مثال: جد قاعدة وبعد الفضاء الجزئي W من R^4 حيث:

$$W=\{(a,b,c,d): c=a-b \text{ ، } d=a+b \text{ ، } a,b\in R\}$$

الحل:

المتغيرات الحرة هي فقط a,b (التي تعتمد عليها)

∴ البعد يساوي $\dim W=2$ لإيجاد القاعدة نضع:

① $a=1$ ، $b=0 \longrightarrow c=1$ ، $d=1 \Rightarrow (1,0,1,1)$

② $a=0$ ، $b=1 \longrightarrow c=1$ ، $d=1 \Rightarrow (0,1,1,1)$

∴ القاعدة للفضاء الجزئي W هي

$$=\{(1,0,1,1)\text{ ، }(0,1,-1,1)\}$$

مثال: ليكن U فضاء جزئي من R^4 فأن $(a,b,a-b,d)$

$$U=\{(a,b,c\text{ ، }a+b): a,b,c\in R\}$$

جد قاعدة وبعد U

الحل: المتغيرات الحرة هي a,b,c

① $a=1$ ، $b=0$، $c=0 \longrightarrow a+b=1 \Rightarrow (1,0,0,1)$

② $a=0$ ، $b=1$، $c=0 \longrightarrow a+b=1 \Rightarrow (0,1,0,1)$

③ $a=0$ ، $b=0$ ، $c=1 \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow (0,0,1,0)$

Scanned by CamScanner

$\therefore \dim U = 3$

القاعدة هي :-

$= \{ (1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,0) \}$

الفضاءات الجداء الداخلي :-

تعريف :- ليكن V فضاء متجهات فأن الجداء الداخلي على V هو الدالة التي تعطي عدداً حقيقياً $\langle V \text{ و } U \rangle$ لكل زوج من المتجهات $\vec{v}$ و $\vec{u}$ والتي تحقق الشروط الآتية :-

(١) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$ (بديهية التناظر)

(٢) $\langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$ (بديهية الاضافة)

(٣) $\langle K\vec{u}, \vec{v} \rangle = K\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ (حيث K عدد ثابت وأن $\vec{w} \in V$)

(٤) $\langle \vec{v}, \vec{v} \rangle > 0$ وأن $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$ اذا وفقط اذا كان $\vec{v} = \vec{0}$

نستنتج من التعريف ما يأتي :-

(١) $\langle 0, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, 0 \rangle = 0$

(٢) $\langle \vec{u}, \vec{v}+\vec{w} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle + \langle \vec{u}, \vec{w} \rangle$

Scanned by CamScanner

$$\langle \vec{u}, k\vec{v} \rangle = k\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$$ (٣)

مثال (١): ليكن $\vec{u}=(u_1,u_2)$ و $\vec{v}=(v_1,v_2)$ متجهين في R^2 وليكن:

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1v_1 - v_2u_1 - v_1u_2 + 3u_2v_2$$

هل أن $\langle u, v \rangle$ تمثل جداء داخلي؟

الحل:

١) $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = u_1v_1 - v_2u_1 - v_1u_2 + 3u_2v_2$

$$= v_1u_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 3v_2u_2$$

$$= \langle \vec{v}, \vec{u} \rangle$$ (التناظر)

٢) $\langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{w} \rangle = (u_1+v_1)w_1 - w_2(u_1+v_1) -$
$w_1(u_2+v_2) + 3(u_2+v_2)w_2$

$$= u_1w_1 + v_1w_1 - w_2u_1 - w_2v_1 - w_1u_2 - w_1v_2 +$$
$$3u_2w_2 + 3v_2w_2$$

$$= u_1w_1 - u_1w_2 - u_2w_1 + 3u_2w_2 + v_1w_1 - v_1w_2 - v_2w_1$$
$$+ 3v_2w_2$$

$$= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$ الإضافة

(3) $\langle ku, v\rangle = kU_1V_1 - V_2kU_1 - V_1kU_2 + 3kU_2V_2$

$= k(U_1V_1 - V_2U_1 - V_1U_2 + 3U_2V_2)$

$= k\langle u, v\rangle$ (التجانس)

