مثال:- هل أن المتجهات $(3,6,5)$ و $(1,3,3)$ و $(0,1,4)$ و $(1,2,-1)$ مرتبطة خطياً أم مستقلة ؟

الحل:- بما ان المتجهات مأخوذة من R^3 وحيث أن عددها 4 اكبر من بعد الفضاء حسب المبرهنة (1) فأن $n > r$ فأن هذا يؤدي أن المتجهات غير مستقلة.

مثال:- المتجهات $(1,2,3,0)$ و $(0,0,0,0)$ و $(1,1,2,0)$ و $(0,2,1,1)$ و $(2,1,3,0)$ هي غير مستقلة خطياً لأن حسب المبرهنة (3) يوجد متجه صفري ضمن هذه المتجهات.

مبرهنة:- لتكن $S = \{\vec{X}_1, \vec{X}_2, \ldots, \vec{X}_n\}$ مجموعة من المتجهات غير الصفرية في فضاء المتجهات V فأن S غير مستقلة خطياً اذا وفقط اذا كان أحد المتجهات على الأقل يمكن كتابته كتركيب خطي من البقية.

البرهان:- نفرض أن هناك قياسات $k_1, k_2, \ldots, k_n$ بحيث أن

$$k_1X_1 + k_2X_2 + \ldots + k_nX_n = 0$$

بما أن S مرتبطة خطياً فأنه يوجد على الأقل أحد هذه القياسات

Scanned by CamScanner

ليس صفراً لكن k_1

$$k_1x_1 = -k_2x_2 - k_3x_3 - \dots - k_nx_n$$

$$x_1 = \frac{-k_2}{k_1}x_1 - \frac{k_3}{k_1}x_3 - \dots - \frac{k_n}{k_1}x_n$$

$\therefore x_1$ تركيب خطي من البقية

وبالعكس نفرض أن أحد المتجهات يمكن كتابته كتركيب خطي من البقية ولكن x_1

$$\therefore x_1 = c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n$$

$$\Rightarrow -x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n = 0$$

بما أن أحد المعاملات لا يساوي صفراً (معامل x_1)

$\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}$ متجهات مرتبطة خطياً.

القاعدة والبعد: Basis and Dimension

تعريف: اذا كان V فضاء متجهات وأن $S = \{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}\}$

مجموعة منتهية من المتجهات في V يقال بأن S قاعدة الفضاء V اذا

Scanned by CamScanner

كانت :-

(١) S مستقلة خطياً

(٢) S تولد الفضاء

مثال (١) المجموعة $S=\{(1,0),(0,1)\}$ هي قاعدة تولد R^2

وذلك لأن S مستقلة خطياً اي نبحث

$$c_1(1,0)+c_2(0,1)=(0,0)$$

$$c_1=0 \quad , \quad c_2=0$$ ∴ S مستقلة خطياً

برهنا أن S تولد الفضاء R^2

$$c_1(1,0)+c_2(0,1)=(a,b)$$

$$c_1=a, \quad c_2=b$$

∴ S هي قاعدة تولد R^2

مثال (٢) :- المجموعة $S=\{(0,1,0),(-1,2,1),(3,2,2)\}$

هل تمثل قاعدة للفضاء R^3 .

Scanned by CamScanner

(33)

الحل: (1) لكي نثبت أنها مستقلة خطيا

$$C_1(0,1,0) + C_2(-1,2,1) + C_3(3,2,2) = (0,0,0)$$

$$0C_1 - C_2 + 3C_3 = 0 \quad \text{---(1)}$$
$$C_1 + 2C_2 + 2C_3 = 0 \quad \text{---(2)}$$
$$0C_1 + C_2 + 2C_3 = 0 \quad \text{---(3)}$$

$$\Longrightarrow C_3 = 0,\ C_2 = 0,\ C_1 = 0$$

وعليه فإن S مستقلة خطيا

(2) لكي نثبت أنها تولد R^3 نفرض أي متجه اعتباطي $\vec{X} = (a,b,c)$

$$C_1(0,1,0) + C_2(-1,2,1) + C_3(3,2,2) = (a,b,c)$$

$$\begin{aligned} 0C_1 - C_2 + 3C_3 &= a \\ C_1 + 2C_2 + 2C_3 &= b \\ 0C_1 + C_2 + 2C_3 &= c \end{aligned} \Longrightarrow \begin{aligned} -C_2 + 3C_3 &= a \quad \text{---(1)} \\ C_1 + 2C_2 + 2C_3 &= b \quad \text{---(2)} \\ C_2 + 2C_3 &= c \quad \text{---(3)} \end{aligned}$$

من المعادلة (1) و(3) نحصل على

$$\Longrightarrow \begin{aligned} 3C_3 &= a \\ +2C_3 &= c \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow 5C_3 = a + c \Longrightarrow \boxed{C_3 = \frac{a+c}{5}}$$

$$\boxed{C_2 = 3C_3 - a}$$ في المعادلة (1)

من المعادلة (2)

$$C_1 = b - 2C_2 - 2C_3$$
$$= b - 2(3C_3 - a) - 2\left(\frac{a+c}{5}\right)$$

Scanned by CamScanner

$$c_1 = b - 6\left(\frac{a+c}{5}\right) - a - 2\left(\frac{a+c}{5}\right)$$

$$\Rightarrow c_1 = b - \frac{2}{5}(4c - a)$$

R^3 تولد S ∴

وعليه فأن S تمثل الفضاء R^3 .

مثال :- هل أن المجموعة $S = \{M_1, M_2, M_3, M_4\}$ تمثل قاعدة لـ $M_{2\times 2}$ حيث :-

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الحل :-

$$c_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وعليه فأن :-

$c_1 = 0$
$c_2 = 0$
$c_3 = 0$
$c_4 = 0$

∴ M_1, M_2, M_3, M_4 مستقلة خطياً .

ولكن $M_{2\times 2} \ni \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ فأن

$$c_1\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Scanned by CamScanner

وعليه فإن $c_1 = a$, $c_2 = b$, $c_3 = c$, $c_4 = d$

$M_{2\times 2}$ تولد M_1, M_2, M_3, M_4 :

$M_{2\times 2}$ تمثل قاعدة لـ

مثال H.W :- هل أن المتجهات $S = \{(1,1), (-2,5)\}$

هي قاعدة لـ R^2 ؟

Scanned by CamScanner