيغة المساحة :

$$A = \int_a^b [\, f(x) - g(x)].dx$$

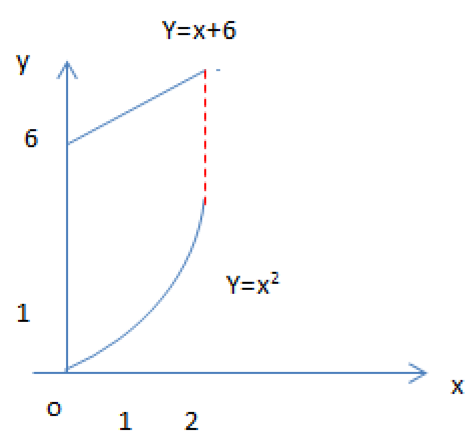
المثال 1 : أوجد مساحة المنطقة المحصورة أعلاه بالخط $y = x + 6$ و المحصورة أسفلها بالخط $y = x^2$ و المحصورة من الجانبين بالخطين $x = 0$ و $x = 2$.

$$A = \int_0^2 [\, f(x) - g(x)].dx$$

$$= \int_0^2 [\,(x+6) - x^2].dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= \frac{34}{3} - 0 = \frac{34}{3}$$



مثال 2 : قم برسم المنحنيين وإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = x + 6$

المعادلة:

$y = x^2$ و $y = x + 6$

نجد نقاط التقاطع بحل المعادلة:

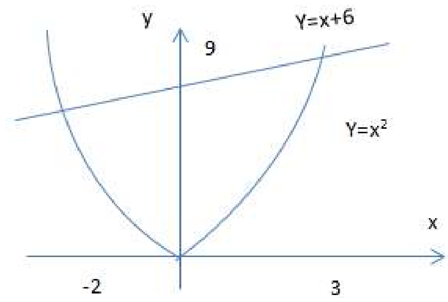
$x^2 = x + 6$

$x^2 - x - 6 = 0$

$(x + 2)(x - 3) = 0$

نقاط التقاطع:

$x = -2$ و $x = 3$.



$$A = \int_{-2}^{3} [(x + 6) - x^2] \, . dx$$

$$A = \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{3}$$

$$= \frac{27}{2} - 1 - \frac{22}{3} = \frac{125}{6}$$

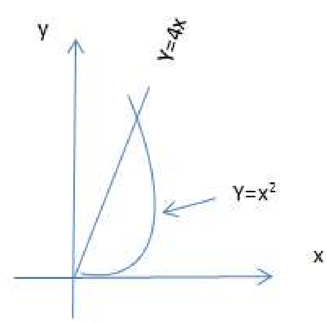
مثال 3 : أوجد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $y = x^2$ و $y = 4x$:

$x^2 = 4x$

$x^2 - 4 = 0$

$x (x - 4) = 0$

$x = 0$ أو $x = 4$

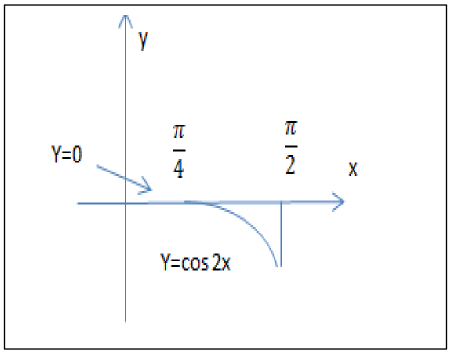


$$A = \int_a^b [\, f(x) - g(x)]. dx$$

$$A = \int_0^4 (4x - x^2). dx = \left[\frac{4x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^4$$

$$= 32 - \frac{64}{3} = \frac{96 - 64}{3} = \frac{32}{3}$$

مثال 4 : قم برسم وإيجاد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y = \cos 2x$, $y = 0$ حيث أن $x = \frac{\pi}{2}$ ، $x = \frac{\pi}{4}$:



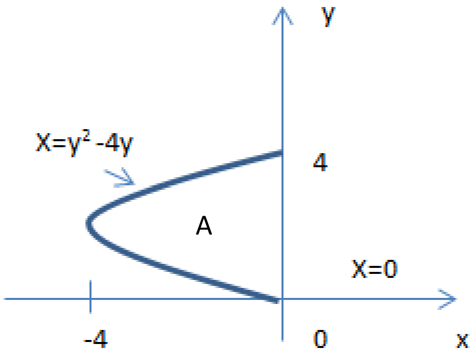
$$A = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (0 - \cos 2x).dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\left[\frac{1}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= -\left[0 - \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}$$

