الفصل الثالث

♦ مقاييس النزعة المركزية:

إن معظم القيم لمختلف الظواهر الطبيعية تتمركز عادة في الوسط أو قريبة منه، ومقاييس التمركز أو التوسط لأي مجموعة من البيانات التابعة لظاهرة ما هي تلك المقاييس التي تبحث عن تقدير قيمة تتمركز حولها هذه البيانات حيث يمكن تمثيل هذه البيانات بقيمة واحدة فقط، الهدف من ذلك إعطاء صورة سريعة عن ما هي تلك البيانات.

ومن أهم مقاييس التوسط هي:

1- الوسط الحسابي. 2- الوسط الهندسي. 3- الوسط التوافقي.

4- الوسط التربيعي. 5- الوسيط. 6- المنوال.

7- المقاييس التجزيئية.

♦ الوسط الحسابي Arithmetic mean:

ويسمى في بعض الأحيان (الوسط) أو (المتوسط) أو (المعدل الحسابي)، وهو احد مقاييس النزعة المركزية على الإطلاق لما يمتاز به من خصائص جيدة وسهولة في الحساب جعلته في مقدمة مقاييس النزعة المركزية.

طرق حساب الوسط الحسابي:

أ. لبيانات غير مبوبة:

إذا كان لدينا n من القيم أو المشاهدات $(X_1, X_2, ..., X_n)$ فإن الوسط الحسابي لها هو:

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{(X_1 + X_2 + ... + X_n)}{n}$$

أي إن الوسط الحسابي هو مجموع قياسات مفردات العينة مقسوماً على عددها.

ملاحظة:

إن $\bar{X}$ هو تقدير للوسط الحسابي لقياسات مفردات المجتمع الذي اختيرت منه العينة، وإن متوسط قياسات مفردات المجتمع غالباً ما يرمز له بالرمز μ أي إن الوسط الحسابي لقياسات مفردات المجتمع هو

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

مثال:

البيانات التالية تمثل عدد أفراد عينة من الأسر قوامها 12 أسرة، المطلوب إيجاد متوسط عدد أفراد الأسرة.

3,4,7,8,10,9,2,5,6,9,7,5

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{12} X_i}{12} = \frac{3+4+7+8+....+7+5}{12} = \frac{75}{12} = 6.25 \cong 6 \text{ فرد}$$

إذ أن عدد أفراد الأسرة متغير متقطع لذا يتم تقريب الناتج إلى اقرب عدد صحيح.

ب. لبيانات مبوبة:

إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_m$ تمثل مراكز الفئات في جدول التوزيع التكراري عدد فئاته m وإن $f_1, f_2, ..., f_m$ تمثل التكرارات المقابلة لهذه الفئات عندئذ فإن الوسط الحسابي لها سواء كانت أطوال الفئات متساوية أم غير متساوية هو

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{m} f_i}$$

خطوات احتساب الوسط الحسابي لهذه البيانات:

1- تعيين مراكز الفئات X_i.

2- ضرب مركز كل فئة بمقدار تكرارها.

3- قسمة مجموع حاصل ضرب مركز كل فئة في تكرارها على مجموع التكرارات.

مثال:

الآتي توزيع تكراري لعينة من الأسر قوامها 75 أسرة حسب عدد أفراد الأسرة، المطلوب إيجاد متوسط عدد أفراد الأسرة في هذه العينة.

الفئات	التكرار f_i	مراكز الفئات X_i	$f_i X_i$
2-4	8	3	24
5-7	12	6	72
8-10	20	9	180
11-13	13	12	156
14-16	10	15	150
17-19	8	18	144
20-22	4	21	84
المجموع	75		810

$$\therefore\ \bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{m} f_i} = \frac{810}{75} = 10.8 \cong 11$$

إذ إن عدد أفراد الأسرة متغير متقطع لذا يتم تقريب الناتج إلى اقرب عدد صحيح.

مثال:

الاتي توزيع تكراري لدرجات الحرارة في مدينة معينة والمسجلة لمدة (95) يوما متتاليا، المطلوب حساب متوسط درجة الحرارة لهذه المدينة خلال هذه الفترة.

$f_i x_i$	x_i	f_i	الفئات
2	0.5	4	0-
12	1.5	8	1-
30	2.5	12	2-
56	3.5	16	3-
90	4.5	20	4-
137.5	5.5	25	5-
39	6.5	6	6-
30	7.5	4	7-8
396.5	-	95	المجموع

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{m} f_i} = \frac{396.5}{95} = 4.174$$

وليس [illegible]

وهذا يعني إن متوسط درجة الحرارة في هذه المدينة خلال تلك الفترة كان مساويا إلى (4.174).

