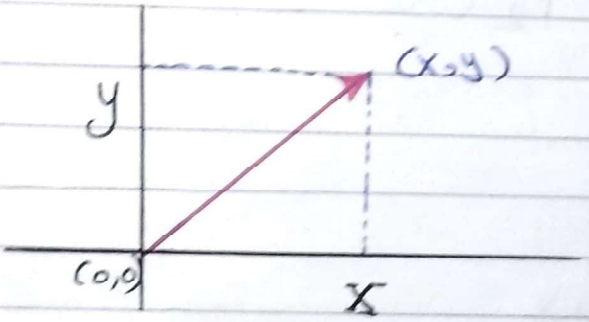
الكورس الثاني
بدأ في ٢٠٢٢/٢/٩

فضاء المتجهات "Vector Space"

المتجه: هو مصفوفة [في مستوى من صف 2x1]

اي أن: $\vec{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ حيث x, y اعداد حقيقية وهي

مركبات المتجه $\vec{X}$ بداية نقطة الأصل ونهاية النقطة (x,y)



ليكن $\vec{X}, \vec{Y}$ متجهين $\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ و $\vec{Y} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

فأن $\vec{X} = \vec{Y}$

اذا وفقط اذا تساوت مركباتها المتناظرة اي أن $x_1 = x_2$

و $y_1 = y_2$

طول المتجه: ليكن $\vec{X} = (x,y)$ فأن طول أو معيار أو قياس المتجه $\vec{X} = (x,y)$ يرمز له بالرمز $\|\vec{X}\|$ مساوياً الى

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

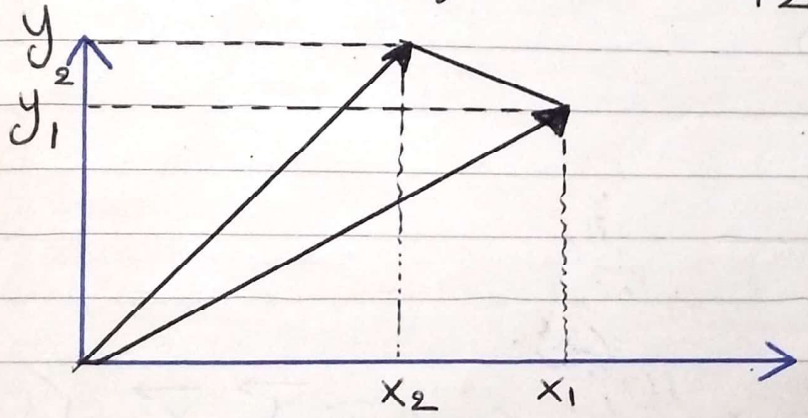
$$\|\overrightarrow{X}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

وأن طول القطعة $\overrightarrow{P_1P_2}$ هو

$$\|\overrightarrow{P_1P_2}\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad \text{..... (1)}$$

حيث أن $P_1 = (x_1, y_1)$ نقطة البداية

$P_2 (x_2, y_2)$ نقطة النهاية



مثال :- جد المسافة بين نقطتين $P(3, 2)$ ، $Q(-1, 5)$ (x_1, y_1 ، x_2, y_2)

الحل :- المسافة هي طول قطعة المستقيم $\overrightarrow{PQ}$

$$\|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{(-1-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25}$$

$$= 5$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تعريف :- ليكن كل من $\vec{x} = (x_1, y_1)$ و $\vec{y} = (x_2, y_2)$ متجهات في المستوي R^2 فأن

1) مجموع المتجهين هو

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$$

$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

وإما اذا كان بالشكل

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \quad , \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

فأن

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{bmatrix}$$

2) ليكن $\vec{x} = (x, y)$ فأن المضاعف العددي ويرمز له $c\vec{x}$ حيث c عدد حقيقي يكون

$$c\vec{x} = (cx, cy)$$

تعريف :- يقال للمتجه $(0,0)$ بأنه المتجه الصفري ويرمز له بالرمز $\vec{0}$

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

اذا كان $\vec{x}$ متجهاً فان $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$

