أدوات بناء الفكر الرياضي

أولا: الحدس أداة الخصوبة:

لقد حدد كتاب التعريفات معنى الحدس بأنه " سرعة انتقال الذهن من المبادئ إلى المطالب" كما حدد معجم الصحاح معنى الحدس بأنه " الإدراك المباشر لموضوع التفكير. وله أثره في العمليات الذهنية المختلفة فما يلاحظ في الإدراك الحس يسمى **حدس حسيا**، وما يكون أساسا للبرهنة والاستدلال يسمى **حدسا عقليا**، فبالحدس ندرك حقائق التجربة كما ندرك الحقائق العقلية، وبه نكشف عن أمور لا سبيل إلى الكشف عنها عن طريق سواه، وهو بهذا أشبه بالرؤية المباشرة والإلهام. ومنهم من يرى أن الحدس أداة الاختراع، إذ أنه يمد الذهن بمقترحات تمد النقاش بالخصوبة، فالبديهيات والمسلمات ادعاءات حدسية قد تتفق مع الحواس، لكن العمل العقلي يتطلبها وهناك من القضايا التي تسمى بالحدسية أو الأحاجي، وهي قضايا يقبلها البعض دون إقامة البرهان عليها، و إنما تم قبولها بالحدس فالقضايا من نوع (بديهيات إقليدس) و(مسلمات بيانو) و (أحجية جولدباخ "كل عدد زوجي هو مجموع عددين أوليين").

لقد اهتم الرياضيون بالحدس منذ القدم . فقد كان الحدس المولد الرئيسي للرياضيات ، إذ أن ديكارت يعتقد أن أساس المعرفة هو الحدس.

وللحدس ثلاث أنواع إحداهم حدس حسي والآخران حدسان عقليان:

1. **حدس حسي:** هو ذلك الحدس أو التخمين الذي تقوده الحواس، ويبنى عليها من خلال شكل أو هيئة أو نعومة أو خشونة أو صوت أو لون. وعلى الرغم من أهميته إلا أنه غير مأمون العواقب. فقد يحس الإنسان أن الجسم الثابت متحرك **(كما في الإحساس بحركة القطار الثابت من خلال قطار متحرك مواز له في المحطة)**، أو العكس. وعلى الرغم من ذلك فأن اللجوء إلى هذا الحدس أمر لا بد منه في تعليم الصغار، وفي إجراء التجارب.

2. **حدس استقرائي:** وهو حدس عقلي يضيف للخبرة الخاصة توقعا عاما أي صياغة حكم عام من حكم خاص، فبعد إعادة تجربة عدد غير قليل من المرات وتكون النتيجة نفسها في كل مرة عندها يحدس القائم بالتجارب بأن للتجربة نفس النتائج، ولا يخلو هذا الحدس من مخاطر على الرغم من اعتماده على المنهج العلمي في أغلب الأحيان(**قد يأمن السارق على نفسه من الشرطة لأنه قام بالسرقة عدة مرات ولم ينتبه إليه احد).**

3. **حدس العدد المحض:** وهو حدس عقلي أيضا يكّون بناءات ذهنية تشيد من العدد، فالعدد 7 مثلا يمثل البناءات الذهنية: 1+6، 2+5، 3+4. وهكذا باعتبار أن 2+5 إنشاءات ذهنية أيضا، ولذا فأن الحساب بشكل عام هو إحدى نتائج حدس العدد المحض. إن **مبدأ الاستقراء الرياضي** هو احد طرق البرهان، الذي يجعل العدد يلعب دورا في بيان صحة القضية حيث يقول المبدأ:" **إذا كانت قضية ما صحيحة بالنسبة للعدد واحد و إذا برهنا القضية صحيحة للعدد n+1 مع افتراض أنها صحيحة بالنسبة للعدد ن فأنها ستكون صحيحة بالنسبة لجميع الأعداد الصحيحة الموجبة**".