المثال 5 : قم برسم و ايجاد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنيين $x = y^2 - 4y$ و حيث أن $y = 0$ و $y = 4$:



$$A = \int_0^4 [(0) - (y^2 - 4y)].dx$$

$$A = \left[-\frac{y^3}{3} + 4\frac{y^2}{2}\right]_0^4$$

$$A = \left[-\frac{y^3}{3} + 2y^2\right]_0^4 = -\frac{(4)^3}{3} + 2(4)^2 - 0$$

$$= -\frac{64}{3} + 32 = \frac{-64 + 96}{3} = \frac{32}{3}$$

حجم الجسم الدوراني

الحجم بواسطة المقطع العرضي المتعامد مع محور x :

إذا كان الجسم الصلب محصورًا بين مستويين متوازيين عموديين على محور x عند x=a و x=b، فإن الحجم V يعطى بالصيغة :

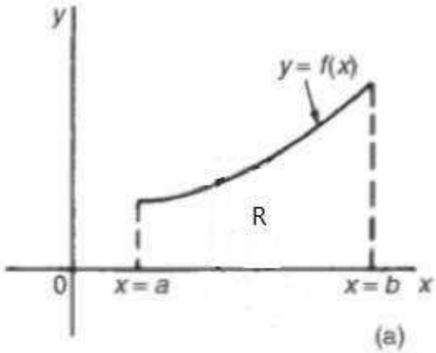
$$V = \int_a^b A(x)\,dx$$

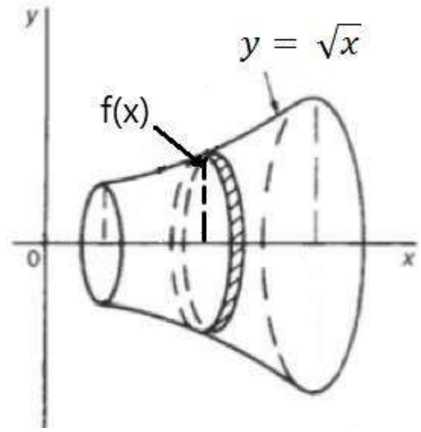
حيث A(x) هي مساحة المقطع العرضي العمودي على المحور x . يوجد نتيجة مشابهة بالنسبة للمقاطع العرضية العمودية على المحور y :

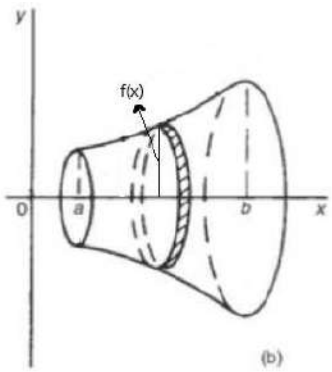
$$V = \int_c^d A(y)\,dy$$

حجم الجسم الناتج عن الدوران ليكن f دالة موجبة ومستمرّة على[a, b] ، والجزء المحصور بين المنحنى والدالة f(x) ، والمحورx ، والخطين العموديين x=a وx=b، عندما يتم تدوير هذه المنطقة حول المحورx ، فإنها تولد جسمًا صلبًا كما هو موضح في الشكل. بما أن مساحة المقطع العرضي (الذي نصف قطره هو f(x)) هي$\pi[f(x)]^2$ ، فإن حجم الجسم يعطى بـ :

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$$







مثال1: احسب حجم الجسم الصلب الناتج عن تدوير المنطقة المحصورة تحت المنحنى $y = \sqrt{x}$ على الفترة [1 ،4] حول المحور x :

$$v = \int_a^b \pi[f(x)]^2 . dx$$

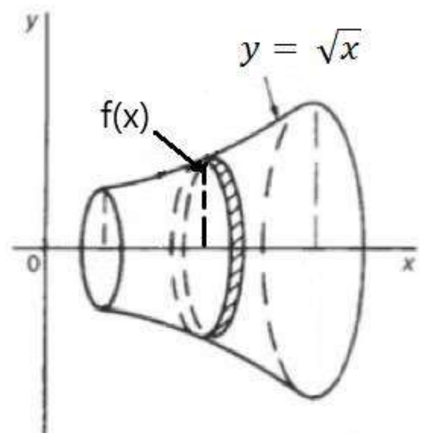
$$= \int_1^4 \pi x . dx = \left[\pi \frac{x^2}{2}\right]_1^4$$

