ملاحظة :- المجموعة المستقلة لفضاء ذات بعد n يكون عدد عناصرها أقل أو مساوي لـ n. والمجموعة التي تولد الفضاء يكون عدد عناصرها اكبر أو مساوي لـ n عليه عدد عناصر القاعدة ويجب أن يكون يساوي n.

القاعدة = n ⟹ تولد الفضاء ≤ n ≤ مستقلة

مثال :- هل أن المجموعة $S=\{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}\}$ تمثل قاعدة لـ $P_3(t)$ حيث :-

$$\vec{x_1} = t^3 + t^2 + 1$$

$$\vec{x_2} = t^3 - 1$$

$$\vec{x_3} = t^3 + t^2$$

الحل :- نلاحظ أن عدد العناصر هي (3)
وأن بعد الفضاء هو (4) لأن

$$P_3(t) = n+1 = 3+1 = 4$$ بعد الفضاء

وعليه فأن $3 < 4$ اي أن عدد العناصر أقل من بعد الفضاء

∴ المجموعة لاتولد $P_3(t)$ ⟸ ∴ ليست قاعدة للفضاء $P_3(t)$

Scanned by CamScanner

ملاحظة : اذا كانت $S = \{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}\}$ قاعدة لـ V فأن $\{k\vec{x_1}, k\vec{x_2}, k\vec{x_3}\}$ قاعدة لـ V أيضاً حيث $k \neq 0$

مبرهنة (1) : اذا كانت $S = \{\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3}\}$ قاعدة لفضاء متجهات V فأن كل متجه في V يمكن كتابته بطريقة واحدة فقط على شكل تركيب خطي من متجهات S.

البرهان : نفرض أن $\vec{x}$ اي متجه في V وبما أن S تولد V فأن x يمكن كتابته كتركيب خطي من متجهات S.

نفرض أن $\vec{x} = c_1\vec{x_1} + c_2\vec{x_2} + c_3\vec{x_3} + \cdots + c_n\vec{x_n}$

وأن $\vec{x} = k_1\vec{x_1} + k_2\vec{x_2} + k_3\vec{x_3} + \cdots + k_n\vec{x_n}$

وعليه فأن

$$\vec{x} - \vec{x} = (c_1 - k_1)\vec{x_1} + (c_2 - k_2)\vec{x_2} + \cdots + (c_n - k_n)\vec{x_n}$$

وبما أن S مستقلة خطياً فأن

$$c_1 - k_1 = c_2 - k_2 = \cdots = c_n - k_n = 0$$

$$\Rightarrow c_i = k_i \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

Scanned by CamScanner

مبرهنة (2): اذا كانت $S=\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ مجموعة متجهات غير صفرية تولد فضاء متجهات V فأن هنالك قاعدة لـ V محتواه في S.

البرهان: اذا كانت S مستقلة خطياً فأن S قاعدة لـ V لأنها حققت الشرطين وبالتالي يمكن اعتبارها محتواه في نفسها وقد تم المطلوب واما اذا كانت مرتبطة خطياً (غير مستقلة) وأن أحد المتجهات يمكن كتابته على شكل تركيب خطي لبقية المتجهات الذي يكتب كتركيب خطي فنحصل على مجموعة (مستقلة أو مرتبطة) اذا كانت مستقلة فقد تم المطلوب واذا كانت مرتبطة خطياً نستمر حتى نحصل على مجموعة متجهات مستقلة خطياً وحيث أنها تولد الفضاء بالفرض فأصبحت قاعدة لـ V (أي أن S يحوي قاعدة).

مبرهنة (3): لتكن $S=\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ قاعدة للفضاء V و $T=\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_r\}$ مجموعة مستقلة خطياً فأن $n \geq r$.

Scanned by CamScanner

نتيجة : لتكن $S=\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ ، $T=\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_m\}$ قاعدتين لفضاء متجهات V فإن $m=n$

البرهان : بما أن S قاعدة لـ V وأن T مستقلة خطياً فإن $(m \leq n)$ وبما أن T قاعدة لـ V و S مستقلة خطياً فإن $(n \leq m)$ وعليه فإن $m=n$ $\therefore$

ملاحظة (أ) : البعد في R^2 هو (2) والبعد R^3 هو (3) وهكذا فإن

البعد في R^n هو n

البعد في $M_{n\times n}$ هو $m.n$

البعد في $P_n(R)$ هو $n+1$

ملاحظة (ب) : اذا كان $\dim V=n$ فإن قاعدة V هو أكبر مجموعة متجهات في V مستقلة وتحتوي على n من المتجهات كذلك قاعدة V هي أصغر مجموعة متجهات في V والتي تولد V ومثل هذه المجموعة تحتوي على n من المتجهات

Scanned by CamScanner

ملاحظة (٣):- اذا كان $\dim V=n$ فأن اي مجموعة

تحتوي $(n+1)$ من المتجهات في V يجب أن تكون مرتبطة

خطياً وأن المجموعة التي تحتوي $(n-1)$ من المتجهات لايمكن

أن تولد V.

مثال:- ليكن V فضاء جزئي من R^3 متولد من

$S=\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\}$ حيث

$\vec{x}_3=(1,1,2)$

$\vec{x}_2=(1,0,1)$

$\vec{x}_1=(0,1,1)$

جد $\dim V$ ؟

الحل:- بما أن V متولد من S فأن اي متجه في V (a,b,c)

يمكن كتابته بالشكل

$$k_1\vec{x}_1+k_2\vec{x}_2+k_3\vec{x}_3=(a,b,c)$$

حيث k_1,k_2,k_3 اعداد حقيقية

لكن المجموعة S مرتبطة خطياً لأن المتجه الثالث

$$\vec{x}_3=\vec{x}_1+\vec{x}_2$$

عند حذف x_3 نحصل على $S_1=\{\vec{x}_1,\vec{x}_2\}$ وهي أيضاً تولد V

Scanned by CamScanner

نبين أن S_1 مستقلة خطياً.

$$k_1x_1 + k_2x_2 = 0$$

$$k_1(0,1,1) + k_2(1,0,1) = (0,0,0)$$

$$\Rightarrow k_1 = 0 \text{ و } k_2 = 0$$

$\therefore S_1$ مستقلة خطياً.

$\Leftarrow S_1$ قاعدة (الفضاء الجزئي V عدد عناصرها 2)

$$\therefore \dim V = 2$$

مبرهنة: اذا كانت S مجموعة مستقلة خطياً من متجهات في فضاء منتهي البعد V فأنه يوجد قاعدة T لـ V بحيث تحتوي S.

مثال: لتكن U فضاء جزئي من R^3 بما أن $\dim R^3 = 3$ فأن $\dim U$ أما.

(١) $\dim U = 0 \Leftarrow$ $U = \{0\}$ نقطة

(٢) $\dim U = 1 \Leftarrow$ U مستقيم يمر بنقطة الأصل

(٣) $\dim U = 2 \Leftarrow$ U مستوى يمر بنقطة الأصل

(٤) $\dim U = 3 \Leftarrow$ U الفضاء بأكمله.

Scanned by CamScanner

مبرهنة: ليكن U ، W فضائين جزئيين من الفضاء V فإن

$$\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$$

حيث $U+W$ يتألف من كل المتجهات $\vec{x}+\vec{y}$ حيث $\vec{x} \in U$ ، $\vec{y} \in W$ أي أن

$$(U+W) = \{\vec{x}+\vec{y} : \vec{x} \in U, \vec{y} \in W\}$$

Scanned by CamScanner