أهمية الحدس:

أهمية الحدس كبيرة في الرياضيات وفي تقدم الرياضيات باستمرار، ويمكن تناول أهميته فيما يلي:

1. إن الحدس ضروري للابتكار ويمثل التصور السريع قبل التحليل وهو الإلهام الذي يقترح المبادرة، وله نوع من الحضور في كل خطوة فهو يعالج انسجام الكل والجزء ليهيئ مقترحا لا يعد في تلك اللحظة يقينا ولكنه بدون شك يبدو وكأنه يقينا يدفع إلى الابتكار والاختراع.
2. يضيف الحدس بساطة وسهولة واقتصادا في الوقت، للتعامل بالرياضيات وخاصة في مجال المجموعات المنتهية. ويمدنا بالادعاء الذي يمدنا باليقين عند التحقيق، ولكن ينبغي أن يحسن استعماله. مثلا إيجاد حل لزوج المعادلات $x^y = 8$ و $y^x = 9$، حيث لم تتوصل المعرفة الرياضية إلى إيجاد طريقة لحل هذا النوع من

المعادلات، في الوقت نفسه يشير الحدس إلى أن $x=2$ و $y=3$ يمثل حلا، ويمكن التيقن منه بالتعويض. ومثال اخر ما العددان اللذان مجموعهما 15 وحاصل ضربها 56؟ الجواب الحدسي هما 7 و 8.

3. إن الحدس مهم في مجال الاستفادة من خبرة سابقة تكرارها غير ضروري وغير اقتصادي ولا يبعث عن وعي جيد لطبيعة الرياضيات.

4. إن الحدس مصدر جيد لتهيئة مستلزمات البناء المعرفي، ويحتاج إلى البديهيات والمسلمات وقسم من التعريفات والشروط الضرورية والكافية لإنشاء معرفة ما أو عمل ما.

ثانيا: المنطق أداة اليقين:

لقد أعطى كتاب التعريفات معنى المنطق بأنه " هو آلة قانونية تعصم مراعاتها الذهن من الخطأ في الفكر"، أما في معجم الصحاح فقد أضافوا العرب إلى ما تقدم على المنطق اسم " معيار العلوم ".

أن من له إلمام بدراسة القوالب المنطقية يستطيع أن يُلزِم و يُلزَم بأن قيمة صدق قضية هي قيمة صدق قضايا أخرى قد تبدو مختلفة تماما عنها. والقضايا الأربعة الآتية مثال على ذلك:

1. الرياضيات مهمة، أو المنطق مهم.
2. إذا كانت الرياضيات غير مهمة، فأن المنطق مهم.
3. إذا كان المنطق غير مهم، فأن الرياضيات مهمة.
4. ليس صحيحا أن نقول أن الرياضيات غير مهمة والمنطق غير مهم.

إن قوالب هذه القضايا متكافئة منطقيا، وأن قيمة صدق أي واحدة منهن تصلح كقيمة صدق لأية واحدة من البقية.

أما المنطق الرمزي فأنه يعتمد على طائفة من الرموز والإشارات لأداء المعاني والأحكام بدلا من الألفاظ والعبارات اتقاءً لغموضها والتباسها من جهة، وتعميمها من

جهة أخرى، ويتم فيه البرهنة عن طريق تأليفات معينة ولا ضرورة للتفريق بين المنطق الرمزي والمنطق الرياضي.

إن دراسة المنطق الرياضي من متطلبات الشهادة في الرياضيات يعتمد في بدايته على مسلمات أساسية، ألأولى مسلمة الثالث المرفوع، والثانية مسلمة النفي، والثالثة و الرابعة و الخامسة و السادسة مسلمات تبين أحكام الربط (و) و (أو) و (إذا كان– فأن) و (إذا وإذا فقط)، أما المسلمة السابعة فهي أحكام نفي السور الكلي والسور الجزئي . لكننا نود الوقوف عند مسلمتين ألأولى هي مسلمة الثالث المرفوع، أي أن كل قضية إما صادقة أو كاذبة ولا توجد قضية صادقة و كاذبة في الوقت نفسه، ولا توجد قضية لا صادقة ولا كاذبة. إن المسلمة هذه تساعدنا في قبول مسلمات أخرى كان تقبل أن يكون نفي القضية الصادقة كاذبة، وعلى هذا الأساس نقبل نموذجا للبرهان يبتدأ بافتراض نفي المطلوب، ونصل إلى ما ينافي المفروض، وبذلك يكون المطلوب صادقا.