$$= 8\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{15\pi}{2}$$

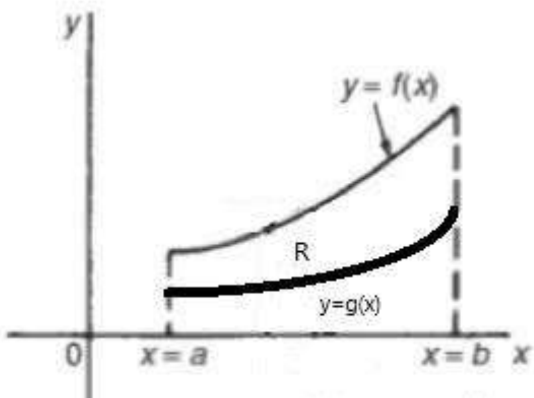
افترض أن f و g دالتان موجبتان ومستمرتان بحيث :

$$g(x) \leq f(x) \ , \ \ a \ \leq x \ \leq b$$

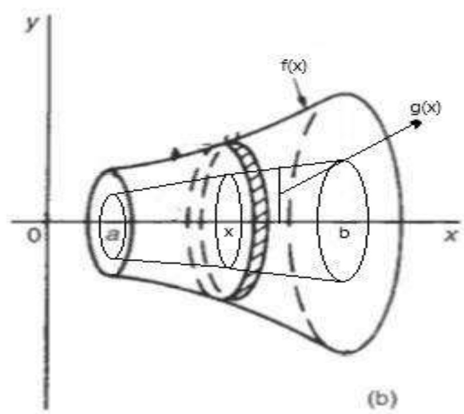
ليكن R المنطقة المحصورة بين منحنيات الدالتين والخطين العموديين x=a و x=b عندما يتم تدوير هذه المنطقة حول المحور x ، يتم توليد جسم صلب ذي مقاطع عرضية دائرية حلقية الشكل. بما أن مساحة المقطع العرضي عند x لها نصف قطر داخلي g(x) ونصف قطر خارجي f(x) ، فإن الحجم يعطى بـ :



$$v = \int_a^b \pi[f(x)^2 - g(x)^2].\,dx$$



(a)

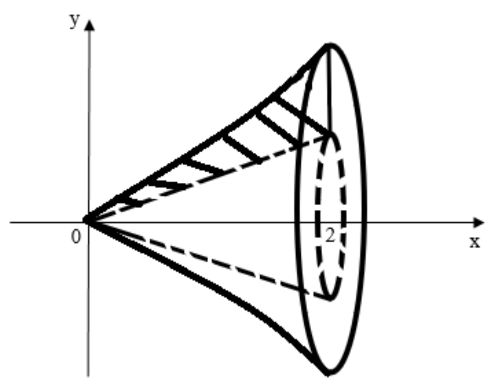


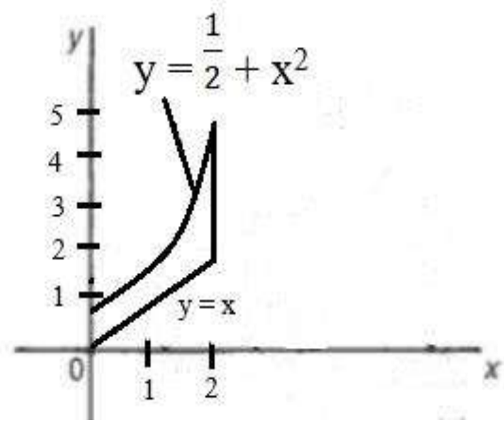
(b)

طريقة الحلقات : حساب الأحجام بواسطة المقاطع العرضية المتعامدة مع المحور x .

مثال 2 : احسب حجم جسم الناتج عندما يتم تدوير المنطقة المحصورة بين منحنى $f(x) = \frac{1}{2} + x^2$ و $g(x) = x$ على الفترة $[\,0\,,\,2\,]$ حول المحور x :

X	0	1	2
$\frac{1}{2} + x^2$	$\frac{1}{2}$	1.5	4.5
x	0	1	2





$$v = \int_a^b \pi[f(x)^2 - g(x)^2].dx$$

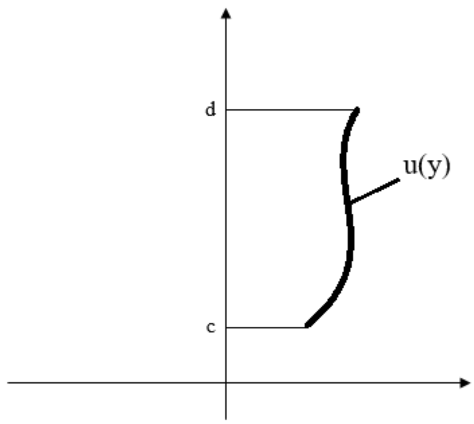
$$v = \int_0^2 \pi\left[\left(\frac{1}{2} + x^2\right)^2 - x^2\right].dx$$