أو $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$$\vec{x} - \vec{x} = \vec{x} + (-1 \cdot \vec{x}) = \vec{0}$$

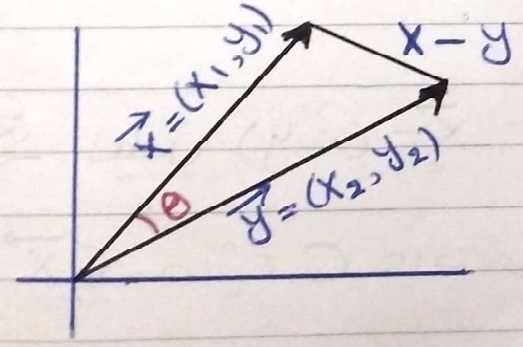
$$-\vec{x} = -1 \cdot \vec{x} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{bmatrix}$$

تعريف: الزاوية بين متجهين $\vec{x}$ و $\vec{y}$ لكن

$$\vec{x} = (x_1, y_1)$$

$$\vec{y} = (x_2, y_2)$$

غير صفرين كما في الشكل الآتي



$0 \leq \theta \leq 180$

نلاحظ المتجه $\vec{x} - \vec{y}$ الذي يساوي

$$\vec{x} - \vec{y} = (x_1, y_1) - (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 - y_2)$$

ومن تعريف طول المتجه نجد أن طول $\vec{x} - \vec{y}$ يساوي

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\|\overrightarrow{x-y}\| = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2} \quad \text{..... (1)}$$

ومن القانون المعروف

$$\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\|x\|\|y\|\cos\theta \quad \text{.....(2)}$$

وحيث أن

$$\|x\|^2 = x_1^2 + y_1^2 \quad \text{..... (3)}$$

$$\|y\|^2 = x_2^2 + y_2^2 \quad \text{..... (4)}$$

وبتعويض (1) ، (3) ، (4) في (2) نجد أن :-

$$(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 - 2\|x\|\cdot\|y\|\cos\theta$$

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + y_1^2 - 2y_1y_2 + y_2^2 = x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2$$

$$-2\|x\|\|y\|\cos\theta$$

$$-2(x_1x_2 + y_1y_2) = -2\|x\|\cdot\|y\|\cos\theta$$

$$\Longrightarrow \boxed{\cos\theta = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\|x\|\cdot\|y\|}}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تعريف (الجداء الداخلي) (الضرب النقطي)

ليكن كل من $\vec{x}=(x_1,y_1)$ ، $\vec{y}=(x_2,y_2)$ متجهاً فأن الجداء الداخلي للمتجهين $\vec{x}$ ، $\vec{y}$ يعرف بالشكل:-

$$x\cdot y = x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2$$

وعليه يكون $0\leq\theta\leq\pi$

$$\cos\theta = \frac{x\cdot y}{\|x\|\ \|y\|}$$

مثال:- اذا كان $\vec{x}=(2,4)$ ، $\vec{y}=(-1,2)$

فأن

$$x\cdot y = x_1x_2 + y_1y_2 = 2(-1)+2\cdot 4 = 6$$

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2+y_1^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20}$$

$$\|y\| = \sqrt{x_2^2+y_2^2} = \sqrt{(-1)^2+2^2} = \sqrt{5}$$

وعليه

$$\cos\theta = \frac{6}{\sqrt{20}\sqrt{5}} = 0.6$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

متجه الوحدة "Unite Vector"

هو ذلك المتجه الذي طوله يساوي 1

لكن $\vec{X}$ متجهاً غير صفري فأن

$$u = \frac{1}{\|X\|} \cdot X$$

هو متجه وحدة باتجاه $\vec{X}$

المتجهات من النمط n :- (n_vectors)

يقال للصفوفة $\vec{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ or $\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$

حيث كل من $x_1, x_2, \ldots, x_n$ اعداد حقيقية بأنها متجه من النمط n حيث تدعى $x_1, x_2, \ldots, x_n$ بمركبات المتجه $\vec{X}$

ملاحظة ليكن $\vec{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ و $\vec{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

