$$\overline{X}_W = \frac{\sum_{i=1}^{5} W_i f_i X_i}{\sum_{i=1}^{5} W_i f_i} = \frac{810}{105} = 7.714 \quad \text{طن}$$

◆ الوسط التوافقي Harmonic mean:

يعتبر الوسط التوافقي أحد مقاييس النزعة المركزية ذات الاستخدامات القليلة في التطبيقات الإحصائية، ويعرف الوسط التوافقي بانه مقلوب الوسط الحسابي لمقلوبات القيم. وفيما يلي طرق حساب هذا المقياس.

أ. لبيانات غير مبوبة: لتكن $x_1، x_2، x_3، ... ، x_n$ تمثل قياسات مفردات عينة قوامها n. ووفق التعريف أعلاه فان الوسط التوافقي H يمكن حسابه وفق الصيغة التالية:

$$H = \frac{1}{(\sum \frac{1}{x_i})/n} = \frac{n}{\sum \frac{1}{x_i}} \qquad ; \; x_i \neq 0$$

مثال:

جد الوسط التوافقي للبيانات التالية: $x_i = 2 \quad 5 \quad 3 \quad 4 \quad 7 \quad 8 \quad 8$

$$\frac{1}{x_i} = 0.5، 0.2، 0.33، 0.25، 0.14، 0.13، 0.13$$

$$\sum \frac{1}{x_i} = 1.68 \qquad ، \qquad \therefore H = \frac{7}{1.68} = 4.17$$

ب. لبيانات مبوبة: لتكن $x_1، x_2، x_3، ... ، x_m$ تمثل مراكز الفئات لتوزيع تكراري عدد فئاته m وان $f_1، f_2، f_3، ... ، f_m$ تمثل التكرارات المقابلة لهذه الفئات، عندئذ يتم حساب الوسط التوافقي لهذا التوزيع وفق الصيغة التالية:

$$H = \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{f_i}{x_i}\right) \Big/ \sum_{i=1}^{m} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i}{\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{f_i}{x_i}\right)}$$

مثال:

استخرج الوسط التوافقي للتوزيع التكراري التالي (يمثل توزيعا لعدد من العاملين في مصنع معين حسب فئات الأجر الشهري بالدينار).

f_i/x_i	x_i	f_i	الفئات
0.145	55	8	50-
0.154	65	10	60-
0.213	75	16	70-
0.165	85	14	80-
0.105	95	10	90-

0.048	105	5	100-
0.017	115	2	100-120
0.847		65	المجموع

$$H = \frac{\sum_{i=1}^{m} f_i}{\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{f_i}{x_i}\right)} = \frac{65}{0.847} = 76.741$$

مع ملاحظة انه يمكن إيجاد قيمة الوسط التوافقي سواء كانت أطوال الفئات متساوية أم غير متساوية.

◆الوسط الهندسي Geometric mean:

يعتبر الوسط الهندسي أحد مقاييس النزعة المركزية المهمة جداً في الدراسات السكانية وخصوصا عند حساب معدلات نمو السكان وكذلك في تكوين الأرقام القياسية. ويعرف الوسط الهندسي لمجموعة قياسات متغير عشوائي بانه الجذر ذي المرتبة n لحاصل ضرب قياسات هذه المجموعة ببعضها البالغ عددها n.

أ. لبيانات غير مبوبة: لتكن $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ تمثل قياسات عينة من المفردات قوامها n بحيث $x_i > 0$ لجميع قيم i . عندئذٍ يمكن حساب الوسط الهندسي G وفق ما يلي:

$$G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$

وبهدف تسهيل العمل الحسابي يتم اخذ لوغاريتم طرفي هذه الصيغة للأساس 10 وعليه فان:

$$Log_{10}G = Log_{10}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}$$
$$= \frac{1}{n}\sum Log_{10}x_i$$

وبذلك فان

$$G = anti - Log_{10}\left(\frac{1}{n}\sum Log_{10}x_i\right)$$

حيث إن الاصطلاح $anti - Log_{10}$ يعني العدد المقابل إلى اللوغاريتم.