خصائص الوسط الحسابي:

1- إن مجموع انحرافات قيم المتغير (X) عن وسطها الحسابي يساوي صفر:

توضيح البرهان $\sum x_i - n\bar{x} = \sum x_i - \cancel{n}\frac{\sum x_i}{\cancel{n}} = 0$

$$\sum (x_i - \bar{x}) = 0$$

$$\sum f_i(x_i - \bar{x}) = 0$$

2- إن مجموع مربعات انحرافات قيم (X) عن وسطها الحسابي يكون اقل ما يمكن أي اقل من مجموع مربعات أي قيمة أخرى:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = \text{اقل ما يمكن}$$

3- عند إضافة عدد ثابت مثل (K) إلى كل قيمة من قيم المشاهدات فان الوسط الحسابي للقيم الجديدة = الوسط الحسابي للقيم الأصلية + العدد الثابت (K).

4- اذا ضربت كل قيمة من قيم المشاهدات في قيمة ثابتة مثل (K) فان الوسط الحسابي للقيم الجديدة = الوسط الحسابي للقيم الأصلية * العدد الثابت (K).

مثال: (الخاصية الأولى)

لتكن لدينا القيم المفردة الخمس التالية: $x_i = 7 \quad 4 \quad 3 \quad 9 \quad 2$ ، بين أن انحرافات القيم عن وسطها الحسابي = صفر.

$$\bar{x} = \frac{7+4+3+9+2}{5} = 5$$

ومنه نجد أن انحرافات القيم x_i عن وسطها الحسابي $\bar{x}$ يساوي صفر :

x_i	7	4	3	9	2
$xi - \bar{X}$	2	-1	-2	4	-3

$\sum = 0$

مثال: (الخاصية الثانية)

من القيم التالية:

$$x_i = 9 \quad 8 \quad 6 \quad 5 \quad 7 \text{ ،} \qquad \bar{x} = 7$$

$$\sum(x_i - \bar{x})^2 = (9-7)^2 + (8-7)^2 + (6-7)^2 + (5-7)^2 + (7-7)^2$$
$$= 4+1+1+4+0 = 10$$

فاذا طرحنا من القيم هذه أي رقم (غير الوسط الحسابي) وليكن A=10

$$\sum(x_i - \bar{x})^2 = (9-10)^2 + (8-10)^2 + (6-10)^2 + (5-10)^2 + (7-10)^2$$
$$=55$$

وهذا يعني أن 55 اكبر من 10 وهذا ما يحقق الخاصية الثانية.

مثال: (الخاصية الثالثة)

لنفرض لدينا القيم التالية:

$$x_i = 8 \quad 3 \quad 2 \quad 12 \quad 10 \text{ ،} \qquad \bar{x} = \frac{35}{5} = 7$$

فاذا أضفنا لكل من هذه القيم قيمة ثابتة ولتكن (3) فالقيم الجديدة ستصبح: $x_i = 11 \quad 6 \quad 5 \quad 15 \quad 13$ والوسط الحسابي للقيم الجديدة هو:

$$\bar{x} = \frac{50}{5} = 10$$

الذي في الحقيقة هو:

$$\bar{x}new = \bar{x}old + 3 = 7 + 3 = 10$$

◆ الوسط الحسابي المرجح (الموزون) Weighted mean :

إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_n$ تمثل عينة من المشاهدات قوامها n ، وأن $W_1, W_2, ..., W_n$ تمثل الأوزان المقابلة لهذه المشاهدات، عندئذ يعرف الوسط الحسابي المرجح لهذه الأوزان

غير مبوبة

$$\bar{X}_W = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i}$$

مبوبة

$$\bar{X}_W = \frac{\sum_{i=1}^{m} W_i f_i X_i}{\sum_{i=1}^{m} W_i f_i}$$

مثال(1):

كانت درجات أحد طلبة الصف الثالث إحصاء في الدروس المقررة في هذه المرحلة حسب الساعات الأسبوعية المحددة لكل درس هي كالآتي:

الدرجات:	62	80	75	88	84	86	90
عدد الساعات:	2	2	2	3	3	3	3

المطلوب حساب معدل درجات هذا الطالب.

$$\bar{X}_W = \frac{\sum_{i=1}^{n} W_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} W_i} = \frac{\sum_{i=1}^{7} W_i X_i}{\sum_{i=1}^{7} W_i}$$

$$= \frac{(3)(90)+(3)(86)+(3)(84)+....+(2)(62)}{3+3+3+....+2} = \frac{1478}{18} = 82.111$$

مثال(2):

الآتي توزيع تكراري لإنتاج مصنع معين (طن) من سلعة معينة لأحد الأيام حسب عدد المكائن العاملة في ذلك اليوم وعدد ساعات العمل المحددة لاشتغال كل ماكنة حسب مواصفات المنشأ، المطلوب إيجاد متوسط إنتاجية الماكنة الواحدة في هذا المصنع.

فئات الإنتاج (طن)	عدد المكائن العاملة f_i	ساعات العمل المقررة W_i	مراكز الفئات X_i	$W_i f_i X_i$	$W_i f_i$
2-4	4	6	3	72	24
5-7	5	5	6	150	25
8-10	6	6	9	324	36
11-13	3	4	12	144	12
14-16	2	4	15	120	8
المجموع	20			810	105

وعليه فإن