متجهات فأن (١) يتساوى المتجهان اذا وفقط اذا كان $x_i = y_i$

(٢) تعرف عملية الجمع $\vec{x} + \vec{y}$ بالشكل

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\vec{x}+\vec{y}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1+y_1\\x_2+y_2\\\vdots\\x_n+y_n\end{bmatrix}$$

(٣) يعرف $c\vec{x}$ حيث c عدد حقيقي بالشكل

$$c\vec{x}=\begin{bmatrix}cx_1\\cx_2\\\vdots\\cx_n\end{bmatrix}$$

(٤) يرمز لمجموعة المتجهات من النمط n بالرمز R^n اي أن:

$$R^n=\{x : n\text{-النمط من هو متجه } x_0\}$$

مبرهنة: ليكن كل من $\vec{x}$، $\vec{y}$، $\vec{z}$ متجهات في R^n و c، d أعداداً فأن:

$\vec{z}=(z_1,z_2,\dots z_n)$، $\vec{y}=(y_1,y_2,\dots y_n)$، $\vec{x}=(x_1,x_2,\dots x_n)$

١) $\vec{x}+\vec{y}$ متجه في R^n (مغلق بتأثير عملية الجمع)

١) $\vec{x}+\vec{y}=\vec{y}+\vec{x}$ (ابدالية)

٢) $\vec{x}+(\vec{y}+\vec{z})=(\vec{x}+\vec{y})+\vec{z}$ (تجميعية)

٣) يوجد متجه (المتجه الصفري) في R^n حيث أن $\vec{x}+\vec{0}=\vec{x}$

حيث $\vec{0}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$

(٤) يوجد متجه وحيد هو $-\vec{X}$ وأن

$$\vec{X} + (-\vec{X}) = \vec{0} \quad , \quad -\vec{X} = \begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ \vdots \\ -x_n \end{bmatrix}$$

ـــ إن $C\vec{X}$ متجه في R^n

١ـــ $C(\vec{X}+\vec{Y}) = C\vec{X} + C\vec{Y}$

٢ـــ $(C+d)\vec{X} = C\vec{X} + d\vec{X}$

٣ـــ $C(d\vec{X}) = (Cd)\vec{X}$

٤ـــ $I\vec{X} = \vec{X}$ حيث I هي المصفوفة الوحدية.

يعرف الجداء الداخلي لـ $\vec{X}, \vec{Y}$ بالشكل :-

$$\vec{X} \cdot \vec{Y} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

مبرهنة :- اذا كان كل من $\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}$ متجهات في R^n و c عدد حقيقي فأن :-

١ـــ $\vec{X} \cdot \vec{X} = \|X\|^2 \geq 0$

٢ـــ $\vec{X} \cdot \vec{Y} = \vec{Y} \cdot \vec{X}$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٣) $(x+y)z = x.z + y.z$

٤) $(cx).y = x.(cy) = c(x.y)$

البرهان :-

(١) لتكن $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots x_n)$

فأن $\vec{X}.\vec{X} = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad \dots (1)$

وبما أن $\|X\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \quad \dots (2)$

وعليه فأن من (1) و (2) نحصل على

$X.X = \|x\|^2 \geq 0$

(٢) $X.y = (x_1, x_2, \dots x_n).(y_1, y_2, \dots y_n)$

$= x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$

$= y_1x_1 + y_2x_2 + \dots + y_nx_n$

$= y.x$

برهان (٣) و (٤) واضح

مثال :- ليكن $\vec{x}=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ ، $\vec{y}=\begin{bmatrix}3\\4\\-1\end{bmatrix}$

جد $x-y$

الحل :-

$$x-y=x+(-y)=\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3\\-4\\1\end{bmatrix}$$

$$\therefore x-y=\begin{bmatrix}-2\\-6\\2\end{bmatrix}$$

مثال :- ليكن $\vec{x}=(3,4)$ جد متجهة وحدة u.

