تعريف :- اذا كان V حيث $\vec{u}, \vec{v} \in V$ هو فضاء جداء داخلي فأن :

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|u\| \, \|v\|} \quad , \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

مثال :- جد قيمة θ المحصورة بين المتجهين

$$\vec{u} = (2, 3, 0, 1) \quad , \quad \vec{v} = (6, -4, 1, 0)$$

في R^4 المزود بمتباينة الجداء الداخلي الاقليدي.

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4$$

$$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 2(6) + 3(-4) + 0(1) + 1(0) = 0$$

أو القانون :

$$\|u\| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{14} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}$$

$$\|v\| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{53} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 + v_4^2}$$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|} = \frac{0}{\sqrt{14}\sqrt{53}} = 0$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

Scanned by CamScanner

تعريف: ليكن V فضاء جداء داخلي. يقال المتجهين $\vec{u}, \vec{v}$ بأنهما متعامدين اذا كان $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 0$

مثال: اذا كان $\vec{u} = (1,0,1)$ ، $\vec{v} = (0,1,0)$

فهل $\vec{u}, \vec{v}$ متعامدين؟

الحل:

$$\langle u, v \rangle = 1(0) + 0(1) + 1(0) = 0$$

$\therefore \vec{u}, \vec{v}$ متجهين متعامدين.

برهنة: اذا كان $\vec{u}, \vec{v}$ متجهين متعامدين في الجداء الداخلي فأن $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$

البرهان:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \langle \vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v} \rangle$$

$$= \langle u, u+v \rangle + \langle v, u+v \rangle$$

$$= \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$$

$$= \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle$$

$$= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle + \|v\|^2$$

Scanned by CamScanner

بما أن u, v متعامدين فأن $\langle u, v \rangle = 0$ وعليه:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

تعريف: ليكن V هو فضاء الجداء الداخلي وأن $S = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}\}$ تسمى S مجموعة متعامدة اذا كان اي عنصرين في S متعامدين و S تسمى مجموعة عيارية اذا كانت

(1) S متعامدة

(2) $\|u_i\| = 1$ لكل $i = 1, 2, \dots, n$

مثال: اذا كان $S = \{u_1, u_2, u_3\}$ حيث

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$u_2 = \left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$u_3 = \left(\frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

هل أن S مجموعة عيارية أم لا؟

Scanned by CamScanner

(55)

الحل :- (1)

$$\langle \vec{u_1}, \vec{u_2} \rangle = 0 - \frac{1}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = 0$$

$$\langle \vec{u_1}, \vec{u_3} \rangle = \frac{-2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{18}} + \frac{1}{\sqrt{18}} = 0$$

$$\langle \vec{u_2}, \vec{u_3} \rangle = 0 - \frac{1}{\sqrt{12}} + \frac{1}{\sqrt{12}} = 0$$

$$\therefore \langle \vec{u_1}, \vec{u_2} \rangle = \langle \vec{u_1}, \vec{u_3} \rangle = \langle \vec{u_2}, \vec{u_3} \rangle = 0$$

$\therefore S$ متعامدة

(2)

$$\| u_1 \| = \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = 1$$

$$\| u_2 \| = \sqrt{0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$$

$$\| u_3 \| = \sqrt{\frac{4}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = 1$$

$\therefore S$ مجموعة عيارية.

برهنة :- اذا كان $S = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}\}$ مجموعة متعامدة مكونة من متجهات غير صفرية في فضاء الجداء الداخلي فأن S مستقلة خطياً.

Scanned by CamScanner