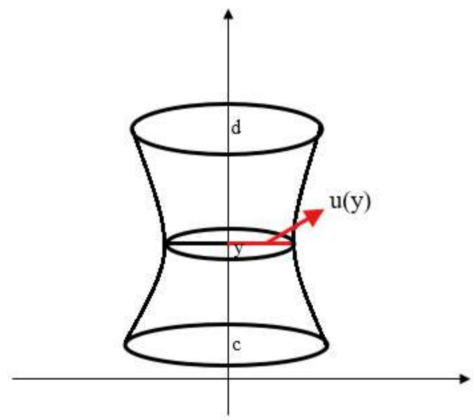
$$= \int_0^2 \pi\left(\frac{1}{4} + x^2 + x^4 - x^2\right).dx$$

$$= \int_0^2 \pi\left(\frac{1}{4} + x^4\right).dx \;= \pi\left[\frac{x}{4} + \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \pi\frac{69}{10}$$

الأحجام باستخدام طريقة الأقراص العمودية على المحور y :

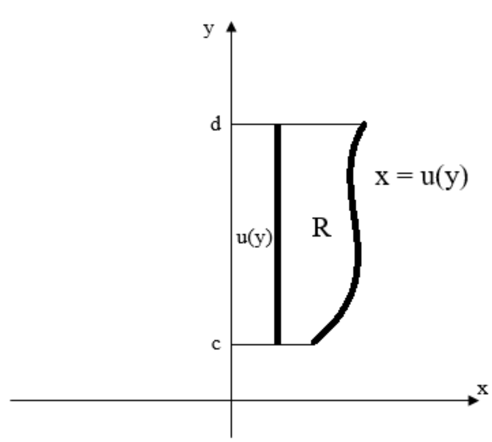
$$v=\int_c^d \pi[u(y)]^2.dy=\int_c^d \pi x^2.dy$$

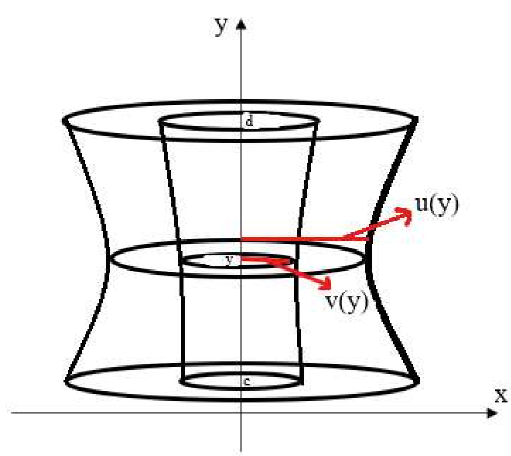




الأحجام باستخدام طريقة الحلقات العمودية على المحور y :

$$V=\int_c^d \pi\left([u(y)]^2-[v(y)]^2\right)\,dy$$





مثال 3 : احسب حجم الجسم الناتج عن تدوير المنطقة المحصورة بين $y = \sqrt{x}$ ، y =0 ، y = 2 حول المحور y :

ملاحظة :

عند الدوران حول محور x : $v = \int_c^d y^2 . dx$

عند الدوران حول محور y : $v = \int_c^d x^2 . dy$

$$y = \sqrt{x} \rightarrow y^2 = x$$

$$v = \int_c^d \pi [u(y)]^2 . dy = \int_0^2 \pi y^4 . dy$$

$$= \left[\frac{\pi y^5}{5}\right]_0^2 = \frac{32\pi}{5}$$

مثال 4 : اذا تم تدوير المنحنى $y = x^2+4$ حول المحور y بين نفس الحدود $x=1$ ، $x=4$ ، احسب حجم الجسم الناتج عن الدوران :

عندما $x=1 \leftarrow y=5$ \ عندما $x=4 \leftarrow y=20$

ملاحظة : عند الدوران حول محور y : $v = \int_c^d \pi [u(y)]^2 . dy = \int_c^d \pi x^2 . dy$

$$v = \int_5^{20} \pi x^2 . dy$$

$$Y = x^2 + 4 \rightarrow x^2 = y - 4$$

$$v = \int_5^{20} \pi (y - 4) . dy = \int_5^{20} \pi \left[\frac{y^2}{2} - 4y\right] . dy$$

$$= \pi [120 - (-7.5)] = 127.5\pi$$

مثال 5 : احسب حجم الجسم الناتج عن الدوران الذي يتشكل عند تدوير المنطقة المحصورة بين المنحنى المعطى والمحور x ، وبين الإحداثيات المعطاة من خلال التدوير حول المحور x .

