تعريف : المعيار (الطول)

اذا كان V فضاء جداء داخلي فأن معيار المتجه $\vec{u}$ والذي يرمز له $\|\vec{u}\|$ يعرف بالشكل

$$\|\vec{u}\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}}$$

كما تعرف المسافة بين متجهين $\vec{u}$ ، $\vec{v}$ بالصيغة :

$$d(u,v) \quad \|\vec{u} - \vec{v}\| = \langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle^{1/2}$$

لذلك اذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهين في R^2 اي أن :

$$\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$$

$$\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

وأن الفضاء R^n مزود بالجداء الداخلي الاقليدي المعروف فأن :

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots u_n^2}$$

$$d(\vec{u}, \vec{v}) = \|u - v\| = \langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v} \rangle^{1/2}$$

$$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

Scanned by CamScanner

مبرهنة :-

المتباينة المثلثية :- اذا كان $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ثلاث متجهات في فضاء الجداء الداخلي فأن :-

1) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

2) $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

البرهان :-

$$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle$$

$$= \langle u,u \rangle + \langle u,v \rangle + \langle v,u \rangle + \langle v,v \rangle$$

$$= \langle u,u \rangle + 2\langle u,v \rangle + \langle v,v \rangle$$

$$= \|u\|^2 + 2\langle u,v \rangle + \|v\|^2$$

بما أن $\langle u,v \rangle \leq \|u\|\,\|v\|$ متباينة كوشي

فأن $\|v\|^2 + \|v\|\,\|u\| 2 + \|u\|^2 \leq$

$$= (\|u\| + \|v\|)^2$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

(2) $d(u,v) = \|u-v\| = \|u-w+w-v\|$

$\leq \|u-w\| + \|w-v\|$

$= d(u,w) + d(w,v)$

مثال: اذا كان R^2 مزود بالجداء الداخلي:

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$

وكان $u=(1,0)$ ، $v=(0,1)$

جد $\|u\|$ ، $d(u,v)$ ثم جد $\|v\|$

الحل:

(1) $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2} = \sqrt{3(1)(1)+2(0)(0)}$

$= \sqrt{3}$

(2) $d(u,v) = \|u-v\| = \langle u-v, u-v \rangle^{1/2}$

$= \sqrt{(u_1-v_1)^2 + (u_2-v_2)^2}$

$= \sqrt{3(1)^2 + 2(-1)^2} = \sqrt{5}$

$\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2} = \sqrt{3(v_1)v_1 + 2(v_2)(v_2)}$

$= \sqrt{3(0)(0)+2(1)(1)} = \sqrt{2}$

Scanned by CamScanner

تعريف :- اذا كان V حيث $\vec{u}, \vec{v} \in V$ هو فضاء جداء داخلي فأن :

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|u\| \, \|v\|} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

مثال :- جد قيمة θ المحصورة بين المتجهين

$$\vec{u} = (2, 3, 0, 1) \quad , \quad \vec{v} = (6, -4, 1, 0)$$

في R^4 المزود بعملية الجداء الداخلي الاقليدي.

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2(6) + 3(-4) + 0(1) + 1(0) = 0$$

أو القانون :

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{14} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}$$

$$\|v\| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{53} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{53}} = 0$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

Scanned by CamScanner