

$$2 - \alpha = 1$$

$$\alpha = 1$$

$$2 - \alpha = -1$$

$$\alpha = 3$$

$$(1) \quad \alpha = 1 \quad \text{less}$$

$$\alpha > 1 \Rightarrow x = 0$$

is repelling

$$\alpha = 1 \Rightarrow x = 0$$

is indifferent

$$\alpha < 1 \Rightarrow x = 0$$

is attracting

$$\alpha = 3 \quad \text{less}$$

Types of bifurcation :

أنواع التفرع

نوع التفرع السرجي

(Saddle-node)

[1] Saddle-node bifurcation (Tangent bifurcation)

Let $\{f_\alpha(x) : x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ be a family of maps
 $\alpha \in \mathbb{R}$

We say that f_α has a saddle-node bifurcation

at $\alpha = \alpha_0$

عند $\alpha = \alpha_0$

1 - $\alpha > \alpha_0$ ($\alpha < \alpha_0$) f_α has no fixed point

2 - $\alpha = \alpha_0$ has only one fixed point

3 - $\alpha < \alpha_0$ ($\alpha > \alpha_0$) f_α has two fixed points

مع تغير α ، يتغير عدد النقاط الثابتة

one of them is attracting and another is repelling

بالا جاذبة وتنقلب الى طاردة

بالا طاردة وتنقلب الى جاذبة

($\alpha = \alpha_0$) تحريش للتعب بحدوثه عامة

التعب في نقطة معينة يعني التغير في عدد انواع النقاط الثابتة

قبل هذه النقطة وبعد هذه النقطة وفي هذه النقطة



Example:- $f(x) = x^2 + x - \alpha$ $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x) = x$$

$$x^2 + x - \alpha = x \Rightarrow x^2 + x - \alpha - x = 0$$

$$x^2 - \alpha = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{\alpha}$$

1. $\alpha \leq 0$ Then f has no fixed point.
2. $\alpha = 0$ then $x=0$ is the only f.p for f .
3. $\alpha > 0$ then f has two f.p.

نثبت

$$f'(x) = 2x + 1$$

نقويها القيمة الموجبة

$$|f'(\sqrt{\alpha})| > 1 \Rightarrow |2\sqrt{\alpha} + 1| > 1$$

$$|f'(-\sqrt{\alpha})| = \Rightarrow |-2\sqrt{\alpha} + 1| < 1$$

جاذبة

وحتى نتحقق فليها داخل حثاينه

$$-1 < -2\sqrt{\alpha} + 1 < 1$$

$-\sqrt{\alpha}$ is attracti

$$-2 < -2\sqrt{\alpha} < 0$$

$$\alpha \in (0, 1)$$

$$1 > \sqrt{\alpha} > 0$$

$$1 > \alpha > 0$$

$\therefore f_{\alpha} = x^2 + x - \alpha$ has a S.N.B at $\alpha = 0$

Example 1. $f(x) = \alpha e^x$, $f'(x) = e^x$

1. if $\alpha > -1$, f has no f.p.

2. if $\alpha = -1$, f has only one f.p. $\boxed{x=0}$

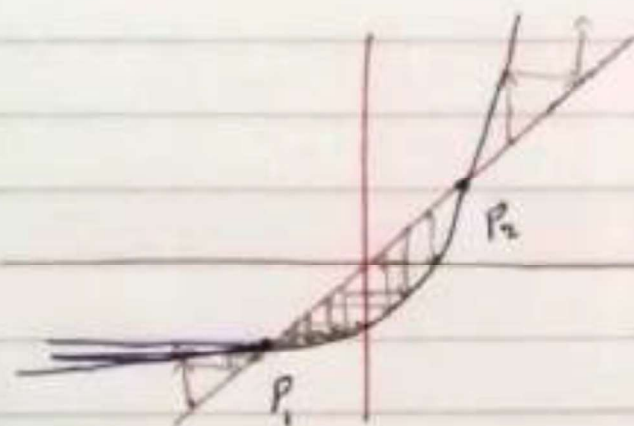
3. if $\alpha < -1$ f has two f.p.s. P_1, P_2

$\therefore P_1$ is attracting

$\therefore P_2$ is repelling

$\therefore e^x + \alpha$ has a S.N.B

at $\alpha = -1$



Quadratic family

العائلة التربيعية

Example: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = x^2 + c$$

Solution

$$x^2 + c = x$$

$$x^2 - x + c = 0 \quad \text{فل بالشكل}$$

$$a=1, \quad b=-1, \quad c=c$$

ليس له حل في عقل
أعداد الكسرية

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$$

أخذ القيمة المميز

$$1-4c=0 \Rightarrow c=\frac{1}{4} \text{ and } x=\frac{1}{2}$$

التي هي موجبة

$$2-1-4c < 0 \Rightarrow c > \frac{1}{4} \text{ and } x \notin \mathbb{R}$$

$x_1 \in \mathbb{R}$

$$3-1-4c > 0 \Rightarrow c < \frac{1}{4} \nearrow x_1 \in \mathbb{R} \text{ خاصة المعادله}$$

1. if $c > \frac{1}{4}$ then f has no f.p.