المعادلة : xy = 3 \ عندما x = 2 و x = 3 أيضًا، $y = \frac{3}{x}$

ملاحظة : $v = \int_a^b \pi[f(x)]^2 . dx = \int_a^b \pi y^2 . dx$

$$v = \int_2^3 \pi y^2 . dx = \int_2^3 \pi \left(\frac{3}{x}\right)^2 . dx$$

$$\int_2^3 \pi \frac{9}{x^2} . dx = \int_2^3 9\pi x^{-2} . dx = 9\pi \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_2^3 = 9\pi \left[-\frac{1}{x}\right]_2^3$$

$$= 9\pi \left[-\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 9\pi[1.666] = 1.5\pi$$

مثال 6 : احسب حجم الجسم الناتج عن الدوران الذي يتشكل عند تدوير المنطقة المحصورة بين المنحنيات المعطاة، والمحور y ، وبين الإحداثيات المعطاة من خلال الدوران حول المحور y .

$$y = \frac{2}{x} \quad , \quad y = 1 \quad , \quad y = 3$$

ملاحظة : $v = \int_c^d \pi[u(y)]^2 . dy = \int_c^d \pi x^2 . dy$

$$y = \int_1^3 \pi x^2 . dy = \int_1^3 \pi \left(\frac{2}{y}\right)^2 . dy = \pi \int_1^3 \frac{4}{y^2} . dy$$

$$= \pi \int_1^3 4y^{-2} . dy = 4\pi \left[\frac{y^{-1}}{-1}\right]_1^3 = 4\pi \left[-\frac{1}{y}\right]_1^3$$

$$= 4\pi\left[-\frac{1}{3}-(-1)\right] = 4\pi\left[-\frac{1}{3}+1\right] = 2.67\pi$$

مثال 7 : يتم تدوير المنحنى $y = 2x^2+3$ حول :

1- المحور x بين الحدود $x = 0$ و $x = 3$.

2- المحور y بين نفس الحدود .

احسب الحجم الناتج في كل حالة :

1- الدوران حول المحور x :

$$y = 2x^2+3 \quad \backslash \quad x = 0 \quad , \quad x = 3$$

$$v = \int_0^3 \pi y^2 .dx = \int_0^3 \pi(2x^2+3)^2 .dx$$

$$= \int_0^3 \pi(4x^4+12x^2+9).dx = \pi\left[\frac{4x^5}{5}+\frac{12x^3}{3}+9x\right]_0^3$$

$$= \pi\left[\frac{4(3)^5}{5}+4(3)^3+9(3)-0\right] = \pi[194.4+108+27] = 329.4\pi$$

2- الدوران حول المحور y :

$$y = 2x^2+3 \rightarrow 2x^2 = y-3 \rightarrow x^2 = \frac{1}{2}(y-3)$$

$$x = 0 \rightarrow y = 3 \quad \backslash \quad x = 3 \rightarrow y = 21$$

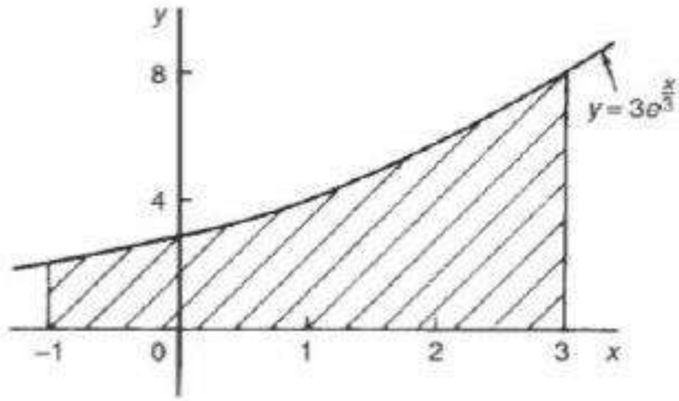
$$\square\ v = \int_3^{21} \pi x^2 .dy = \int_3^{21} \pi \frac{1}{2}(y-3).dy$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_3^{21}(y-3).dy = \frac{\pi}{2}\left[\frac{y^2}{2}-3y\right]_3^{21}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{(21)^2}{2} - 3(21) - \left(\frac{3^2}{2} - 3(3)\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2}[(220.5 - 63) - (4.5 - 9)] = \frac{\pi}{2}[157.5 + 4.5] = 81\pi$$