(4) $\langle v, v\rangle = V_1^2 - V_2V_1 - V_1V_2 + 3V_2^2$

$= V_1^2 - 2V_1V_2 + V_2^2 + 2V_2^2$

$= (V_1 - V_2)^2 + 2V_2^2 > 0$

إذا $\langle v, v\rangle = 0 \iff \langle V_1 - V_2\rangle^2 + 2V_2^2 = 0$

$\iff V_1 = 0 = V_2$

$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle$ ضرب داخلي

ملاحظة (1) :-

$\langle ku, kv\rangle = k\langle u, kv\rangle$

$= k^2\langle u, v\rangle$

(2) الجداء الداخلي الاقليدي على R^n هو

$\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = U_1V_1 + U_2V_2 + U_3V_3 + \cdots + U_nV_n$

$\vec{u} = (U_1, U_2, \ldots, U_n)$ ، $\vec{v} = (\vec{V_1}, \vec{V_2}, \ldots, \vec{V_n})$

$\langle \vec{u}, \vec{u}\rangle = U_1^2 + U_2^2 + \cdots + U_n^2$

Scanned by CamScanner

مثال (2): $\vec{u}=(u_1,u_2)$ ، $\vec{v}=(v_1,v_2)$

برهن أن $\forall \vec{u},\vec{v}\in R^2$

$\langle u,v\rangle = 6u_1v_1 + 2u_2v_2$

هو جداء داخلي على R^2.

الحل:

(1) $\langle u,v\rangle = 6u_1v_1 + 2u_2v_2$

$= 6v_1u_1 + 2v_2u_2 = \langle v,u\rangle$ (التناظر)

(2) $\langle u+v,w\rangle = 6(u_1+v_1)w_1 + 2(u_2+v_2)w_2$

$= 6u_1w_1 + 6v_1w_1 + 2u_2w_2 + 2v_2w_2$

$= 6u_1w_1 + 2u_2w_2 + 6v_1w_1 + 2v_2w_2$

$= \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$ (الأضافة)

(3) Let $K\in R$ Then $\langle ku,v\rangle = K6u_1v_1 + 2Ku_2v_2$

$= K(6u_1v_1 + 2u_2v_2)$

$= k\langle u,v\rangle$ (التجانس)

(4) $\langle v,v\rangle = 6v_1^2 + 2v_2^2 > 0$ if $\langle v,v\rangle = 0$

$\iff 6v_1^2 + 2v_2^2 = 0 \iff v_1 = v_2 = 0$

$\therefore \langle u,v\rangle$ هو جداء داخلي على R^2.

Scanned by CamScanner

مثال (٣):- ليكن V هو فضاء الدوال المستمرة على الفترة

$[0, 1]$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$$

بر هن أن $f, g \in V$ كل

$\langle f, g \rangle$ هو جداء داخلي على V.

الحل:-

(1) $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt$

$= \int_0^1 g(t)\, f(t)\, dt = \langle g, f \rangle$ (التناظر)

(2) Let $h \in V$ $\quad \langle f+g, h \rangle = \int_0^1 (f+g)(t)\, h(t)\, dt$

$= \int_0^1 (f(t) + g(t))\, h(t)\, dt$

$= \int_0^1 f(t) h(t)\, dt + \int_0^1 g(t) h(t)\, dt$

$= \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$ (الإضافة)

(3) $\langle kf, g \rangle = \int_0^1 k f(t)\, g(t)\, dt$

$= k \int_0^1 f(t)\, g(t)\, dt = k \langle f, g \rangle$ (التجانس)

(4) $\langle f, f \rangle = \int_0^1 [f(t)]^2\, dt > 0$

let $\langle f, f \rangle = 0 \iff \int_0^1 f^2(t)\, dt = 0 \iff f = 0$

$\therefore$ $\langle f, g \rangle$ هو جداء داخلي.

Scanned by CamScanner