الحل :-

$$u=\frac{1}{\|x\|}\cdot x$$

$$\|x\|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

$$u=\frac{(3,4)}{5}=\left(\frac{3}{5},\frac{4}{5}\right)$$

$$\|u\|=\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{25}+\frac{16}{25}}$$

$$=\sqrt{\frac{25}{25}}=1$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

تعريف :- طول (مقياس المتجه)

ليكن $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ في R^n

فأن طول $\vec{x}$ هو

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_n^2}$$

والمسافة بين $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

تساوي

$$\|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

فضاء المتجهات والفضاء الجزئي
Vector space and subspace:

تعريف :- يقال للمجموعة V من عناصر مع عمليتي $\oplus$ و $\odot$ بأنها فضاء متجهات اذا تحققت الشروط الاتية :-

اولاً :- V مغلقة تحت عملية الجمع $\oplus$ (اي أن $\vec{x}, \vec{y}$ اي متجهين في V فأن $\vec{x} \oplus \vec{y} \in V$)

١) اذا كان $\vec{x}, \vec{y}$ في V فأن $\vec{x} \oplus \vec{y} = \vec{y} \oplus \vec{x}$

٢) لكل $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ فأن $(\vec{x} \oplus \vec{y}) \oplus \vec{z} = \vec{x} \oplus (\vec{y} + \vec{z})$

٣) يوجد عنصر وحيد $\vec{0}$ في V بحيث أن $\vec{x} \oplus \vec{0} = \vec{0} \oplus \vec{x} = \vec{x}$

٤) لكل $\vec{x} \in V$ يوجد عنصر وحيد $-\vec{x} \in V$ بحيث أن $\vec{x} \oplus (-\vec{x}) = \vec{0}$

ثانياً :- V مغلقة بالنسبة للعملية $\odot$ اي اذا كان $\vec{x}$ عنصر في V و c عدداً حقيقياً فأن $c \odot \vec{x}$ هو عنصر في V.

٥) لكل عدد حقيقي c ولكل $\vec{x}, \vec{y}$ فأن

$$c \odot (x \oplus y) = c \odot x + c \odot y$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

٦ لكل عددين حقيقيين c و d ولكل $\vec{x} \in V$ فأن :-

$$(c+d) \odot \vec{x} = c \odot \vec{x} + d \odot \vec{x}$$

٧ لكل عددين حقيقيين c و d ولكل $\vec{x} \in V$ فأن

$$c \odot (d \odot \vec{x}) = (cd) \odot \vec{x}$$

٨ لكل $\vec{x} \in V$ يكون $1 \odot \vec{x} = \vec{x}$

حيث أن $\oplus$ هي جمع المتجهات والعملية $\odot$ هي ضرب العددي

مبرهنة :- ليكن V فضاء متجهات فأن :-

أ) لكل $\vec{x} \in V$ يكون $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$

ب) لكل عدد حقيقي c يكون $c \cdot \vec{0} = \vec{0}$

ج) اذا كان $c\vec{x} = \vec{0}$ فأنه إما $c = 0$ أو $\vec{x} = \vec{0}$

د) لكل $\vec{x} \in V$ فأن $(-1)\vec{x} = -\vec{x}$

الفضاءات الجزئية :- sub spaces

ليكن V فضاء متجهات وليكن W مجموعة جزئية غير خالية من V . اذا كان W فضاء متجهات بالنسبة للعمليتين المعرفتين

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مبرهنة: لتكن V فضاء متجهات مع العمليتين $\oplus$ ، $\odot$

ولتكن W مجموعة غير خالية من V فإن W فضاء جزئي من V اذا وفقط اذا تحققت الشروط الآتية:

1) اذا كان $\vec{x}, \vec{y} \in W$ فإن $\vec{x} \oplus \vec{y} \in W$ (مغلقة الجمع)

2) اذا كان c عدداً حقيقياً وأن $\vec{x} \in W$ فإن $c \odot \vec{x} \in W$

(مغلقة الضرب).

أمثلة:

مثال (1): R^n فضاء متجهات على الحقل R وتحقق الشروط السابقة تحت عمليتي الجمع الاعتيادي والضرب القياسي الاعتيادي

مثال (2): المصفوفات المربعة من $(m \times m)$ هي فضاء متجهات دائماً على حقل الاعداد الحقيقية حيث الجمع هو جمع المصفوفات وأن الضرب هو الضرب بعدد ثابت (ضرب قياسي)، فضاء متجهات تحقق جميع الشروط.

