تعريف :- لتكن $S=\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}\}$ مجموعة متجهات في فضاء المتجهات يقال بأن المجموعة S تولد الفضاء V (span V) مولد V اذا كان كل متجه في V هو تركيب خطي من متجهات المجموعة S.

مثال :- بين أن المتجهات

$\vec{x_1} = (0,0,1)$

$\vec{x_2} = (0,1,2)$

$\vec{x_3} = (1,2,3)$

تولد R^3

الحل :- ليكن $\vec{x} = (a,b,c)$ وأن a, b, c اعداد حقيقية

عشوائية نحاول أن نجد قياسات c_1, c_2, c_3 بحيث أن $\vec{x}$ هو تركيب خطي من $\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}$

$$\vec{x} = c_1\vec{x_1} + c_2\vec{x_2} + c_3\vec{x_3}$$

$$(a,b,c) = c_1(0,0,1) + c_2(0,1,2) + c_3(1,2,3)$$

نقارن المركبات المتناظرة

$$\begin{aligned} a &= 0 + 0 + c_3 \\ b &= 0 + c_2 + 2c_3 \\ c &= c_1 + 2c_2 + 3c_3 \end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

$\Rightarrow : c_3 = a \,,\; c_2 = b - 2a$

$c_1 = c - 2c_2 - 3c_3$

$= c - 2(b-2a) - 3(a)$

$= c - 2b + 4a - 3a \Rightarrow c - 2b + a$

وعليه فأن

$c_1 = c - 2b + a$
$c_2 = b - 2a$
$c_3 = a$

$\therefore \vec{x_3}, \vec{x_2}, \vec{x_1}$ تولد الفضاء R^3.

تعريف :- لتكن $S = \{ \vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n} \}$ مجموعة متجهات مختلفة في فضاء المتجهات V يقال للمجموعة S بأنها غير مستقلة خطياً (مرتبطة) اذا وجدت ثوابت ليس جميعها أصفار $c_1, c_2, \dots, c_n$ بحيث أن :-

$$c_1\vec{x_1} + c_2\vec{x_2} + c_3\vec{x_3} + \dots + c_n\vec{x_n} = \vec{0} \quad \dots\dots (*)$$

وبعكسه يقال للمجموعة S مستقلة خطياً اذا كانت المعادلة (*) تتحقق فقط عندما تكون $c_1 = c_2 = c_3 = \dots = c_n = 0$

Scanned by CamScanner

مثال :- المتجهات في الفضاء R^4 بين فيما اذا كانت المجموعة $\{\vec{X_1}, \vec{X_2}, \vec{X_3}\}$ مستقلة خطياً أم لا حيث ان :-

$\vec{X_1} = (1,0,1,2)$, $\vec{X_2} = (0,1,1,2)$, $\vec{X_3} = (1,1,1,3)$

الحل :- نجد C_3, C_2, C_1 تحقق $C_1\vec{X_1} + C_2\vec{X_2} + C_3\vec{X_3} = 0$

$$C_1(1,0,1,2) + C_2(0,1,1,2) + C_3(1,1,1,3) = (0,0,0,0)$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} C_1 + 0 + C_3 &= 0 \\ 0 + C_2 + C_3 &= 0 \\ C_1 + C_2 + C_3 &= 0 \\ 2C_1 + 2C_2 + 3C_3 &= 0 \end{aligned} \Longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[-r_1+r_3]{-2r_1+r_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow$$

وعليه فأن $C_2 = 0$, $C_3 = 0$, $C_1 = 0$

حيث أن $C_1\vec{X_1} + C_2\vec{X_2} + C_3\vec{X_3}$ مستقلة خطياً.

Scanned by CamScanner

مثال :- هل أن التجهات الآتية مستقلة أم غير مستقلة (مرتبطة خطياً).

$\vec{X_1} = (1, -2, 1)$

$\vec{X_2} = (2, 1, -1)$

$\vec{X_3} = (7, -4, 1)$

الحل :- نأخذ التركيب

$$C_1\vec{X_1} + C_2\vec{X_2} + C_3\vec{X_3} = 0$$

$$C_1(1, -2, 1) + C_2(2, 1, -1) + C_3(7, -4, 1) = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned} C_1 + 2C_2 + 7C_3 &= 0 \\ -2C_1 + C_2 - 4C_3 &= 0 \\ C_1 - C_2 + C_3 &= 0 \end{aligned} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix} 2r_1 + r_2 \\ -r_1 + r_3 \end{matrix} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R_3/3]{R_2/5}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-r_2 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Scanned by CamScanner

بما أن السطر الأخير عناصره كلها أصفار (عدد المعادلات أقل من عدد المجاهيل).

يوجد عدد غير منتهٍ من الحلول لـ C_1, C_2, C_3

← ليس $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ حلاً وحيداً فقط بل يوجد عدد غير

لأن $C_2 + 2C_3 = 0$ ← $C_2 = -2C_3$

$C_1 = -3C_3$

∴ $\vec{X_1}$ ، $\vec{X_2}$ ، $\vec{X_3}$ مجموعة غير مستقلة خطياً (مرتبطة خطياً).

ملاحظة: عند إيجاد قيم القياسات $C_1, C_2, \ldots, C_n$

يمكن عند الحصول على منظومة المعادلات أن نجد مصفوفة المعاملات، وإذا كانت مربعة يرمز لها A فلها الحالتين الآتيتين:-

١- إذا كانت $|A| \neq 0$ فأن الحل الوحيد هو الحل الصفري يعني

قيم $C_1 = C_2 = C_3 = \ldots = C_n = 0$

∴ المجموعة مستقلة خطياً.

٢- إذا كان $|A| = 0$ فأن الحل معتمد وبالإمكان إيجاد حل غير صفري

أي أن المتجهات (غير مستقلة خطياً) مرتبطة.

Scanned by CamScanner

وبالرجوع الى المثال (2) نجد المحدد.

$$\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 7 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & -4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}$$

$$\Rightarrow |A| = 1 - 8 + 14 - (7 + 4 - 4) = 14 - 14 = 0$$

$$\Rightarrow |A| = 0$$

في حالة أن المحدد يساوي صفر فأن الحل المعتمد اي هنالك عدد غير منتهي من الحلول.

مبرهنة (1) :- اذا كانت $S = \{ \vec{X_1}, \vec{X_2}, \dots, \vec{X_r} \}$ مجموعة من المتجهات من R^n وكانت $r > n$ فأن S عبارة عن مستقلة خطياً (مرتبطة).

مبرهنة (2) :- اذا كانت $S = \{ \vec{X_1}, \vec{X_2}, \dots, \vec{X_n} \}$ مجموعة متجهات مستقلة خطياً فأن اي مجموعة جزئية من S بواحد أو اكثر من المتجهات هي أيضاً مجموعة مستقلة خطياً.

مبرهنة (3) :- اذا كان أحد المتجهات $\vec{X_1}, \vec{X_2}, \dots, \vec{X_n}$ متجهاً صفرياً فأن المجموعة $\{ \vec{X_1}, \vec{X_2}, \dots, \vec{X_n} \}$ مرتبطة خطياً.

Scanned by CamScanner