2. if $c = \frac{1}{4}$ then f has only $x = \frac{1}{2}$ f.p.

3. if $c < \frac{1}{4}$ then f has two fixed points

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{1-4c}}{2}, \quad x_2 = \frac{1 - \sqrt{1-4c}}{2}$$

$$\bar{f}(x) = 2x$$

$$|\bar{f}(x)| = \left| x \left(\frac{1 + \sqrt{1-4c}}{2} \right) \right| = \left| \frac{1 + \sqrt{1-4c}}{2} \right| > 1 \text{ اكل عند ما يكون طارئة}$$

$$-1 > 1 + \sqrt{1-4c} \quad \text{or} \quad 1 + \sqrt{1-4c} > 1$$

$$\Rightarrow -2 > \sqrt{1-4c} \quad \text{or} \quad \sqrt{1-4c} > 0$$

$$4 < 1-4c \quad \text{or} \quad 1-4c > 0$$

$$3 < -4c \quad \text{or} \quad -4c > -1$$

$$\frac{-3}{4} > c \quad \text{or} \quad c < \frac{1}{4}$$

$$\bar{f}(X_2) = |1 - \sqrt{1-4c}| < 1 \quad \text{صا الكلا عننا تنظر حيازة}$$

$$|1 - \sqrt{1-4c}| < 1$$

$$-1 < 1 - \sqrt{1-4c} < 1$$

$$-2 < \sqrt{1-4c} < 0$$

$$4 > 1-4c > 0$$

$$3 > -4c > -1 \quad \text{4 دوقم}$$

$$\frac{-3}{4} < c < \frac{1}{4}$$

$$x_2 \text{ is a trapping on } (-\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$$

$\therefore$ It has a saddle-node bifurcation

Period doubling bifurcation

نصف ثنائي الرتبة

Let $F_\alpha = \{f_\alpha : \alpha \in S, S = \mathbb{R} \text{ or } S = \mathbb{C}\}$

We say F_α has a P.D.B if at $\alpha = \alpha_0$

1- If $\alpha < \alpha_0$ ($\alpha > \alpha_0$) f_α has only one attracting f.p.

2- If $\alpha = \alpha_0$ Then f_α has indifferent f.p.

3- If $\alpha > \alpha_0$ ($\alpha < \alpha_0$) f_α has 2 are one repelling f.p.

2 variables

and two attracting Periodic points of period 2

Example - $f_\alpha(x) = \alpha - \frac{1}{4} - x^2$

Solution $f_\alpha(x) = x$

$$\alpha - \frac{1}{4} - x^2 = x$$

$$x^2 + x + (\frac{1}{4} - \alpha) = 0 \Rightarrow x^2 + x - (\alpha - \frac{1}{4}) = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4(\alpha - \frac{1}{4})}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4\alpha}}{2}$$

$$x = \frac{-1}{2} \pm \sqrt{\alpha}$$

$$\hat{P}(x) = -2x$$

$$|\hat{P}(x)| < 1 \rightarrow |\hat{P}(-\frac{1}{2} + \sqrt{x})| = -2(-\frac{1}{2} + \sqrt{x}) = 1 - 2\sqrt{x}$$

أول خطوة

$$|1 - 2\sqrt{x}| < 1$$

$$-1 < 1 - 2\sqrt{x} < 1 \quad \text{نضرب بـ } -1$$

$$-2 < -2\sqrt{x} < 0 \quad \text{نقسم بـ } -2$$

$$1 > \sqrt{x} > 0$$

$$1 > x > 0$$

$$x \in (0, 1)$$

الخطوة الثانية

المعادلة الجارية

$$2 - |1 - 2\sqrt{x}| = 1 \quad \text{الخطوة الثانية نريد جعل indifferent}$$

فتنزل ال 1

على الـ 1 فيصبح المعادلة الجارية نرتفع ال 1

$$1 - 2\sqrt{x} = 1 \quad \text{or} \quad 1 - 2\sqrt{x} = -1$$

$$2\sqrt{x} = 0$$

$$2\sqrt{x} = -2$$

$$x = 0$$

$$\sqrt{x} = -1 \Rightarrow \boxed{x = 1} \text{ ind}$$