أما المسلمة الثانية فهي مسلمة نفي الأسوار أي نفي قضايا من النوع كل x تحمل الصفة y، والتي تقابلها $(\forall x, y(x))$ مثلا "كل طالب يرتدي الزي الموحد"، ويكون القالب المنفي حسب المسلمة على هيئة $(\exists x, \neg y(x))$ أي أن هناك x لا تحمل الصفة y، أي أن نفي القضية في المثال أعلاه يكون "هناك طالب لا يرتدي الزي الموحد".

وأخيرا ، يعد المنطق هو طور شباب الرياضيات ، والرياضيات هي طور رجولة المنطق.

أهمية المنطق :

1. هو العلم الذي يبحث في تحديد الشروط التي تسمح لنا الانتقال من أحكام فرضت صحتها إلى أحكام أخرى.
2. يعتبر المنطق جزء من العمليات الجبرية والعمليات الفكرية.
3. إن دراسة المنطق الرياضي من متطلبات الشهادة في الرياضيات.

انتماء القضية الرياضية و انتماء القضية العلمية:

إن استعمال مصطلح القضية أكثر شيوعا في كتب المنطق التراثية منها خصوصا، فضلا عن أن مصطلح العبارة أكثر حداثة ولا يحبذه أساتذة اللغة بهذا المكان، لأن العبارة من التعبير والتعبير ليس خبرا. وإن مستعمل أحد المصطلحين العبارة أو القضية يهدف إلى أن يكون المصطلح معبرا عن جملة خبرية بمواصفات معينة. إن القضية التي تستعمل في كتب الرياضيات للدلالة على شيئين الأول هو الاستعمال العام، والثاني هو الاستعمال الخاص على مبرهنة. ومن المعلوم أن أسس البناء المعرفي و مراحل تشييده تتعلق بجمل خبرية والذي يخص الرياضيات نوع خاص من القضايا وهي الجمل الخبرية غير المتناقضة والخالية من اللبس التحليلية منها والمسلمة بها. أن الشيء الذي يجب معرفته أن كل من الجمل الاستفهامية والجمل الأمرية والجمل التعجبية ليست عبارات وبالتالي فأن كل الجمل غير الخبرية ليست قضايا رياضية.

فالجمل الخبرية الخالية من اللبس: **هي الجمل التي تخبر بوضوح لا يقبل تفسيرا يؤثر على صدقها. مثلا كل طالب إنسان.**

أما الجمل الخبرية المتناقضة: **فهي الجمل التي يقضي قبولها عدم قبولها، و يقضي عدم قبولها قبولها. مثلا الثلاثة أكبر من الخمسة .**

إن هذه القضايا ليست من نوع واحد، إذا نظرنا إليها على أساس منهج التحري عن صدقها (طريق اليقين من صدقها). ويتم ذلك على أساسين: ألأول على أساس إمكانية إقامة الدليل على صحتها أو بطلانها قبل المشاهدة أو بعدها (قبل أو بعد توفر الحقائق)، والأساس الثاني كون العبارة واقعية أو غير واقعية حسب ما توفره من المعلومات وكالاتي:

1. قضايا مسلم بها: وهي القضايا التي يقام الدليل على صحتها أو بطلانها عن طريق العقل المجرد (قبل المشاهدة) مثل (مجموع زوايا المثلث 180) أو (الثلاثة أكبر من الخمسة).

2. قضايا لاحقة: وهي القضايا التي لا يحكم على صدقها إلا بعد توفر الحقائق (بعد المشاهدة) مثل (الشمس أكبر من الأرض) أو (الماء يغلي بدرجة مئة مئوية).

3. قضايا تحليلية: وهي القضايا التي يحكم على صدقها من تحليل معاني الكلمات المستعملة فيها مثل (كل ضلعين متقابلين في متوازي الأضلاع متساويان).

4. قضايا تركيبية: وهي القضايا التي يحكم على صدقها بوساطة التحري عن محتواها الواقعي مثلا (حمورابي ملك عادل).