مثال 8 : المساحة المحصورة بين المنحنى $y = 3e^{\frac{x}{3}}$ ، المحور ، و الاحداثيات x=0 ، $x = 3$ يتم تدويرها 360° حول المحور x ، احسب الحجم الناتج :



$$\mathbf{V} = \int_{-1}^{3} \pi y^2\, dx$$

$$= \int_{-1}^{3} \pi \left(3e^{\frac{x}{3}}\right)^2 dx$$

$$= 9\pi \int_{-1}^{3} e^{\frac{2x}{3}}\, dx$$

$$= 9\pi \left[\frac{e^{\frac{2x}{3}}}{\frac{2}{3}} \right]_{-1}^{3}$$

$$= \frac{27\pi}{2} \left(e^{2} - e^{-\frac{2}{3}} \right)$$

$$= 92.82\pi$$

مثال 9 : المساحة المحصورة بين المنحنين $y = x^2$ و $y^2 = 8x$ يتم تدويرها 360° حول المحور x ، احسب حجم الجسم الناتج :

ملاحظة : لحساب الحجم الناتج عن الدوران حول المحور x نستخدم طريقة الحلقات:

$$v = \int_{a}^{b} \pi[f(x)^2 - g(x)^2].\,dx$$

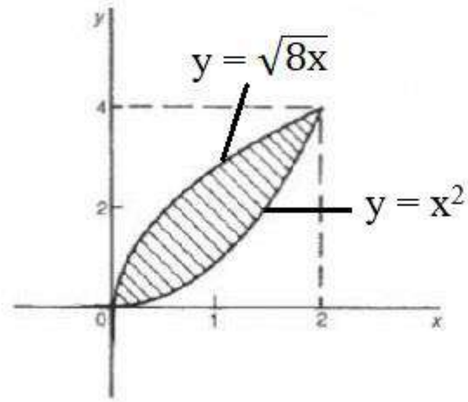
x	0	1	2
$y = x^2$	0	1	4
$y=\sqrt{8x}$	0	$\sqrt{8} = 2.82$	$\sqrt{16} = 4$

$y^2 = 8x$
$y = x^2$
$x^4 = 8x$
$x^4 - 8x = 0$
$x (x^3 - 8) = 0$
$x = 0$
$x^3 = 8 \rightarrow x = 2$

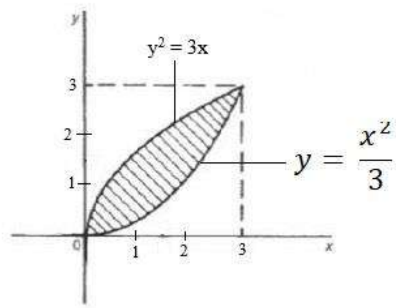
$$v = \int_a^b \pi[f(x)^2 - g(x)^2].dx$$

$$v = \int_0^2 \pi[8x - x^4].dx = \pi\int_0^2 (8x - 4^4).dx$$

$$= \pi\left[\frac{8x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \pi\left[\left(16 - \frac{32}{5}\right) - 0\right] = 9.6\pi$$



مثال 10 : المساحة المحصورة بين المنحنين $x^2 = 3y$ و $y^2 = 3x$ يتم تدويرها حول المحور x ، احسب حجم الجسم الناتج :



$y^2 = 3x$

$x^2 = 3y \rightarrow y = \frac{x^2}{3}$

$\left(\frac{x^2}{3}\right)^2 = 3x$

$\frac{x^4}{9} = 3x \rightarrow \frac{x^4}{9} - 3x = 0$

$x\left(\frac{1}{9}x^3 - 3\right) = 0$

X= 0

$\frac{1}{9}x^3 - 3 = 0$ أو

$\frac{1}{9}x^3 = 3$

$x^3 = 27 \rightarrow x = 3$

X	0	1	2	3
$\sqrt{3}$	0	1.73	4	3
$\frac{x^2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	3

□ الاحداثيات : x = 0 , x =3

$$v = \int_a^b \pi[f(x)^2 - g(x)^2].dx$$

$$= \int_0^3 \pi \left[3x - \frac{x^4}{9}\right].dx = \pi \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^5}{45}\right]_0^3$$

$$= \pi \left[\left(\frac{3(3)^2}{2} - \frac{(3)^5}{45}\right) - 0\right] = 13.5 - 5.4 = 8.1\pi$$

مثال 11 : احسب حجم الجسم الناتج عن تدوير المساحة المحصورة بين المنحنى $y = 4e^x$ ، حول المحور x :