مثال (3): مجموعة كل الدوال الحقيقية حيث الجمع

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

والضرب يعرف $r(f(x)) = r \cdot f(x)$

فضاء متجهات تحقق جميع الشروط السابقة.

مثال (٤) :- مجموعة كل الازواج الحقيقية (x,y) حيث $x \geq 0$ هي ليست فضاء متجهات لأنها لا تحقق شروط وجود النظير الجمعي مثلاً $(3,20)$ نظيره الجمعي هو $(-3,-20)$ وهو ليس موجوداً من ضمن عناصر هذه المجموعة.

مثال (٥):- برهن أن $V=R^2$ ليس فضاء متجهات على R بالنسبة لعمليتي الجمع والضرب الآتية :-

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1,y_1)$$

$$r(x,y) = (rx, ry)$$

الحل :- ليس فضاء متجهات لأنه من الواضح من عمليتي الجمع والضرب أنها ليست تبديلية اي أن :-

$$(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1,y_1)$$

$$(x_2,y_2) + (x_1,y_1) = (x_2,y_2)$$

$$\Rightarrow (x_1,y_1) \neq (x_2,y_2)$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

أمثلة على الفضاءات الجزئية :-

مثال (١) :- ليكن $T=\{(x,0) : x \in R\}$ فضاء جزئي مع عملية الجمع الاعتيادي والضرب القياسي لأن

Let $(x,0),(y,0) \in T$

Then $(x,0)+(y,0)=(x+y,0) \in T$

Let $r \in R$

Then $r(x,0)=(rx,0) \in T$

مثال (٢) :- ليكن M جميع المتجهات $A=(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ حيث $x_1 > 0$ فأن M ليس فضاء جزئي لأنه ليس مغلق للضرب حيث لو أخذنا KA وكانت $K<0$ فأن

$$KA=(Kx_1, Kx_2, \ldots, Kx_n)$$

وبما أن $K<0$, $x_1>0$ فأن $Kx_1<0$

وهذا يؤدي الى $KA \notin T$

$\therefore T$ ليس فضاء جزئي.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال (٣) :- اذا كانت W جميع المصفوفات $A=\begin{bmatrix} a & 0 \\ c & d \end{bmatrix}$ حيث a, c, d اعداد صحيحة.

فأن W ليس فضاء جزئي لأنه مثلاً لو أخذنا

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \in W \quad \text{ولكن} \quad \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \notin W$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

مثال :- ليكن U, W فضائين جزئيين من V. برهن أن $U \cap W$ فضاء جزئي من V.

البرهان :- $\vec{0} \in U \cap W$ لأن $\vec{0} \in U$, $\vec{0} \in W$

$\Longleftarrow$ $U \cap W$ مجموعة غير خالية.

ليكن $\vec{x}, \vec{y} \in U \cap W \Longleftarrow \vec{x}, \vec{y} \in U$

$\Longleftarrow \vec{x}+\vec{y} \in U$ (لأن U فضاء جزئي).

$\Longleftarrow \vec{x}, \vec{y} \in W \Longleftarrow \vec{x}+\vec{y} \in W$ (لأن W فضاء جزئي)

$\Longleftarrow \vec{x}+\vec{y} \in U \cap W$

كما أن $K\vec{x} \in U$ كذلك $K\vec{x} \in W$ (لأن U, W فضاءات جزئية).

$\Longleftarrow K\vec{x} \in U \cap W$

$\Longleftarrow U \cap W$ فضاء جزئي من V.

مبرهنة :- تقاطع اي عدد منته من الفضاءات الجزئية من فضاء متجهات V هو فضاء جزئي من V.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

البرهان :- $\vec{0} \in U_1 \cap U_2 \cap \dots U_n$ (لأن $\vec{0}$ موجود في كل U_i من).

$\Leftarrow \cap U_i$ غير خالية.