ولربما أقر بعضهم صدق بعض الأمثلة أعلاه، ولكن إثبات ذلك الإقرار ليس بالشيء البسيط دائما، لأن ذلك الإثبات يتطلب منهجا مختلفا في اليقين من اختلاف نوع القضايا. فبعضها يحتاج منهجا تجريبيا و البعض الآخر يحتاج منهجا رياضيا والثالث يحتاج منهجا تاريخيا، وهكذا .
وإذا دمجنا التقسيمين في بعضهما لنتج أربع أنواع حسب الجدول الأتي:

	مسلم بها	لاحقة
تحليلية	تحليلية مسلم بها	تحليلية لاحقة
تركيبية	تركيبية مسلم بها	تركيبية لاحقة

الاكسوماتيك (أداة الإخراج)

إن النظام البديهي للرياضيات عبارة عن زوج مرتب من المبادئ، والبناء المتماسك الذي يقوم عليها. أي " إن مجموعة الأوليات (الاكسيومات) التي يختارها الرياضي لتشييد صرح بناء رياضي معين وهذا البناء المعين نفسه شكل فضاءً منطقياً متماسك يطلق عليه اسم الاكسوماتيك" ، فالاكسوماتيك إذا، هو منظومة من الأوليات التي يقوم عليها بناء رياضي معين، بناء يختلف عن بناء رياضي مماثل باختلاف الأوليات التي يقوم عليها كل منهما. فالهندسة الاقليدية وهندسة ريمان وهندسة لوباتشيفكي وغيرها يشكل كل منها اكسيوماتيا خاصا، يختلف عن غيرها بإختلاف أولياته أو بعض منها أو احدها.

فالنظام البديهي (الاكسيوماتيك) هو نظام فرضي استنتاجي. صدق النتائج فيه مرتبطة بقبول الفروض(أي أن صحة النتائج مرتبطة بقبول البديهيات). إذا فإن البديهية حسب مفهوم الرياضيات المعاصرة تستمد مشروعيتها من صلاحيتها لتشيد معرفة متماسكة منتجة وليست لكونها صادقة لأنها تعبر عن بداهة مطلقة. ومن أجل استعراض شروط النظام البديهي ، نود أن نتناول المبادئ (الكلمات الأولية ، العبارات الأولية) بالإضافة إلى أمور أخرى نعتقد أنها مهمة في إعطاء نظرة كلية لإخراج المعرفة الرياضية بمنهج فرضي استنتاجي.

الكلمات الأولية (اللامعرفات):

إن تعريف كل الكلمات المستعملة في بناء معرفة معينة غير ملزمة، ويجب الاتفاق على مجموعة من الكلمات التي نقبلها بدون تعريف. ويستمد معناها من العرف الشائع أو السياق التعبيري، أو أنها عرفت في مرحلة سابقة من مراحل الفكر الرياضي كخطوة أولى، إن هذه الكلمات تعرف بالكلمات الأولية، ومن أمثلتها **النقطة، المستقيم** في الهندسة، و **المجموعة، الانتماء، العنصر** في نظرية المجموعات.

القضايا ألأولية:

القضايا ألأولية عبارات تحليلية مسلم بها تصاغ عادة من الكلمات الأولية والكلمات المعرفة، تبعا لتسلسل تلك القضايا في البناء الرياضي، فمثلا إذا كتبت بعض المسلمات قبل التعريفات فأنها تكتب بكلمات أولية فقط . أما إذا كتبت المسلمات بعد التعريفات فأنها تكتب بكلمات أولية وكلمات معرفة. وقد يبنى التعريف على العبارات أولية والكلمات ألأولية والكلمات المعرفة. فعند تعريف الزمرة نحتاج إلى كلمات أولية مثل خاصية التجميع، أو خاصية وجود عنصر محايد تحت تأثير العملية. إن القضايا الأولية تقبل بدون برهان وذلك لأن البرهان يحتاج إلى معطيات، إلى قيم، إلى وحدات قياس.

ألآن نقدم العبارات الأولية حسب مصطلحاتها الواردة في كتب الرياضيات على الرغم من أن الرياضيات الحديثة لا تفرق بين تلك المصطلحات من حيث الوظيفة.
البديهيات: وهي قضايا بلغت حدا من الوضوح لا يمكن أن نهتدي إلى قضايا أشد منها وضوحا وتقبل بدون برهان، مثل الكل أكبر من الجزء.

المسلمات: وهي قضايا لم تبلغ وضوح البديهيات لكنها مطالب يتقدم بها الرياضي لتؤدي دور نقطة البداية أو القاعدة التي يستند عليها البناء الرياضي على شكل قيم تودي دور الرياضي. مثلا كل النتائج السابقة لبحث معين تؤخذ بمثابة مسلمات لبحوث جديدة.