1- الاحداثيات : $y = 4e^x \setminus x = 0 , x = 2$

$$v = \int_a^b \pi f(x)^2.dx = \int_0^2 \pi y^2.dx = \int_0^2 \pi (4e^x)^2.dx$$

$$= 16\pi \int_0^2 e^{2x}.dx = 16\pi \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^2 = 8\pi\left[e^{2(2)} - e^{2(0)}\right]$$

$$= 8\pi\,[54.598 - 1] = 428.8\pi$$

2- الاحداثيات : $y = \sec x \quad \setminus \quad x = 0 , x = \frac{\pi}{4}$

$$v = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi f(x)^2.dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi y^2.dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \pi\, sec^2x.dx$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2x.dx = \pi[\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = \pi\left[\tan\frac{\pi}{4} - \tan 0\right]$$

$$= \pi[1 - 0] = \pi$$

مثال 12 : احسب حجم الجسم الناتج عن تدوير المساحات المحصورة بين المنحنيات المعطاة ، حول المحور y :

$$x\sqrt{y} = 2 \quad , \quad y = 2 \quad , \quad y = 3$$

$$x = \frac{2}{\sqrt{y}} \quad \rightarrow \quad x^2 = \frac{4}{y}$$

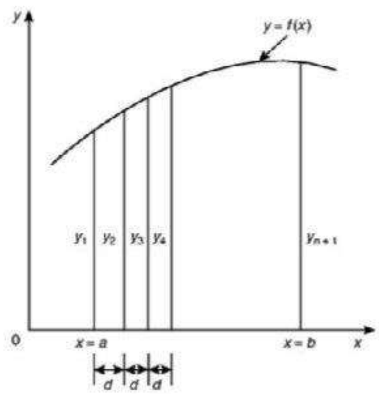
$$v = \int_c^d \pi u(y)^2 . dx = \int_2^3 \pi x^2 . dy = \pi \int_2^3 \frac{4}{y} . dy$$

$$\pi \int_2^3 \frac{4}{y} . dy = \pi [4 \, Ln \, y]_2^3 = 4\pi [Ln \, 3 - Ln \, 2] = 4\pi [1.0986 - 0.693] = 1.622\pi$$

التكامل العددي

قاعدة شبه المنحرف

لنفرض أن التكامل المحدد المطلوب يُرمز بـ $\int_a^b y\,dx$ ويمثل المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ بين الحدين $x = a$ و $x = b$ ، كما هو موضح في الشكل.



نفترض أن مجال التكامل مقسّم إلى n فترات متساوية، كل واحدة بعرض d، بحيث: $nd = b - a$ أي أن :

$$\Delta x(d) = \frac{b-a}{n}$$

تنص قاعدة شبه المنحرف على:

$$\int_a^b y.dx = I \cong \Delta x\left\{\frac{1}{2}(y_0 + y_n) + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right\}$$

مثال 1 : قرّب التكامل التالي باستخدام قاعدة شبه المنحرف مع 4 فترات :

$$\int_1^3 \frac{2}{\sqrt{x}}.dx \qquad n = 4$$

$$d \text{ أو } \Delta x = \frac{b-a}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} = 0.5$$

x	$\frac{2}{\sqrt{x}}$
1.0	2.0000
1.5	1.6330
2.0	1.4142
2.5	1.2649
3.0	1.1547

$$\int_1^3 \frac{2}{\sqrt{x}}\,dx \approx (0.5)\left\{\frac{1}{2}(2.0000 + 1.1547) + 1.6330 + 1.4142 + 1.2649\right\}$$

$$= 2.945$$

مثال 2 : قرّب التكامل $\int_1^3 \frac{2}{\sqrt{x}}.dx$ الى ثلاثة باستخدام قاعدة شبه المنحرف مع 8 فترات:

$$d = \frac{3-1}{8} = \frac{2}{8} = 0.25 \qquad n = 8$$

x	$\frac{2}{\sqrt{x}}$
1.00	2.0000
1.25	1.7889
1.50	1.6330
1.75	1.5119
2.00	1.4142
2.25	1.3333
2.50	1.2649
2.75	1.2060
3.00	1.1547

$$\int_1^3 \frac{2}{\sqrt{x}}dx \approx (0.25)\left\{\frac{1}{2}(2.000 + 1.1547) + 1.7889 + 1.6330 + 1.5119 + 1.4142 + 1.3333 + 1.2649 + 1.2060\right\}$$

$$= \mathbf{2.932}$$

مثال 3 : قرّب التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}.dx$ الى أربعة باستخدام قاعدة شبه المنحرف مع 6 فترات:

$$\Delta x(d) = \frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2}-0}{6} = \frac{\pi}{12}$$

x	$\frac{1}{1+\sin x}$
0	1.0000
$\frac{\pi}{12}$ (or 15°)	0.79440
$\frac{\pi}{6}$ (or 30°)	0.66667
$\frac{\pi}{4}$ (or 45°)	0.58579
$\frac{\pi}{3}$ (or 60°)	0.53590
$\frac{5\pi}{12}$ (or 75°)	0.50867
$\frac{\pi}{2}$ (or 90°)	0.50000