نفرض أن $\vec{X_1}, \vec{X_2}, \dots, \vec{X_n} \in \cap U_i$

$\Leftarrow X_1, X_2, \dots, X_n \in U_i$ كل U_i, $i = 1, \dots, n$

وبما أن U_i فضاءات جزئية فإن

$\vec{X_1} + \vec{X_2} + \dots + \vec{X_n} \in U_i$ (لكل $i = 1, 2, \dots n$)

$\Leftarrow \vec{X_1} + \vec{X_2} + \dots + \vec{X_n} \in \cap U_i$

وكذلك فإن $K\vec{X} \in U_i$ موجود في كل U_i (لأنها فضاءات جزئية).

$\Leftarrow K\vec{X} \in \cap U_i$

$\Leftarrow \cap U_i$ فضاء جزئي من V.

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

الاستقلال الخطي :. Linear independance

تعريف :. ليكن $\vec{X_1}, \vec{X_2}, \dots, \vec{X_n}$ متجهات من الفضاء V على الحقل F يقال للمتجه $\vec{X}$ بأنه تركيب خطي من المتجهات $\vec{X_1}, \vec{X_2}, \dots, \vec{X_n}$ اذا وجدت قياسات $c_1, c_2, \dots, c_n$ بحيث يمكن كتابة $\vec{X}$ بالشكل :.

$$\vec{X} = c_1\vec{X_1} + c_2\vec{X_2} + c_3\vec{X_3} + \dots + c_n\vec{X_n}$$

مثال (1) :. ليكن $\begin{cases} \vec{X_1} = (1,2,-1) \\ \vec{X_2} = (1,0,-1) \end{cases}$ متجهين في R^3

هل أن $\vec{X} = (1,0,2)$ تركيب خطي من $\vec{X_1}, \vec{X_2}$

الحل :.

$\vec{X}$ يكون تركيب خطي من $\vec{X_1}, \vec{X_2}$ اذا أمكن ايجاد c_1, c_2 بحيث أن

$$\vec{X} = c_1\vec{X_1} + c_2\vec{X_2}$$

وعليه $(1,0,2) = c_1(1,2,-1) + c_2(1,0,-1)$

$$\Rightarrow \begin{aligned} c_1 + c_2 &= 1 \\ 2c_1 + 0c_2 &= 0 \\ -c_1 - c_2 &= 2 \end{aligned}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

$$\Longrightarrow \begin{aligned} C_1 + C_2 &= 1 \quad \dots (1) \\ 2C_1 &= 0 \quad \dots (2) \\ C_1 + C_2 &= -2 \quad \dots (3) \end{aligned}$$

نلاحظ أن المعادلة (1)، (3) تناقض $1 \neq -2$ وعليه

لا يوجد حل لهذا النظام $\therefore$ $\vec{X}$ ليست تركيب خطي من $\vec{X_1}, \vec{X_2}$

مثال (2): هل أن المتجه $(2, 1, 5, -5)$ هو تركيب خطي من المتجهات

$$\vec{X_1} = (1, 2, 1, -1)$$
$$\vec{X_2} = (1, 0, 2, -3)$$
$$\vec{X_3} = (1, 1, 0, -2)$$

الحل:-

$$\vec{X} = C_1\vec{X_1} + C_2\vec{X_2} + C_3\vec{X_3}$$

$$(2,1,5,-5) = C_1(1,2,1,-1) + C_2(1,0,2,-3) + C_3(1,1,0,-2)$$

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 + C_3 &= 2 \\ 2C_1 + 0C_2 + C_3 &= 1 \\ C_1 + 2C_2 + 0C_3 &= 5 \\ -C_1 - 3C_2 - 2C_3 &= -5 \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 5 \\ -1 & -3 & -2 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow[-r_1 + r_3]{-2r_1 + r_2} \begin{matrix} \\ \\ r_1 + r_4 \end{matrix}$$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner

(23)

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_2+r_4}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{+r_2+2r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3/3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \begin{array}{l} C_3 = -1 \\ C_2 = 2 \\ C_1 = 1 \end{array}$$

$\therefore (2,1,5,-5) = 1(1,2,1,-1) + 2(1,0,2,-3) + (-1)(1,1,0,-2)$

الممسوحة ضوئيا بـ CamScanner