التعريفات: عبارة عن ذكر شيء يستلزم معرفة شيء آخر وهذا يتفق مع وجود كلمات أولية أي كلمات متفق على معناها، تسبق الكلمة المراد تعريفها. إن الجدير بالذكر هو أن التعريفات لها صيغ مختلفة باختلاف اختيار الكلمات غير المعرفة، وأسبقية المعرفات، فقد نعرف العدد الزوجي بأنه العدد الذي يقبل القسمة على اثنين بشرط أننا عرفنا قابلية القسمة.

النقيض: إن نقيض العبارة هو نفيها، أو أحد حالات نفيها والحالات تسمى نقائض البديهة، فإذا كانت $x > y$ بديهية فأن نقائضها هي $x < y$ و $x = y$ $(x \geq y)$.

وبعد أن تناولنا الكلمات الأولية و القضايا ألأولية سوف نتناول ألان أنواع المبرهنات (القضايا)التي نقبلها بعد البرهان. وإن العبارات التي لا نقبلها إلا ببرهان لعل مسميات مختلفة تبعا للدور الذي تلعبه المبرهنة في البناء:

1. **النظرية (المبرهنة):** وهي القضية التي تحتاج إلى برهان وتمثل ما تقدمه مِفْصلاً رئيسيا في بناء رياضي معين تنشد إقامته. وأن في كلمة نظرية في اللغة العربية لبس لأنها تستعمل في مكانين مختلفين أولهما قضية نقبلها بعد البرهان مثل نظرية فيثاغورس، وثانيهما مجموعة قضايا قسم منها مقبولة بدون برهان والقسم الآخر تقبل ببرهان وتمثل اتجاها فكريا فلسفيا والذي يقابلها بالانكليزية (Theory) ومن الأمثلة على ذلك نظرية المعادلات التفاضلية أو نظرية المجموعات. ولهذا تستعمل كتب الرياضيات كلمة مبرهنة بدلا من نظرية في الاستعمال الأول، وتكون مجموعة الكلمات الأولية والعبارات الأولية والمبرهنات تمثل نظرية حسب الاستعمال الثاني.

2. **القضية:** تم استعراض المفهوم العام للقضية، أما المفهوم الخاص فهو الذي نقدمه هنا وهو النظرية (بمعنى المبرهنة) لكنها لا تمثل فيما تقدمه مِفْصلاً كبيرا ، وإنما إحدى المبرهنات التي تكون أهميتها بالمستوى الثاني.

3. **النتيجة:** وهي قضية تمثل حالة خاصة من قضية أو مبرهنة ويكون برهانها معتمدا اعتمادا مباشرا على المبرهنة التي قبلها.

4. **ممهدة:** وهي قضية تقبل بدون برهان ولا تمثل ما تقدمه حالة في صلب موضوع البناء الرياضي المنشود، لكنها تساعد في البناء حيث يؤتى بها كي تساعد في إقامة البرهان أو قضية أخرى في صلب موضوع البناء الرياضي.

أسئلة:

1. ما معنى الحدس، وما هي أنواعه.
2. ما هو أهمية الحدس بالنسبة لتقدم الرياضيات.
3. ما معنى المنطق.
4. ما هو أهمية المنطق.
5. إن دراسة المنطق الرياضي اعتمد في بدايته على مسلمات أساسية، اذكر هذه المسلمات مع شرح المسلمة الثانية.
6. ما المقصود بالمنطق الرمزي.
7. ما العلاقة بين الرياضيات والمنطق .
8. عرف كلا مما يأتي: الجملة الخبرية، البديهيات، المسلمات، التعريفات، النقيض، المبرهنة.
9. ما هي أنواع القضايا التي نقبلها بعد البرهان.
10. ماذا نعني بالكلمات الأولية.
11. ما معنى الاكسوماتيك.
12. عرف كلا من القضايا المسلم بها والقضايا اللاحقة والقضايا التحليلية والقضايا التركيبية مع ذكر مثال لكل قضية.
13. على ماذا تعتمد القضايا في حالة قبولها أو عدم قبولها.
14. ادمج القضايا التحليلية والتركيبية والمسلم بها ولاحقة .