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin x}\,dx \approx \left(\frac{\pi}{12}\right)\left\{\frac{1}{2}(1.00000 + 0.50000) + 0.79440 + 0.66667 + 0.58579 + 0.53590 + 0.50867\right\}$$
$$= \mathbf{1.0051}$$

مثال 4 : قرّب التكاملات التالية باستخدام قاعدة شبه المنحرف مع 8 فترات :

1- $n = 8$ $\quad \int_0^1 \frac{2}{1+x^2}.dx$:

$$\Delta x(d) = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{8} = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$\int_0^1 \frac{2}{1+x^2}.dx \cong (0.125)\left\{\frac{1}{2}(2.0000 + 1.0000) + 1.9692 + 1.8823 + 1.7534 + 1.6 + 1.4382 + 1.28 + 1.1327\right\} = 1.569$$

X	$\frac{2}{1+x^2}$
0	2.0000
0.125	1.9692
0.25	1.8823
0.375	1.7534
0.5	1.6
0.625	1.4382
0.75	1.28
0.875	1.1327
1	1.0000

$: \int_1^3 2Ln\, 3x\, .dx \qquad n = 8 \quad$ -2

$$\Delta x(d) = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{8} = \frac{2}{8} = 0.25$$

$$\int_1^3 2Ln\, 3x.\, dx$$

$$\cong (0.25)\left\{\frac{1}{2}(2.19722 + 4.39445) + 2.64351 + 3.00815\right.$$

$$\left. + 3.31646 + 3.58352 + 3.81908 + 4.029881 + 4.22043\right\}$$

$$= 6.979$$

X	2 Ln 3x
1	2.19722
1.25	2.64351
1.5	3.00815
1.75	3.31646
2	3.58352
2.25	3.81908
2.5	4.029881
2.75	4.22043
3	4.39445

$$\int_0^{1.4} e^{-x^2}\,.dx \qquad n=7 \qquad \text{-3}$$

$$\Delta x(d) = \frac{b-a}{n} = \frac{1.4-0}{7} = \frac{1.4}{7} = 0.2$$

$$\int_0^{1.4} e^{-x^2}.dx$$

$$\cong (0.2)\left\{\frac{1}{2}(1+0.140858)+0.96079+0.852143\right.$$

$$\left.+0.697676+0.527292+0.36788+0.236927\right\} = 0.843$$

X	e^{-x^2}
0	1
0.2	0.96079
0.4	0.852143
0.6	0.697676
0.8	0.527292
1	0.36788
1.2	0.236927
1.4	0.140858

مثال 5 : احسب التكاملات المحددة في 6 فقرات باستخدام :

1- طريقة التكامل التحليلية :

$$\int_2^6 \frac{1}{\sqrt{2x-1}}.\mathrm{dx} \qquad n = 6$$

$$u = 2x - 1 \qquad \frac{du}{dx} = 2 \rightarrow \quad dx = \frac{du}{2}$$

$$\int_2^6 \frac{1}{\sqrt{2x-1}}.\mathrm{dx} = \int_2^6 \frac{1}{\sqrt{u}}.\frac{\mathrm{dx}}{2} = \frac{1}{2}\int_2^6 \frac{\mathrm{du}}{\sqrt{u}}$$

$$= \frac{1}{2}\int_2^6 u^{-\frac{1}{2}}.\mathrm{du} = \frac{1}{2}\left[\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_2^6 = \left[\sqrt{u}\right]_2^6 = \left[\sqrt{2x-1}\right]_2^6$$

$$= [3.3166 - 1.732] = 1.5846$$

2- قاعدة شبه المنحرف :

$$\int_2^6 \frac{1}{\sqrt{2x-1}}.\mathrm{dx} \qquad n = 6$$

$$\Delta x(d) = \frac{b-a}{n} = \frac{6-2}{6} = \frac{4}{6} = 0.666$$

X	$\frac{1}{\sqrt{2x-1}}$
2	0.57735
2.666	0.48046
3.332	0.42018
3.998	0.37807
4.664	0.34652
5.33	0.32174
5.996	0.30162

$$\int_2^6 \frac{1}{\sqrt{2x-1}}.dx$$

$$\cong (0.666)\left\{\frac{1}{2}(0.57735 + 0.30162) + 0.48046 + 0.42018 + 0.37807 + 0.34652 + 0.32174\right\} = 1.589$$