مثال:

جد الوسط الهندسي للبيانات التالية:

$$x_i = 10 \quad 20 \quad 30 \quad 40 \quad 50 \quad 60$$

$$G = (10 * 20 * 30 * 40 * 50 * 60)^{\frac{1}{6}} = (720000000)^{\frac{1}{6}} = 29.938$$

أما في حالة استخدام اللوغاريتمات فان:

$$G = anti - Log_{10}\left[\frac{1}{6}(Log10 + Log20 + \cdots + Log60)\right]$$
$$= anti - Log_{10}\left[\frac{1}{6}(8.8573325)\right]$$

$$= anti - Log_{10}(1.476222) = 29.938$$

ب. لبيانات مبوبة: لتكن $x_1، x_2، x_3، ...، x_m$ تمثل مراكز فئات توزيع تكراري عدد فئاته m بحيث أن $x_i > 0$ لجميع قيم i . وإن $f_1، f_2، f_3، ...، f_m$ تمثل التكرارات المقابلة لهذه الفئات، عندئذٍ يمكن حساب قيمة الوسط الهندسي لهذا التوزيع وفق الصيغة التالية:

$$G = \sqrt[\sum f_i]{\prod_{i=1}^{n} x_i^{f_i}} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{f_i}\right)^{\frac{1}{f_i}}$$

وبهدف تسهيل العمل الحسابي يمكن اخذ اللوغاريتم للأساس 10 وعندئذٍ

$$Log_{10}G = \frac{1}{f_i} Log_{10} \prod_{i=1}^{n} x_i^{f_i} = \frac{1}{f_i} \sum f_i Log_{10} x_i$$

$$G = anti - Log_{10}\left(\frac{1}{f_i} \sum f_i Log_{10} x_i\right)$$

مثال:

للتوزيع التكراري التالي يطلب حساب الوسط الهندسي.

الفئات	f_i	x_i	$Log_{10}x_i$	$f_iLog_{10}x_i$
10-	3	15	1.1761	3.5283
20-	5	25	1.3979	6.9895
30-	7	35	1.5441	10.8087
40-	8	45	1.6532	13.2256
50-	6	55	1.7404	10.4424
60-	5	65	1.8129	9.0645
70-80	2	75	1.8751	3.7502
المجموع	36			57.8092

$$G = anti - Log_{10}\left(\frac{57.8092}{36}\right)$$
$$= anti - Log_{10}(1.6058)$$
$$\therefore G = 40.35$$

الوسيط The median:

هو تلك القيمة من قيم المتغير العشوائي X التي تقسم مجموعة من قيم المتغير إلى قسمين متساويين أي أنها قيمة X التي تجعل عدد القيم قبلها مساوٍ لعدد القيم بعدها.

طرق حساب الوسيط:

أ. لبيانات غير مبوبة.

إذا كانت $X_1, X_2, ..., X_n$ تمثل مشاهدات متغير عشوائي عددها n، وعلى فرض أن هذه المشاهدات رتبت تصاعدياً إذ إن $(Y_1 < Y_2 < .... < Y_n)$ تمثل قيم المتغير X المرتبة تصاعدياً (وقد يكون ترتيبها تنازلياً) فعندها:

1- إذا كان عدد القيم n عدد فردي فإن قيمة الوسيط (بعد ترتيب القيم تصاعدياً أو تنازلياً) تمثل القيمة التي تسلسلها $(\frac{n+1}{2})$.

2- إذا كان عدد القيم n عدد زوجي فقيمة الوسيط (بعد الترتيب) تمثل الوسط الحسابي للقيم التي تسلسلها $(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}+1)$.

مثال(1):

درجات عينة من الطلاب في امتحان معين

$$X : 80, 79, 63, 65, 68, 70, 53, 62, 55$$

جد الوسيط لدرجات عينة من الطلاب

نرتب القيم ترتيباً تصاعدياً

$$Y : 53, 55, 62, 63, 65, 68, 70, 79, 80$$

$$n = 9$$

وعليه فإن تسلسل

$$\frac{n+1}{2} = \frac{9+1}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

إذن قيمة الوسيط هي القيمة التي تسلسلها 5 وهي 65 أي:

$$\therefore M_e = 65$$

مثال(2):

الآتي أعمار عينة من الأفراد قوامها 12 فرد، المطلوب إيجاد الوسيط لعمر الفرد في هذه المجموعة.

$$X : 20, 22, 19.5, 26, 24.5, 27, 28, 29, 18, 20, 23, 25$$

نرتب هذه القيم ترتيب تنازلي وكالآتي:

$$Y : 29, 28, 27, 26, 25, 24.5, 23, 22, 20, 20, 19.5, 18$$

$$n = 12$$

وعليه فإن تسلسل

$$\frac{n}{2} = \frac{12}{2} = 6 \quad , \quad \frac{n}{2} + 1 = \frac{12}{2} + 1 = 7$$

إذن القيمتان اللتان تحددان الوسيط هما 24.5، 23 وعليه فإن الوسيط لهذه المجموعة يمثل الوسط الحسابي لهاتين القيمتين أي

$$M_e = \frac{24.5 + 23}{2} = 23.75 \text{ سنة}$$